Concours Blanc n°3 - Sujet A

Lundi 7 Décembre
Solution

Exercice 1

Cet exercice est extrait (en incluant des modifications à la Partie A) du sujet **EML 2019**.

On rappelle que deux matrices A et B de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ sont dites semblables lorsqu'il existe une matrice P de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ inversible telle que $B = P^{-1}AP$.

L'objectif de cet exercice est d'étudier des exemples de matrices inversibles qui sont semblables à leur inverse. Les trois parties de cet exercice sont indépendantes entre elles.

Partie A : Premier exemple

On considère l'endomorphisme φ de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(1) La matrice A est triangulaire supérieure sans zéro sur la diagonale, elle est donc inversible et l'endomorphisme qu'elle représente, φ bijectif: c'est un automorphisme.

(2) On résout

$$\begin{aligned} X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker}(A - I) &\iff (A-I)X = 0 \\ &\iff \left\{ \begin{array}{rcl} -y + z &=& 0 \\ -y/2 &=& 0 \\ z &=& 0 \end{array} \right. \\ &\iff X = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\operatorname{Ker}(A - I) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right), \quad \text{et} \quad u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker}\left(A - \frac{1}{2}I\right) \iff \left(A - \frac{1}{2}I\right) X = 0$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcl} x/2 - y + z & = & 0 \\ (3/2)z & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\iff X = \begin{pmatrix} 2y \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi,

$$\operatorname{Ker}\left(A - \frac{1}{2}I\right) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right), \quad \text{et} \quad v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Enfin,

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker}(A - 2I) \iff (A - 2I)X = 0$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcl} -x - y + z & = & 0 \\ -(3/2)y & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\iff X = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ x \end{pmatrix}$$

Ainsi,

$$\operatorname{Ker}(A - 2I) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \quad \text{et} \quad w = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(3) La famille $\mathcal{B}' = (u, v, w)$ est composée de trois vecteurs de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ qui est un espace vectoriel de dimension 3. Pour qu'elle en forme une base, il suffit alors de vérifier qu'elle est libre. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que

$$au + bv + cw = 0.$$

Alors, on a le système

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a + 2b + c & = & 0 \\ b & = & 0 \\ c & = & 0 \end{array} \right. \iff a = b = c = 0.$$

Ainsi, $\mathcal{B}'$ forme bien une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Par construction de u, v, w, on a

$$D = \operatorname{Mat}(\varphi, \mathcal{B}') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

En effet, $u \in \operatorname{Ker}(\varphi - \mathrm{id})$ donc $\varphi(u) = u$, $v \in \operatorname{Ker}(\varphi - (1/2)\mathrm{i}d)$ donc $\varphi(v) = (1/2)v$ et $w \in \operatorname{Ker}(\varphi - 2\mathrm{id})$ donc $\varphi(w) = 2w$.

(4) En introduisant la matrice de passage de la base canonique vers la base $\mathcal{B}'$, c'est à dire

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

la formule de changement de base permet d'affirmer que

$$A = PDP^{-1}.$$

De plus, comme D est diagonale, on peut directement affirmer que

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & (1/2) \end{pmatrix}.$$

(5) On note $Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Le calcul donne

$$Q^2 = I_3, \qquad \text{et} \qquad QDQ = D^{-1}.$$

(6) Remarquons d'abord que d'après la question précédente, $Q.Q = I_3$, c'est-à-dire que Q est inversible et $Q^{-1} = Q$.
Par ailleurs $A = PDP^{-1}$ donc $A^{-1} = (PDP^{-1})^{-1} = PD^{-1}P^{-1}$, or $D^{-1} = QDQ$ d'après la question précédente, donc

$$A^{-1} = PQDQP^{-1} = PQDQ^{-1}P^{-1}.$$

Enfin $D = P^{-1}AP$ donc

$$A^{-1} = PQ(P^{-1}AP)Q^{-1}P^{-1} = PQP^{-1}APQ^{-1}P^{-1} = (PQP^{-1})A(PQP^{-1})^{-1}.$$

Ainsi si l'on note $R = PQP^{-1}$, on a $A^{-1} = RAR^{-1}$, c'est-à-dire que A et A^{-1} sont semblables.

