ECE 2 - Année 2020-2021
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Concours Blanc n°3 - Sujet A

Lundi 7 Décembre
Durée : 4 heures

Exercice 1

On rappelle que deux matrices A et B de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ sont dites semblables lorsqu'il existe une matrice P de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ inversible telle que $B = P^{-1}AP$.

L'objectif de cet exercice est d'étudier des exemples de matrices inversibles qui sont semblables à leur inverse. Les trois parties de cet exercice sont indépendantes entre elles.

Partie A : Premier exemple

On considère l'endomorphisme φ de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(1) Justifier que φ est un automorphisme.

(2) Déterminer trois vecteurs u, v et w de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ tels que

$$\mathrm{Ker}(A - I) = \mathrm{Vect}(u), \quad \mathrm{Ker}\left(A - \frac{1}{2}I\right) = \mathrm{Vect}(v), \quad \text{et} \quad \mathrm{Ker}(A - 2I) = \mathrm{Vect}(w).$$

(3) Vérifier que la famille $\mathcal{B}' = (u, v, w)$ forme une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et préciser la matrice D de φ dans cette base.

(4) En déduire une matrice P, inversible, telles que $A = PDP^{-1}$. Expliciter la matrice D^{-1}.

(5) On note $Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer Q^2 et QDQ.

(6) En déduire que les matrices A et A^{-1} sont semblables.

Partie B : Deuxième exemple

On considère f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ f(x, y, z) = (x, -z, y + 2z).$$

On note M la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
On considère également les vecteurs u_1 et u_2 de $\mathbb{R}^3$ définis par : $u_1 = (1, 0, 0)$ et $u_2 = (0, 1, -1)$.

(7) Expliciter la matrice M et montrer que M est inversible.

(8) (a) Montrer que (u_1, u_2) forme une base de $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id})$.
(b) Déterminer un vecteur u_3 de $\mathbb{R}^3$ tel que : $f(u_3) - u_3 = u_2$.
(c) Montrer que la famille $\mathcal{B}_1 = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

On admet que $\mathcal{B}_2 = (u_1, -u_2, u_3)$ est également une base de $\mathbb{R}^3$.

(9) (a) Écrire la matrice M_1 de f dans la base $\mathcal{B}_1$ et la matrice M_2 de f dans la base $\mathcal{B}_2$.
(b) Justifier que les matrices M_1 et M_2 sont semblables, et calculer $M_1 M_2$.

(10) En déduire que les matrices M et M^{-1} sont semblables.

Partie C : Troisième exemple

On considère la matrice T de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par :

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et on pose $N = T - I_3$.

(11) Justifier que la matrice T est inversible.

(12) (a) Calculer N^3 et $(I_3 + N)(I_3 - N + N^2)$.
(b) En déduire une expression de T^{-1} en fonction de I_3, N et N^2.

(13) On note g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est N.

(a) Justifier qu'il existe un vecteur u de $\mathbb{R}^3$ tel que $g \circ g(u) \neq 0$ et $g \circ g \circ g(u) = 0$.
(b) Montrer que la famille $\mathcal{B}_3 = (g \circ g(u), g(u), u)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
(c) Écrire la matrice de g dans la base $\mathcal{B}_3$.
(d) Calculer $N^2 - N$ et en déduire que les matrices N et $N^2 - N$ sont semblables.

(14) Montrer que les matrices T et T^{-1} sont semblables.

Exercice 2

Partie A : Étude d'une variable aléatoire

On considère l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie, pour tout t de $\mathbb{R}$, par

$$f(t) = \frac{e^{-t}}{(1 + e^{-t})^2}.$$

(1) Vérifier que la fonction f est paire.
(2) Montrer que f est une densité d'une variable aléatoire réelle.

Dans toute la suite de l'exercice, on considère une variable aléatoire réelle X à densité, de densité f.

(3) Déterminer la fonction de répartition de X.

(4) (a) Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} tf(t)\mathrm{d}t$ converge.

(b) En déduire, soigneusement, que X admet une espérance et que $E(X) = 0$.

Partie B : Étude d'une autre variable aléatoire

On considère l'application $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie, pour tout x de $\mathbb{R}$, par : $\varphi(x) = \ln(1 + e^x)$.

(5) Montrer que φ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle I à préciser.

(6) Exprimer, pour tout y de I, $\varphi^{-1}(y)$.

On considère la variable aléatoire réelle Y définie par : $Y = \varphi(X)$.

(7) Justifier : $P(Y \leq 0) = 0$.

(8) Déterminer la fonction de répartition de Y.

(9) Reconnaître alors la loi de Y et donner, sans calcul, son espérance et sa variance.

Partie C : Étude d'une convergence

On considère une suite de variables aléatoires réelles $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, mutuellement indépendantes, de même densité f, où f a été définie dans la Partie A.

On pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $T_n = \max(X_1, \dots, X_n)$ et $U_n = T_n - \ln(n)$.

