



Planning de travail

Période du 25 au 30 Mai

Chaque semaine, le planning se décompose entre certains exercices pour s'entraîner à rédiger si possible en temps limité (et qu'il faut donc renvoyer au format pdf **en un seul fichier**), des exercices d'approfondissement (à discuter *oralement* sur Teams - en individuel ou par petits groupes), des questions classiques à savoir refaire en 10-15 minutes chrono. Libre à chacun d'étaler le travail à faire dans la semaine; il est recommandé de faire 1h30 de maths chaque jour (et 1h30 d'une autre matière).

Semaine 6 - Synthèse

Toutes les variables aléatoires considérées dans ce problème sont supposées définies sur le même espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) .

On dit que la loi d'une variable aléatoire Y est *accessible* depuis une variable aléatoire X , s'il existe une application $T : X(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ telle que la variable aléatoire $T(X)$ suit la même loi que Y .

L'application T est alors appelée une *fonction de transport* de la variable aléatoire X vers la loi de Y .

On associe à T un *coût de transport* $C(T)$ défini, **sous réserve d'existence**, par

$$C(T) = E\left((X - T(X))^2\right).$$

I - Transport depuis une variable uniforme

Dans toute cette partie, X est une variable aléatoire vérifiant $X(\Omega) =]0, 1[$ et suivant la loi uniforme sur $]0, 1[$.

- (1) Rappeler la fonction de répartition et une densité de X , ainsi que l'espérance et la variance de X .

- (2) Soit p un réel vérifiant $0 < p < 1$. Pour tout $a \in [0, 1 - p]$, on note T_a la fonction définie sur $]0, 1[$ par :

$$T_a(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in]a, a + p[\\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

- (a) Calculer $P(T_a(X) = 1)$ puis donner la loi de $T_a(X)$ pour $a \in [0, 1 - p]$. En déduire que les fonctions T_a sont des fonctions de transport de X vers une même loi de Bernoulli dont on précisera le paramètre.
 (b) Rappeler l'énoncé du théorème de transfert de l'espérance pour une variable aléatoire à densité.
 (c) En déduire que

$$C(T_a) = \frac{1}{3} + p(1 - p) - 2ap.$$

- (d) Préciser la valeur de a minimisant $C(T_a)$ et le coût minimal associé en fonction de p .

- (3) On considère à présent pour tout couple $(a, b) \in]0, 1[^2$ tel que $a < b$, la fonction $T_{a,b}$ définie sur $]0, 1[$ par :

$$T_{a,b}(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in]a, b[\\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

- (a) Préciser la loi suivie par $T_{a,b}(X)$ et le coût de transport associé.

- (b) Soit $f : (a, b) \mapsto a^2 - b^2 - a + b + \frac{1}{3}$.

(i) Déterminer les points critiques de f sur l'ouvert $]0, 1[^2$.

(ii) f admet-elle des *extrema* sur $]0, 1[^2$?

- (c) Existe-t-il un couple $(a, b) \in]0, 1[^2$ vérifiant $a < b$ et minimisant $C(T_{a,b})$?

On pourra admettre que l'ensemble des couples $(a, b) \in]0, 1[^2$ vérifiant $a < b$ est un ouvert de \mathbb{R}^2 .

- (4) Soit μ un réel strictement positif et $T_{\mu,1}$ et $T_{\mu,2}$ les applications définies sur $]0, 1[$ par

$$T_{\mu,1}(x) = -\mu \ln x \quad \text{et} \quad T_{\mu,2}(x) = -\mu \ln(1 - x)$$

- (a) Vérifier que $T_{\mu,1}$ et $T_{\mu,2}$ sont des fonctions de transport de X vers une loi que l'on précisera.

- (b) Montrer que les intégrales $\int_0^1 \ln x dx$ et $\int_0^1 x \ln x dx$ convergent et valent respectivement

$$-1, \quad \text{et} \quad \frac{1}{4}.$$

- (c) Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que l'intégrale $\int_0^1 (\ln x)^2 dx$ converge et est égale à 2.

- (d) Calculer, à l'aide des deux sous-questions précédentes, les coûts de transport $C(T_{\mu,1})$ et $C(T_{\mu,2})$ puis comparer ces coûts de transport.