Partie B : Deuxième exemple

(7) On a $f(1,0,0) = (1,0,0)$, $f(0,1,0) = (0,0,1)$ et $f(0,0,1) = (0,-1,2)$ donc

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Or, la permutation des lignes d'une matrice conserve les propriétés d'inversibilité. Ainsi,

$$M \text{ inversible} \iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ inversible}$$

Mais cette dernière matrice est bien inversible puisqu'il s'agit d'une matrice triangulaire de coefficients diagonaux tous non-nuls. Ainsi M est inversible.

(8) (a) Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} (M - I_3)X = 0 &\iff \begin{cases} -y - z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \\ &\iff z = -y \\ &\iff X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ -y \end{pmatrix} = xu_1 + yu_2 \end{aligned}$$

La famille (u_1, u_2) est bien génératrice de $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id})$. Comme ces deux vecteurs sont (non nuls et) clairement non colinéaires, ils en forment également une base.

(b)

$$
\begin{aligned}
f(u_3) - u_3 = u_2 &\iff (M - I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rcl} -y - z &=& 1 \\ y + z &=& -1 \end{array} \right. \\
&\iff z = -y - 1
\end{aligned}
$$

Ainsi on peut par exemple choisir $x = 0$, $y = 0$, et $z = -1$ ce qui donne $u_3 = (0, 0, -1)$.

(c) Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $au_1 + bu_2 + cu_3 = 0$. Alors,

$$
\left\{ \begin{array}{rcl} a &=& 0 \\ b &=& 0 \\ -b - c &=& 0 \end{array} \right.
$$

d'où $a = b = c = 0$. Ainsi la famille (u_1, u_2, u_3) est libre. De plus elle est constituée de trois vecteurs dans $\mathbb{R}^3$ (de dimension 3) et en forme donc une base.

(9) (a) On a montré précédemment que (u_1, u_2) est une base de $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id})$, donc $f(u_1) = u_1$ et $f(u_2) = u_2$. Enfin on a choisi u_3 tel que $f(u_3) - u_3 = u_2$, c'est-à-dire $f(u_3) = u_2 + u_3$. Ainsi la matrice de f dans la base (u_1, u_2, u_3) est alors

$$
M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
$$

Déterminons maintenant M_2 : on a $f(u_1) = u_1$, $f(-u_2) = -f(u_2) = -u_2$ par linéarité de f et
$f(u_3) = -(-u_2) + u_3$, donc

$$
M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
$$

(b) M_1 et M_2 représentent le même endomorphisme f dans deux bases différentes, elles sont donc semblables (en effet si on note R la matrice de passage de $\mathcal{B}_1$ à $\mathcal{B}_2$ alors $M_2 = R^{-1}M_1R$ d'après la formule de changement de base).
Le calcul donne $M_1M_2 = I_3$.

(10) On vient de montrer que $M_1M_2 = I_3$, donc M_1 est inversible et $M_1^{-1} = M_2$.
M et M_2 représentent le même endomorphisme f donc M et M_2 sont semblables. Par ailleurs M^{-1} et M_1^{-1} représentent le même endomorphisme f^{-1} donc M^{-1} et M_1^{-1} sont semblables. Autrement dit M^{-1} et M_2 sont semblables puisque $M_1^{-1} = M_2$.
Finalement on a montré que M et M^{-1} sont toutes deux semblables à la même matrice M_2. Ainsi par transitivité M et M^{-1} sont semblables.

Partie C : Troisième exemple

(11) T est triangulaire supérieure de coefficients diagonaux tous non-nuls, donc T est inversible.

(12) (a) Le calcul donne $N^3 = 0$. Ainsi,

$$
(I_3 + N)(I_3 - N + N^2) = I_3 - N + N^2 + N - N^2 + N^3 = I_3 + N^3 = I_3.
$$

(b) On vient de montrer que $(I_3+N)(I_3-N+N^2)=I_3$, donc $I_3+N=T$ est inversible et
$$T^{-1}=I_3-N+N^2.$$

(13) (a) On vérifie par le calcul que $N^2\neq 0_3$, donc g^2 n'est pas l'endomorphisme nul, donc il existe $u\in\mathbb{R}^3$ tel que $g^2(u)\neq 0$. En revanche $N^3=0$ donc g^3 est l'endomorphisme nul, en particulier $g^3(u)=0$.

