ECE 2 - Année 2019-2020
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Entraînement

Printemps 2020

Exercice 1

Soit (u_n) la suite définie par les relations $u_1 = 1$ et, pour tout $n \geq 2$, par

$$u_n = \sqrt{n + u_{n-1}}.$$

(1) (a) Montrer que, pour tout $n \geq 1$, $\sqrt{2(n-1)} \leq n$.
   (b) En déduire que, pour tout $n \geq 1$, on a $u_n \leq \sqrt{2n}$.

(2) Montrer que $u_n \sim \sqrt{n}$, $n \to +\infty$.

(3) (**) On pose $v_n = u_n - \sqrt{n}$. En particulier, on a $v_n = o(\sqrt{n})$.
   (a) Montrer que

$$v_n \sim \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n}}.$$

   (b) En déduire que

$$u_n = \sqrt{n} + \frac{1}{2} + o(1).$$

Exercice 2

E désigne l'espace des fonctions polynômes à coefficients réels, dont le degré est inférieur ou égal à 2.

Partie I - Étude d'un endomorphisme de E.

On considère l'application f qui, à tout élément P de E, associe la fonction polynôme Q telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R} : \quad Q(x) = (x-1)P'(x) + P(x)$$

et $\mathcal{B} = (P_0, P_1, P_2)$ la base canonique de E définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R} : \quad P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x \quad \text{et} \quad P_2(x) = x^2.$$

(1) Montrer que f est un endomorphisme de E.
(2) Vérifier que la matrice A de f dans $\mathcal{B}$, s'écrit sous la forme :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

(3) Quelles sont les valeurs propres de f ? f est-il diagonalisable ? f est-il un automorphisme de E ?

(4) Déterminer l'image par f des fonctions polynômes R_0, R_1, R_2 définies par :

$$\forall x \in \mathbb{R} : \quad R_0(x) = 1, \quad R_1(x) = x - 1 \quad \text{et} \quad R_2(x) = (x-1)^2$$

(5) Montrer que $\mathcal{B}' = (R_0, R_1, R_2)$ est une base de vecteurs propres de f. Écrire la matrice de passage P de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ ainsi que la matrice D de f dans la base $\mathcal{B}'$.

(6) Vérifier que pour tout réel x :

$$\begin{cases} R_2(x) + 2R_1(x) + R_0(x) = P_2(x) \\ R_1(x) + R_0(x) = P_1(x) \end{cases}$$

En déduire la matrice de passage de la base $\mathcal{B}'$ à la base $\mathcal{B}$.

(7) Écrire A^{-1} en fonction de D^{-1}. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n :

$$\left[A^{-1}\right]^n = P\left[D^{-1}\right]^n P^{-1}$$

et expliciter la troisième colonne de la matrice $\left[A^{-1}\right]^n$.

Partie II - Suite d'épreuves aléatoires.

On dispose d'une urne qui contient trois boules numérotées de 0 à 2.

On s'intéresse à une suite d'épreuves définies de la manière suivante :

- La première épreuve consiste à choisir au hasard une boule dans cette urne.
- Si j est le numéro de la boule tirée, on enlève de l'urne toutes les boules dont le numéro est strictement supérieur à j, le tirage suivant se faisant alors dans l'urne ne contenant plus que les boules numérotées de 0 à j.

On considère alors la variable aléatoire réelle X_k égale au numéro de la boule obtenue à la $k^{\text{ème}}$ épreuve.
On note alors U_k la matrice uni colonne définie par :

$$U_k = \begin{pmatrix} P[X_k = 0] \\ P[X_k = 1] \\ P[X_k = 2] \end{pmatrix}$$

où $P[X_k = j]$ est la probabilité de tirer la boule numéro j à la $k^{\text{ème}}$ épreuve.

On convient de définir la matrice U_0 par :

$$U_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(1) Déterminer la loi de X_2 puis calculer l'espérance et la variance de X_2.

(2) Par utilisation de la formule des probabilités totales, prouver que pour tout entier naturel k :

$$U_{k+1} = A^{-1}U_k.$$

(3) Écrire U_k en fonction de A^{-1} et U_0.