- (e) La suite de variables aléatoires $(T_{\frac{1}{n},1}(X))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge-t-elle en loi ? Si oui, préciser la loi limite.

- (f) Déterminer la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de $C(T_{\frac{1}{n},1})$.

- (5) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on désigne par $[x]$ la partie entière de x .

On rappelle que $[x]$ est l'unique entier vérifiant : $[x] \leq x < [x] + 1$.

- (a) Montrer que si Y est une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre λ , $[Y] + 1$ suit une loi géométrique dont on précisera le paramètre.

- (b) Quelle valeur faut-il prendre pour λ pour que la variable $[Y] + 1$ suive une loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$?

- (c) En déduire que toutes les lois géométriques sont accessibles depuis X .

- (d) Écrire une fonction SciLab d'en-tête `function y=Geo(p)` simulant une variable suivant la loi géométrique de paramètre p à partir de la commande `X=rand()`.
On rappelle que la fonction `floor(x)` renvoie la partie entière d'un réel x .

- (6) Dans cette question, Y désigne une variable aléatoire admettant une densité f_Y continue et strictement positive sur un intervalle ouvert non vide $]a, b[$ où a et b sont réels ou infinis, et nulle en dehors de $]a, b[$.

- (a) Justifier que la fonction de répartition F_Y de Y réalise une bijection de $]a, b[$ sur l'intervalle ouvert $]0, 1[$.
 (b) On note F_Y^{-1} la bijection réciproque. Montrer que F_Y^{-1} est une fonction de transport de la variable aléatoire X vers la loi de Y .
 (c) Déterminer la loi de $F_Y(Y)$. En déduire que la loi de X est accessible depuis Y et préciser la fonction de transport associée.
 (d) Montrer à l'aide du changement de variable $u = F_Y^{-1}(t)$ que

$$E\left((X - F_Y^{-1}(X))^2\right) = E\left((Y - F_Y(Y))^2\right).$$

Que signifie ce résultat ?

- (7) *Cas particulier*: on suppose ici que Y suit la loi normale centrée réduite.

On note Φ la fonction de répartition de Y et φ la densité de Y qui est continue sur \mathbb{R} .

- (a) Montrer que $\int_{-\infty}^{+\infty} (\Phi(y))^2 \varphi(y) dy$ converge et déterminer sa valeur.
 (b) En remarquant que Φ est bornée sur \mathbb{R} , établir la convergence de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} y \Phi(y) \varphi(y) dy$.
 (c) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que : $\int_{-\infty}^{+\infty} y \Phi(y) \varphi(y) dy = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}$.
On explicitera $\varphi(y)$ pour le calcul de cette intégrale.
 (d) Montrer à l'aide du changement de variable $x = \Phi(y)$ que :

$$\int_0^1 (x - \Phi^{-1}(x))^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} (y - \Phi(y))^2 \varphi(y) dy$$

- (e) En déduire que le coût de transport $C(\Phi^{-1})$ de la variable X à la variable Y est égal à

$$\frac{4}{3} - \frac{1}{\sqrt{\pi}}.$$

Que peut-on dire du coût de transport de la variable Y à la variable X ?

II - Transport depuis une variable exponentielle

- (1) Soit Y une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

- (a) Montrer que $Y - [Y]$ admet pour fonction de répartition

$$F : x \mapsto \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0 \\ \frac{1 - e^{-\lambda x}}{1 - e^{-\lambda}}, & \text{si } x \in [0, 1[\\ 1, & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

- (b) Justifier que $Y - [Y]$ est à densité et préciser une densité de $Y - [Y]$.
 (c) En déduire que le coût du transport de Y à la loi de $[Y]$ est :

$$E((Y - [Y])^2) = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{e^{-\lambda}}{1 - e^{-\lambda}} \left(1 + \frac{2}{\lambda}\right).$$

- (2) On considère une suite de variables aléatoires (Y_n) telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, Y_n suit la loi exponentielle de paramètre n .