(b) Soit $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ tel que $ag^2(u)+bg(u)+cu=0$. Alors en appliquant g^2 et par linéarité de g^2 , on obtient $ag^4(u)+bg^3(u)+cg^2(u)=g^2(0)=0$, autrement dit puisque $g^3(u)=g^4(u)=0$, $cg^2(u)=0$.
Or $g^2(u)\neq 0$ donc $c=0$.
L'équation initiale se récrit donc : $ag^2(u)+bg(u)=0$. En appliquant g qui est linéaire, on obtient alors : $ag^3(u)+bg^2(u)=0$, c'est-à-dire $bg^2(u)=0$, or $g^2(u)\neq 0$, donc $b=0$.
Finalement il reste $ag^2(u)=0$, d'où $a=0$. On a donc montré que $a=b=c=0$, et donc la famille $\mathcal{B}_3$ est libre. Il s'agit par ailleurs d'une famille de trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$, ainsi $\mathcal{B}_3$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

(c) On a $g\big(g^2(u)\big)=g^3(u)=0$, $g\big(g(u)\big)=g^2(u)$, et $g(u)=g(u)$ donc la matrice de g dans la base $\mathcal{B}_3$ est :
$$M_3=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

(d) Le calcul donne
$$N^2-N=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}=M_3.$$
Or M_3 et N sont semblables car elles représentent le même endomorphisme g dans des bases différentes. Ainsi N^2-N et N sont semblables.

(14) D'après la question précédente il existe une matrice U inversible telle que $N=U^{-1}(N^2-N)U$. En remarquant que $I_3=U^{-1}U$, on peut alors écrire
$$T=I_3+N=U^{-1}U+U^{-1}(N^2-N)U=U^{-1}(I_3+N^2-N)U\,.$$
Or d'après la question 12b), $T^{-1}=I_3+N^2-N$, donc $T=U^{-1}T^{-1}U$, autrement dit$T$ et T^{-1} sont semblables.

Exercice 2

Cet exercice est extrait du sujet **EML 2016**. La solution est proposé par mon collègue Sofiane Akkouche.

Partie I - Étude d'une variable aléatoire

(1) Pour tout $t\in\mathbb{R}$, on a bien sûr $-t\in\mathbb{R}$ (symétrie du domaine de définition) et
$$f(-t)=\frac{e^t}{(1+e^t)^2}=\frac{\frac{1}{e^{-t}}}{\left(1+\frac{1}{e^{-t}}\right)^2}=\frac{1}{e^{-t}}\frac{1}{\left(\frac{e^{-t}+1}{e^{-t}}\right)^2}=\frac{1}{e^{-t}}\frac{(e^{-t})^2}{(e^{-t}+1)^2}=\frac{e^{-t}}{(1+e^{-t})^2}$$
soit $f(-t)=f(t)$. Ainsi
$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ est paire.}}$$

(2) La fonction f est (clairement) positive et continue sur $\mathbb{R}$. Étudions la convergence de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ en commençant par celle de $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$. Soit $x>0$.

$$\int_0^x f(t)\,dt = \int_0^x \frac{e^{-t}}{(1+e^{-t})^2}\,dt = \int_0^x -\frac{-e^{-t}}{(1+e^{-t})^2}\,dt = \left[\frac{1}{1+e^{-t}}\right]_0^x = \frac{1}{1+e^{-x}} - \frac{1}{2}.$$

De $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} e^{-x}=0$ on déduit $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_0^x f(t)\,dt = \frac{1}{2}$ ce qui prouve que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ est convergente et vaut $\dfrac{1}{2}$. Comme f est paire, on en déduit que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ est convergente et vaut $2\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ soit $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = 1$. Toutes les conditions sont réunies pour conclure que

$$\boxed{f \text{ est une densité d'une variable aléatoire réelle.}}$$

(3) La fonction de répartition de X est donnée, pour tout x réel, par $F(x)=\displaystyle\int_{-\infty}^x f(t)\,dt$. Soit x un réel. Pour $y<x$ on a

$$\int_y^x f(t)\,dt = \left[\frac{1}{1+e^{-t}}\right]_y^x = \frac{1}{1+e^{-x}} - \frac{1}{1+e^{-y}}.$$

De $\displaystyle\lim_{y\to-\infty}\frac{1}{1+e^{-y}}=0$ on déduit $\displaystyle\int_{-\infty}^x f(t)\,dt = \frac{1}{1+e^{-x}}$. La fonction de répartition F est donc définie par

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\quad F(x)=\frac{1}{1+e^{-x}}.}$$

(4) (a) Nous avons $tf(t) = \frac{te^{-t}}{(1+e^{-t})^2}$. Montrons que $tf(t)$ est négligeable devant $\frac{1}{t^2}$ au voisinage de $+\infty$. Nous avons

$$\frac{tf(t)}{\frac{1}{t^2}} = \frac{t^3e^{-t}}{(1+e^{-t})^2}.$$

Par croissance comparée, $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} t^3e^{-t}=0$ ce qui donne $\displaystyle\lim_{t\to+\infty}\frac{tf(t)}{\frac{1}{t^2}}=0$. et prouve que $tf(t)$ est négligeable devant $\dfrac{1}{t^2}$ au voisinage de $+\infty$.