(4) Pour tout k de $\mathbb{N}$, donner la loi de X_k et vérifier que l'on a :

$$\lim_{k\to+\infty} P[X_k = 0] = 1, \qquad \lim_{k\to+\infty} P[X_k = 1] = 0, \qquad \lim_{k\to+\infty} P[X_k = 2] = 0$$

(5) Compléter le programme `SciLab` suivant afin qu'il permette de représenter graphiquement des réalisations de X_0, $X_1, ..., X_n$, où n est rentré par l'utilisateur.

```
n=input('n=?')
M=[.......................................................]
X=grand(n, 'markov', M, ............ )
X=[........., ...........]
plot2d(0:n, X, -1)
```

Problème

On considère deux variables aléatoires X et Y, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, et indépendantes.

On suppose que X est une variable à densité et on note F_X sa fonction de répartition. On suppose par ailleurs que la loi de Y est donnée par

$$P(Y = 1) = P(Y = -1) = \frac{1}{2}.$$

L'indépendance de X et Y se traduit par les égalités suivantes, valables pour tout réel x:

$$P\left([X \leq x] \cap [Y = 1]\right) = P\left(X \leq x\right) P\left(Y = 1\right)$$

et

$$P\left([X \leq x] \cap [Y = -1]\right) = P\left(X \leq x\right) P\left(Y = -1\right).$$

On pose $Z = XY$ et on admet que Z est, elle-aussi, une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

On se propose d'établir deux résultats utiles pour la suite dans la partie 1, puis d'en déduire la loi de la variable aléatoire Z en fonction de la loi de X dans les parties 2 et 3.

Partie 1 : expression de la fonction de répartition de Z en fonction de celle de X.

(1) Rappeler l'expression des fonctions de répartition d'une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $[a, b]$ (avec $a < b$) et d'une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre λ (avec $\lambda > 0$).

(2) En utilisant le système complet d'événements $\{(Y = 1), (Y = -1)\}$, montrer que la fonction de répartition F_Z de la variable aléatoire Z est donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad F_Z(x) = \frac{1}{2}\left(F_X(x) - F_X(-x) + 1\right).$$

Partie 2 : étude de deux premiers exemples.

(3) On suppose que la loi de X est la loi normale centrée réduite.
Reconnaître la loi de Z.

(4) On suppose que la loi de X est la loi uniforme sur $[0, 1]$.
  (a) Déterminer l'expression de $F_X(-x)$ selon les valeurs prises par x.
  (b) Déterminer $F_Z(x)$ pour tout réel x, puis reconnaître la loi de Z.

Partie 3 : étude du cas où la loi de X est la loi exponentielle de paramètre 1.

(5) (a) Montrer que la fonction de répartition F_Z de la variable aléatoire Z est définie par :

$$F_Z(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{2}e^{-x}, & \text{si } x \geq 0 \\ \frac{1}{2}e^{x}, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

  (b) En déduire que Z est une variable aléatoire à densité.

(c) Établir alors qu'une densité de Z est la fonction f_Z définie pour tout réel x par :

$$f_Z(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}.$$

(d) Donner, en justifiant, la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{-x}\mathrm{d}x$.

(e) Montrer que f_Z est une fonction paire et en déduire l'existence et la valeur de $E(Z)$.

(6) (a) Donner la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2e^{-x}\mathrm{d}x$.

(b) En déduire l'existence et la valeur de $E(Z^2)$, puis donner la valeur de la variance de Z.

(7) (a) Déterminer $E(X)E(Y)$ et comparer avec $E(Z)$. Quel résultat retrouve-t-on ainsi ?

(b) Exprimer Z^2 en fonction de X, puis en déduire de nouveau la variance de Z.

(8) Soit U et V des variables aléatoires suivant respectivement la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$ et la loi uniforme sur $[0, 1[$.

(a) On pose $Q = -\ln(1 - V)$ et on admet que Q est une variable aléatoire. Déterminer la fonction de répartition de Q et en déduire la loi suivie par la variable aléatoire Q.