- (a) Montrer que $(Y_n - [Y_n])$ converge en loi.
 (b) Quelle est la limite du coût du transport de Y_n à la loi de $[Y_n]$ lorsque n tend vers $+\infty$?

- (3) On considère une suite de variables aléatoires (Y_n) telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, Y_n suit la loi exponentielle de paramètre $1/n$.
- (a) Montrer que $(Y_n - \lfloor Y_n \rfloor)$ converge en loi.
- (b) Quelle est la limite du coût du transport de Y_n à la loi de $\lfloor Y_n \rfloor$ lorsque n tend vers $+\infty$?
On admettra ici que

$$e^{-1/n} \underset{+\infty}{=} 1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Soit désormais a un réel strictement positif et b un réel.

- (4) (a) Soit G la fonction définie sur \mathbb{R} par

$$G(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\sqrt{\frac{x-b}{a}}}, & \text{si } x \geq b \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}.$$

Montrer que la fonction G est la fonction de répartition d'une variable à densité.

On appelle $W(a, b)$ la loi associée.

- (b) Montrer que la loi $W(a, b)$ est accessible depuis une variable Y suivant la loi exponentielle de paramètre 1 via la fonction de transport $T_{a,b} : x \mapsto ax^2 + b$.
- (c) Justifier que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, l'intégrale $I_k = \int_0^{+\infty} t^k e^{-t} dt$ converge et vaut $k!$
- (d) En déduire le coût de transport $C(T_{a,b})$ associé à $T_{a,b}$.
- (5) Montrer que la fonction $f : (a, b) \mapsto 24a^2 + b^2 + 4ab - 12a - 2b + 2$ admet un unique point critique (a_0, b_0) sur l'ouvert $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, que l'on déterminera.
- (6) Soit H la matrice Hessienne de f au point (a_0, b_0) .
- (a) Montrer que les valeurs propres de H sont racines d'une équation du second degré que l'on précisera.
- (b) Montrer que si x_1 et x_2 sont les racines d'un trinôme du second degré de la forme $x^2 - sx + p$, alors $s = x_1 + x_2$ et $p = x_1 x_2$.
- (c) En déduire que la somme et le produit des valeurs propres de H sont strictement positifs. Qu'en déduit-on quant au signe des valeurs propres de H ?
- (d) En déduire la nature du point critique (a_0, b_0) .
- (7) (a) On pose $S = \frac{1}{2}H$. Montrer que

$$f(a, b) - f(a_0, b_0) = (a - a_0 \quad b - b_0) S \begin{pmatrix} a - a_0 \\ b - b_0 \end{pmatrix}.$$

- (b) On note λ_1 et λ_2 les valeurs propres de S . Préciser la valeur de $\lambda_1 \lambda_2$ et de $\lambda_1 + \lambda_2$.
On ne cherchera pas à calculer explicitement λ_1 et λ_2 .
- (c) Vérifier que (pour tout $i \in \{1, 2\}$,

$$\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ est vecteur propre de } S \text{ associé à } \lambda_i \right) \iff x = \frac{\lambda_i - 1}{2} y.$$

- (d) On note $\delta_i = \sqrt{\left(\frac{\lambda_i - 1}{2}\right)^2 + 1}$ et $U_i = \frac{1}{\delta_i} \begin{pmatrix} \lambda_i - 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ pour $i \in \{1, 2\}$.

Soit P la matrice ayant pour vecteurs colonnes U_1 et U_2 (dans cet ordre).

Montrer que ${}^t P P = I_2$. En déduire la matrice ${}^t P S P$ en fonction de λ_1 et λ_2 .

(e) On note $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ le vecteur colonne ${}^tP \begin{pmatrix} a - a_0 \\ b - b_0 \end{pmatrix}$.

Déduire de ce qui précède que $f(a, b) - f(a_0, b_0) = \lambda_1 \alpha^2 + \lambda_2 \beta^2$ puis que f admet un minimum global sur l'ouvert $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ en un unique point que l'on précisera, ainsi que la valeur du minimum.

(f) En déduire les paramètres (a, b) pour lesquels le coût de transport $C(T_{a,b})$ d'une variable suivant la loi exponentielle de paramètre 1 vers la loi $W(a, b)$ est minimal.