Les fonctions $t\mapsto tf(t)$ et $x\mapsto \dfrac{1}{t^2}$ sont continues et positives sur $[1,+\infty[$. De plus, $tf(t)$ est négligeable devant $\dfrac{1}{t^2}$ au voisinage de $+\infty$ et l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^2}\,dt$ est une intégrale de Riemann impropre en $+\infty$ convergente car d'exposant $\alpha=2>1$. On en déduit, à l'aide du critère de convergence par équivalence, que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,dt$ est elle aussi convergente.

L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 tf(t)\,dt$ est l'intégrale d'une fonction continue sur le segment $[0,1]$ (et ne pose donc pas de problème). Nous pouvons donc affirmer que

$$\boxed{\int_0^{+\infty} tf(t)\,dt \text{ est convergente.}}$$

(b) La fonction f étant paire, il est facile de s'assurer que la fonction $t\mapsto tf(t)$ est impaire. Cette imparité et la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} tf(t)\,dt$, induisent que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\,dt$ est convergente et égale à 0. Ainsi, X admet une espérance avec

$$\boxed{E(X) = 0.}$$

Partie II - Étude d'une autre variable aléatoire

(5) La fonction φ est dérivable sur $\mathbb{R}$, avec, pour tout x réel, $\varphi'(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$. La fonction φ' est strictement positive sur $\mathbb{R}$ et φ est strictement croissante.

Sur $\mathbb{R}$ la fonction φ est donc continue, strictement croissante avec (sans problème) $\lim\limits_{x\to-\infty} \varphi(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = +\infty$. On en déduit que

$$\boxed{\varphi \text{ est une bijection de } \mathbb{R} \text{ dans } I =]0, +\infty[.}$$

(6) Soit $y \in]0, +\infty[$ et $x \in \mathbb{R}$. En utilisant la bijectivité des fonctions exponentielle et logarithme, les égalités suivantes sont deux à deux équivalentes :

$$[y = \varphi(x)] \iff [y = \ln(1 + e^x)] \iff [e^y = 1 + e^x] \iff [e^y - 1 = e^x] \iff [x = \ln(e^y - 1)] .$$

Ceci prouve que

$$\boxed{\forall y \in]0, +\infty[, \quad \varphi^{-1}(y) = \ln(e^y - 1).}$$

(7) Nous avons $P(Y \leq 0) = P(\varphi(X) \leq 0)$. Comme φ est à valeurs dans $]0, +\infty[$, l'événement $(\varphi(X) \leq 0)$ est impossible. On en déduit

$$\boxed{P(Y \leq 0) = 0.}$$

(8) Notons G la fonction de répartition de Y. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $G(x) = P(Y \leq x)$. Comme toute fonction de répartition, G est à valeurs dans $[0, 1]$ et croissante. La question précédente a montré que $G(0) = 0$ d'où l'on déduit que pour tout $x \leq 0$ on a $G(x) = 0$. Soit $x > 0$.

$$G(x) = P(Y \leq x) = P(\varphi(X) \leq x) = P(X \leq \varphi^{-1}(x)) = F(\varphi^{-1}(x)) = F(\ln(e^x - 1)).$$

Or

$$F(\ln(e^x - 1)) = \frac{1}{1 + e^{-\ln(e^x-1)}} = \frac{1}{1 + e^{\ln\left(\frac{1}{e^x-1}\right)}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{e^x-1}} = \frac{1}{\frac{e^x-1+1}{e^x-1}} = \frac{e^x - 1}{e^x} = 1 - e^{-x}.$$

Finalement, la fonction de répartition de Y est définie par :

$$\boxed{G(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x} & \text{si } x > 0 \ ; \\ 0 & \text{si } x \leq 0. \end{cases}}$$

(9) La fonction G est la fonction de répartition de la loi exponentielle de paramètre 1. Ainsi la loi de Y est la loi exponentielle de paramètre 1; il suit que $E(Y) = 1$ et $V(Y) = 1$.