(b) On pose $R = 2U - 1$ et on admet que R est une variable aléatoire. Déterminer $R(\Omega)$ et donner la loi suivie par la variable R.

(c) Simulation sous `SciLab`.
En tenant compte des résultats des deux dernières questions, écrire en `SciLab` une déclaration de fonction dont l'entête est `function y=Z()` pour qu'elle simule la loi de Z.

Exercice 3*

Exercice inspiré d'**ECRICOME 2019**, série S. Initialement envisagé pour le Concours Blanc n°4.

Une urne contient initialement une boule blanche et une boule noire. On effectue une succession de tirages d'une boule dans cette urne. Après chaque tirage, on remet la boule tirée dans l'urne, et on rajoute dans l'urne une boule de couleur opposée à celle qui vient d'être tirée.

On suppose que cette expérience est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega,\ \mathcal{T},\ \mathbb{P})$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note X_k le nombre de boules blanches présentes dans l'urne juste avant le $(k+1)$-ième tirage. En particulier, on a $X_0 = 1$. On admet que pour tout entier k, X_k est une variable aléatoire de $(\Omega,\ \mathcal{T},\ \mathbb{P})$.

(1) Compléter le programme `SciLab` ci-dessous afin qu'il simule la variable X_n.

```
function y=X(n)
    nB=1
    nN=1
    for k=1:n
        if ......................... then
            nN=nN+1
        else
            nB=nB+1
        end
    end
    y=..............................
endfunction
```

(2) Déterminer la loi de X_1. Donner son espérance et sa variance.

(3) (a) Justifier soigneusement que la loi de X_2 est donnée par :

$$\mathbb{P}([X_2 = 1]) = \frac{1}{6}, \quad \mathbb{P}([X_2 = 2]) = \frac{2}{3}, \quad \mathbb{P}([X_2 = 3]) = \frac{1}{6}$$

(b) En déduire la valeur de $E(X_2)$

(4) Préciser l'ensemble $X_k(\Omega)$ des valeurs que peut prendre X_k.

(5) Soient $i \in \mathbb{N}^*$ et $j \in X_k(\Omega)$. En distinguant $|i-j| = 1$ et $|i-j| \neq 1$, déterminer

$$\mathbb{P}_{[X_k=j]}([X_{k+1} = i]).$$

(6) Déduire de ce qui précède que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall i \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}([X_{k+1} = i]) = \frac{i}{k+2}\,\mathbb{P}([X_k = i]) + \frac{3+k-i}{k+2}\,\mathbb{P}([X_k = i-1]) \qquad (*)$$

(7) À l'aide de la formule (*) déterminer la loi de X_3.

(8) (a) Montrer, par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$, que

$$\mathbb{P}([X_k = 1]) = \frac{1}{(k+1)!}.$$

(b) Montrer de même que

$$\mathbb{P}([X_k = k+1]) = \frac{1}{(k+1)!}.$$

(c) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose : $a_k = (k+1)! \times \mathbb{P}([X_k = 2])$
Exprimer a_{k+1} en fonction de a_k et de k.
Montrer que la suite $(b_k)_{k\geqslant 0}$ définie par :$\forall k \in \mathbb{N}, b_k = a_k + k + 2$ est géométrique.
En déduire alors que :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}([X_k = 2]) = \frac{2^{k+1} - k - 2}{(k+1)!}$$

(9) (a) À l'aide de la formule (*), montrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ E(X_{k+1}) = \frac{k+1}{k+2}E(X_k) + 1$$

(b) Déduire de ce qui précède que :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ E(X_k) = \frac{k+2}{2}$$

(c) Soit Y_k la variable aléatoire égale au nombre de boules noires présentes dans l'urne après k tirages.
Justifier que X_k et Y_k ont même espérance, puis retrouver le résultat de la question précédente.

On **admettra** pour la suite que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad V(X_k) = \frac{k+2}{12}.$$

(10) (a) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que :

$$\lim_{k \to +\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{X_k}{k+2} - \frac{1}{2}\right| > \varepsilon\right) = 0.$$

(b) Interpréter ce résultat et le justifier intuitivement.