(10) Justifier que : $[T_n \leq x] = [(X_1 \leq x) \cap (X_2 \leq x) \cap \cdots \cap (X_n \leq x)]$.

(11) En déduire, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, la fonction de répartition de T_n, notée G_n est donnée par

$$G_n(x) = \left(1 + e^{-x}\right)^{-n}.$$

(12) En déduire

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \qquad P(U_n \leq x) = \left(1 + \frac{e^{-x}}{n}\right)^{-n}.$$

(13) Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. Déterminer la limite, quand $n \to +\infty$, de $P(U_n \leq x)$.
On note $G(x)$ cette limite.

(14) Montrer que la fonction G est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité, notée Z puis déterminer une densité de Z.

Exercice 3

Une urne contient des boules blanches (en proportion p), des boules noires (en proportion q) et des boules rouges (en proportion r). On a donc $p + q + r = 1$ (on suppose que $p, q, r \in]0; 1[$). On effectue des tirages successifs **avec remise** dans cette urne. Pour $i \in \mathbb{N}^*$, on note T_i la variable qui vaut 1 si la $i-$ème boule tirée est blanche, -1 si elle est noire et 0 si elle est rouge.
Les tirages étant effectués avec remise, les variables (T_i) sont donc mutuellement indépendantes.

Partie A

On note ensuite X_1 la variable aléatoire égale au numéro du tirage qui amène pour la première fois une boule blanche et X_2 celui correspondant au tirage où sort pour la première fois la **deuxième** boule blanche.

Par exemple, si les premiers tirages donnent *Noire, Rouge, Noire, Blanche, Rouge, Blanche, ...*, on a $X_1 = 4$ et $X_2 = 6$.

(1) Expliciter, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, la loi de T_i. Calculer son espérance et sa variance.

(2) Reconnaître la loi de X_1. Rappeler son espérance et sa variance.

(3) Compléter la fonction `SciLab` suivante, afin qu'elle simule les variables X_1 et X_2. Pourquoi la fonction ne prend-elle en argument lque a proportion p de boules blanches?

```
function [X1, X2]=exo3(p)
    X1=.......
    while ................
        X1=.............
    end
    X2=..........
    while ................
        X2=...............
    end
endfunction
```

(4) (a) Expliciter la loi conjointe du couple (X_1, X_2).
(b) En déduire la loi marginale de X_2.
(c) Montrer que X_2 admet une espérance et que $E(X_2) = \dfrac{2}{p}$.

(5) On note $U_2 = X_2 - X_1$.

(a) Pour $j \in \mathbb{N}^*$, déterminer $P(U_2 = j)$.
En déduire que X_1 et U_2 suivent la même loi, puis que U_2 admet une variance et préciser sa valeur.
(b) Montrer que U_2 est indépendante de X_1.
(c) On rajoute les instructions `SciLab` suivantes à la suite de la fonction précédente. Que peut-on prévoir quant à l'affichage après exécution de celles-ci ?

```
p=1/4;
L=[ ]; M=[ ];
for k=1:10000
    [X1,X2]=exo3(p)
    L=[L, X1]
    M=[M, X2]
end
U=M-L;
disp(mean((L-mean(L)).*(U-mean(U))))
```

(d) Exprimer X_2 en fonction de U_2 et X_1 et en déduire que X_2 admet une variance qu'on explicitera.
(e) Que vaut $\text{cov}(X_1, X_2)$? Les variables X_1 et X_2 sont-elles indépendantes?

Partie B

On note W la variable correspondant au nombre de boules rouges obtenues avant l'obtention de la première boule blanche.

(6) Pour $i \in \mathbb{N}^*$, déterminer la loi conditionnelle de W sachant $[X_1 = i]$.

(7) En déduire que la loi de W est donnée par la somme, pour $k \in \mathbb{N}$,

$$P(W = k) = p \left(\frac{r}{q+r} \right)^k \sum_{i=k+1}^{+\infty} \binom{i-1}{k} \left(\frac{q}{q+r} \right)^{i-1-k} (1-p)^{i-1}$$

(8) Vérifier que, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $k \in [\![0, i]\!]$,

$$k \binom{i}{k} = i \binom{i-1}{k-1}$$

(9) En admettant qu'il est licite de permuter les sommes

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{i=k+1}^{+\infty} \cdots = \sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{k=0}^{i-1} \cdots ,$$

et que W admet une espérance, montrer que

$$E(W) = \frac{r}{p}$$

Partie C

On note, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = T_1 + ... + T_n$.

(10) Quelle est la loi de S_1? Préciser son espérance et sa variance.

(11) Expliciter l'espérance et la variance de S_n.

(12) Soit $t > 0$. On pose $V_n = t^{S_n}$.

(a) Déterminer la loi, l'espérance et la variance de V_1.

(b) En déduire l'expression de $E(V_n)$.