Partie III - Étude d'une convergence

(10) Notons H_n la fonction de répartition de T_n. Classiquement, pour tout x réel nous avons l'égalité

$$(T_n \leq x) = (X_1 \leq x) \cap (X_2 \leq x) \cap \ \cdots \ \cap (X_n < x),$$

et donc

$$H_n(x) = P(T_n \leq x) = P\left((X_1 \leq x) \cap (X_2 \leq x) \cap \ldots \cap (X_n \leq x)\right).$$

Par indépendance des X_i,

$$H_n(x) = P\left(X_1 \leq x\right) P\left(X_2 \leq x\right) \cdot \cdots \cdot P\left(X_n \leq x\right) = F(x) \cdot F(x) \cdot \cdots F(x) = (F(x))^n.$$

En reprenant l'expression de F il vient $H_n(x) = \left(\frac{1}{1+e^{-x}}\right)^n$ ou encore

$$\boxed{H_n(x) = \left(1 + e^{-x}\right)^{-n}.}$$

(11) Notons K_n la fonction de répartition de U_n. Soit x un réel.

$$K_n(x) = P\left(U_n \leq x\right) = P\left(T_n - \ln(n) \leq x\right) = P\left(T_n \leq x + \ln(n)\right) = H_n\left(x + \ln(n)\right).$$

En reportant dans l'expression de H_n il vient

$$K_n(x) = \left(1 + e^{-x-\ln(n)}\right)^{-n} = \left(1 + e^{-x}e^{-\ln(n)}\right)^{-n} = \left(1 + e^{-x}e^{\ln\left(\frac{1}{n}\right)}\right)^{-n}$$

soit

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad K_n(x) = P(U_n \leqslant x) = \left(1 + \frac{e^{-x}}{n}\right)^{-n}.}$$

(12) Étudions pour x fixé la limite quand n tend vers $+\infty$ de $K_n(x)$. Nous avons

$$\left(1 + \frac{e^{-x}}{n}\right)^{-n} = e^{-n\ln\left(1+\frac{e^{-x}}{n}\right)}$$

Comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{e^{-x}}{n} = 0$, avec l'équivalent $\ln\left(1+h\right) \underset{h\to 0}{\sim} h$ il vient

$$\ln\left(1 + \frac{e^{-x}}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{e^{-x}}{n}\right)$$

puis

$$-n\ln\left(1 + \frac{e^{-x}}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -n \cdot \left(\frac{e^{-x}}{n}\right) = -e^{-x}.$$

Nous avons donc $\lim_{n\to+\infty} -n\ln\left(1 + \frac{e^{-x}}{n}\right) = -e^{-x}$ et en composant par l'exponentielle on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lim_{n\to+\infty} K_n(x) = e^{-e^{-x}}.$$

(13) Il reste à savoir si la fonction K définie sur $\mathbb{R}$ par $K(x) = e^{-e^{-x}}$ est bien une fonction de répartition. On vérifie facilement que la fonction K est croissante, continue et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ avec $\lim_{x\to-\infty} K(x) = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} K(x) = 1$. Ceci prouve que K est la fonction de répartition d'une variable à densité. Une densité est donnée par

$$x \mapsto e^{-x}e^{-e^{-x}}.$$

Exercice 3

Cet exercice est inspiré par un vieux sujet **ESCP 1996**, complètement remanié.

Une urne contient des boules blanches (en proportion p), des boules noires (en proportion q) et des boules rouges (en proportion r). On a donc $p + q + r = 1$ (on suppose que $p, q, r \in]0;1[$). On effectue des tirages successifs **avec remise** dans cette urne. Pour $i \in \mathbb{N}^*$, on note T_i la variable qui vaut 1 si la $i-$ème boule tirée est blanche, -1 si elle est noire et 0 si elle est rouge.
Les tirages étant effectués avec remise, les variables (T_i) sont donc mutuellement indépendantes.

Partie A

On note ensuite X_1 la variable aléatoire égale au numéro du tirage qui amène pour la première fois une boule blanche et X_2 celui correspondant au tirage où sort pour la première fois la **deuxième** boule blanche.

Par exemple, si les premiers tirages donnent *Noire, Rouge, Noire, Blanche, Rouge, Blanche, ...*, on a $X_1 = 4$ et $X_2 = 6$.

(1) Par définition, $T_i(\Omega) = \{-1, 0, 1\}$. Plus précisément, on peut écrire la loi de T_i sous forme de tableau

a	-1	0	1
$P(T_i = a)$	q	r	p

Le tableau permet de calculer sans mal espérance et variance.

$$E(T_i) = (-1)q + 0 \cdot r + p = p - q$$

$$\begin{aligned} E(T_i^2) &= (-1)^2 q + 0^2 r + p \\ &= p + q \\ V(T_i) &= E(T_i^2) - E(T_i)^2 \\ &= p + q - (p-q)^2 \end{aligned}$$

(2) Identifiant l'obtention d'une boule blanche à un *succès*, on reconnait pour X_1 le temps d'attente du premier succès lors de la répétition d'épreuves indépendantes de Bernoulli. On reconnait donc une loi géométrique de paramètre p

$$X_1 \hookrightarrow \mathcal{G}(p).$$

D'après le cours, on peut immédiatement affirmer que

$$E(X_1) = \frac{1}{p}, \qquad V(X_1) = \frac{(1-p)}{p^2}.$$

(3) Les variables X_1 et X_2 qu'on cherche à simuler ne dépendent que de la proportion de boules blanches p.

```
function [X1, X2]=exo3(p)
    X1=1 //il faut au moins un lancer
    while rand( ) > p //tant qu'on a pas de boule blanche
        X1=X1+1 // on relance
    end
    X2=X1+1 // au moins un lancer de plus pour la deuxième blanche
    while rand( ) > p
        X2=X2+1
    end
endfunction
```

(4) (a) Pour le calcul, on utilise la modélisation suivante, $[T_k = 1]$ représente l'obtention d'une boule blanche au $k-$ième lancer. Ainsi, pour $i \in \mathbb{N}^*$ et $j \geq i+1$, et par indépendance des lancers (donc des variables (T_k)),

$$\begin{aligned} P(X_1 = i \cap X_2 = j) &= P\left(\left(\bigcap_{k=1}^{i-1} [T_k \neq 1]\right) \cap [T_i = 1] \cap \left(\bigcap_{k=i+1}^{j-1} [T_k \neq 1]\right) \cap [T_j = 1]\right) \\ &= \left(\prod_{k=1}^{i-1} P(T_k \neq 1)\right) \times P(T_i = 1) \times \left(\prod_{k=i+1}^{j-1} P(T_k \neq 1)\right) \times P(T_j = 1) \\ &= (1-p)^{i-1} \times p \times (1-p)^{j-1-i} \times p \\ &= (1-p)^{j-2} p^2 \end{aligned}$$

Si $j \leq i$, alors $P(X_1 = i \cap X_2 = j) = 0$ (la deuxième boule blanche arrive nécessairement *après* la première). Au final, on peut écrire

$$P(X_1 = i \cap X_2 = j) = \begin{cases} (1-p)^{j-2} p^2, & \text{si } j \geq i+1 \\ 0, & \text{si } j \leq i \end{cases}$$

(b) Par la formule des probabilités totales appliquée au s.c.e $\{(X_1 = i) : \ i \in \mathbb{N}^*\}$, on a, pour $j \in \mathbb{N}, j \geq 2$,

$$\begin{aligned} P(X_2 = j) &= \sum_{i=1}^{+\infty} P(X_1 = i \cap X_2 = j) \\ &= \sum_{i=1}^{j-2} P(X_1 = i \cap X_2 = j) \qquad (\text{car } P(X_1 = i \cap X_2 = j) = 0 \text{ si } i \geq j) \\ &= \sum_{i=1}^{j-2} (1-p)^{j-1} p^2 \\ &= (j-1)(1-p)^{j-2} p^2. \end{aligned}$$

(c) D'après le cours

$$\begin{aligned} X_2 \text{ admet une espérance} \quad &\Longleftrightarrow \quad \sum jP(X_2 = j) \text{ converge absolument} \\ &\Longleftrightarrow \quad \sum j(j-1)(1-p)^{j-2}p^2 \text{ converge} \end{aligned}$$

Or,

$$j(j-1)(1-p)^{j-1}p^2 = p^2 j(j-1)(1-p)^{j-2}$$

et on reconnait le multiple du terme général de la série géométrique (de raison $1-p$) dérivée deux fois et convergente. Donc X_2 admet une espérance et

$$E(X_2) = p^2 \sum_{j=2}^{+\infty} j(j-1)(1-p)^{j-2} = p^2 \times \frac{2}{(1-(1-p))^3} = \frac{2}{p}.$$

(5) On note $U_2 = X_2 - X_1$.

(a) Soit $j \in \mathbb{N}^*$. C'est encore la formule des probabilités totales appliquée au même s.c.e que précédemment.

$$\begin{aligned} P(U_2 = j) &= \sum_{i=1}^{+\infty} P(U_2 = j \cap X_1 = i) \\ &= \sum_{i=1}^{+\infty} P(X_2 = j + i \cap X_1 = i) \\ &= \sum_{i=1}^{+\infty} (1-p)^{i+j-2} p^2 \\ &= (1-p)^{j-1} p^2 \sum_{i=1}^{+\infty} (1-p)^{i-1} \\ &= (1-p)^{j-1} p^2 \times \frac{1}{1-(1-p)} \\ &= (1-p)^{j-1} p \\ &= P(X_1 = j) \end{aligned}$$

Ainsi U_2 et X_1 suivent toutes deux une loi géométrique de paramètre p. On en déduit que U_2 admet espérance et variance et que

$$E(U_2) = \frac{1}{p}, \qquad V(U_2) = \frac{(1-p)}{p^2}.$$

(b) On vérifie la condition définissant l'indépendance. Soient $i, j \in \mathbb{N}^* times \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned} P(X_1 = i \cap U_2 = j) &= P(X_1 = i \cap X_2 - X_1 = j) = P(X_1 = i \cap X_2 = i + j) \\ &= (1-p)^{i+j-2}p^2 \\ &= (1-p)^{i-1}p \times (1-p)^{j-1}p \\ &= P(X_1 = i)P(U_2 = j) \end{aligned}$$

et les variables X_1 et U_2 sont bien indépendantes.

(c) Le programme simule 10000 fois les variables X_1 et X_2 puis calcule la *covariance empirique* de X_1 et U_2. Les deux variables en question étant indépendantes, cette covariance est nulle. Le programme devrait afficher 0.

(d) Il est clair que $X_2 = X_1 + U_2$. Comme X_1 et U_2 admettent toutes deux une variance et qu'elles sont indépendantes, on peut alors écrire que

$$V(X_2) = V(X_1) + V(U_2) = 2V(X_1) = \frac{2(1-p)}{p^2}.$$

(e) On développe $V(U_2)$.

$$\begin{aligned} V(U_2) &= V(X_2 - X_1) \\ &= V(X_2) + V(X_1) - 2\mathrm{cov}(X_1, X_2) \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathrm{cov}(X_1, X_2) &= \frac{1}{2}(V(X_2) + V(X_1) - V(U_2)) \\ &= \frac{1-p}{p^2} \end{aligned}$$

Cette covariance étant non nulle, on en conclut que les variables X_1 et X_2 ne sont pas indépendantes.

Partie B

On note W la variable correspondant au nombre de boules rouges obtenues avant l'obtention de la première boule blanche.

(6) Soit $i \in \mathbb{N}^*$. Sachant $[X_1 = i]$, la première boule blanche arrive au $n-$ième tirage. Il y a donc $i - 1$ tirages avec une boule rouge ou noire qui précèdent. Pour chacun de ces $n - 1$ tirages, on obtient une rouge ou une blanche. On compte le nombre de rouges obtenues. Sachant qu'on obtient pas de blanche, la probabilité d'obtenir une rouge à chaque tentative est

$$\frac{r}{q+r}.$$

On peut donc affirmer que, sachant $[X_1 = i]$, $W \hookrightarrow \mathcal{B}\left(i-1, \frac{r}{q+r}\right)$, ou encore

$$P_{[X_1=i]}(W = k) = \begin{cases} \binom{i-1}{k}\left(\frac{r}{q+r}\right)^k \left(\frac{q}{q+r}\right)^{i-1-k}, & \text{si } 0 \leq k \leq i-1 \\ 0, & \text{si } k \geq i. \end{cases}$$

(7) Par la formule des probabilités totales, appliquée au s.c.e $\{(X_1 = i) : \ i \in \mathbb{N}^*\}$,

$$\begin{aligned}
P(W = k) &= \sum_{i=1}^{+\infty} P(X_1 = i) P_{[X_1=i]}(W = k) \\
&= \sum_{i=k+1}^{+\infty} P(X_1 = i) P_{[X_1=i]}(W = k) \\
&= \sum_{i=k+1}^{+\infty} \binom{i-1}{k} \left(\frac{r}{q+r}\right)^k \left(\frac{q}{q+r}\right)^{i-1-k} (1-p)^{i-1} p \\
&= p \left(\frac{r}{q+r}\right)^k \sum_{i=k+1}^{+\infty} \binom{i-1}{k} \left(\frac{q}{q+r}\right)^{i-1-k} (1-p)^{i-1}
\end{aligned}$$

(8) C'est un calcul facile que l'on a fait plusieurs fois.

$$k\binom{i}{k} = k \times \frac{i!}{(i-k)!k!} = \frac{i(i-1)}{(k-1)!(i-1-(k-1))!} = i\binom{i-1}{k-1}.$$

(9) On admet qu'il est licite de permuter les sommes

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{i=k+1}^{+\infty} \cdots = \sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{k=0}^{i-1} \cdots ,$$

et que W admet une espérance. Il suit que

$$\begin{aligned}
E(W) &= \sum_{k=0}^{+\infty} kP(W = k) = \sum_{k=1}^{+\infty} kP(W = k) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{i=k+1}^{+\infty} \binom{i-1}{k} kp \left(\frac{r}{q+r}\right)^k \left(\frac{q}{q+r}\right)^{i-1-k} (1-p)^{i-1} \\
&= \sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{k=0}^{i-1} \binom{i-1}{k} kp \left(\frac{r}{q+r}\right)^k \left(\frac{q}{q+r}\right)^{i-1-k} (1-p)^{i-1} \\
&= p \sum_{i=1}^{+\infty} (1-p)^{i-1} \sum_{k=1}^{i-1} k\binom{i-1}{k} \left(\frac{r}{q+r}\right)^k \left(\frac{q}{q+r}\right)^{i-1-k} \\
&= p \sum_{i=1}^{+\infty} (1-p)^{i-1} (i-1) \sum_{k=1}^{i-1} \binom{i-2}{k-1} \left(\frac{r}{q+r}\right)^k \left(\frac{q}{q+r}\right)^{i-1-k} \\
&= p \left(\frac{r}{q+r}\right) \sum_{i=1}^{+\infty} (i-1)(1-p)^{i-1} \sum_{\ell=0}^{i-2} \binom{i-2}{\ell} \left(\frac{r}{q+r}\right)^\ell \left(\frac{q}{q+r}\right)^{i-2-\ell} \\
&= p \left(\frac{r}{q+r}\right) \sum_{i=1}^{+\infty} (i-1)(1-p)^{i-1} \qquad \text{(par la formule du binôme)} \\
&= p(1-p) \left(\frac{r}{q+r}\right) \sum_{s=1}^{+\infty} s(1-p)^{s-1} \\
&= p(1-p) \left(\frac{r}{q+r}\right) \times \frac{1}{1-(1-p))^2} \\
&= \frac{(1-p)r}{(q+r)p} = \frac{r}{p}.
\end{aligned}$$

Partie C

On note, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = T_1 + ... + T_n$.

(10) En observant que $S_1 = T_1$, la toute première question de la Partie A permet de voir que $E(S_1) = p - q$ et $V(S_1) = p + q - (p-q)^2$.

(11) Par linéarité de l'espérance, on a

$$E(S_n) = \sum_{i=1}^{n} E(T_i) = n(p-q).$$

Par **indépendance** des variables T_i, on a

$$V(S_n) = \sum_{i=1}^{n} V(T_i) = n\left(p + q - (p-q)^2\right).$$

(12) Soit $t > 0$. On pose $V_n = t^{S_n}$.

(a) Par définition $V_1 = t^{T_1}$. On peut donc écrire le tableau de la loi de T_1:

a	$1/t$	1	t
$P(V_1 = a)$	q	r	p

Il suit que

$$E(V_1) = \frac{1}{t} \times q + r + t \times p = \frac{q + rt + t^2}{t}.$$

(b) On observe que

$$\begin{aligned} E(V_n) &= E(t^{S_n}) = E\left(\prod_{i=1}^{n} t^{T_i}\right) \\ &= \prod_{i=1}^{n} E\left(t^{T_i}\right) \end{aligned}$$

par indépendance des variables t^{T_i} par le **lemme des coalitions**. Comme les variables t^{T_i} ont toutes la même espérance, il suit que

$$E(V_n) = E(V_1)^n = \left(\frac{q + rt + t^2}{t}\right)^n.$$