ECE 2 - Année 2020-2021
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Concours Blanc n°3 - Sujet B

Lundi 7 Décembre
Durée : 4 heures

Exercice 1

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et X, Y, Z trois variables aléatoires mutuellement indépendantes de même loi $\mathcal{U}(\llbracket 1; n \rrbracket)$.

(1) (a) Donner la loi conjointe du couple (X, Y).
(b) Montrer que, pour tout $k \in \llbracket 2; n+1 \rrbracket$,
$$P(X+Y=k) = \frac{k-1}{n^2}.$$
(c) Montrer que, pour tout $k \in \llbracket n+2; 2n \rrbracket$,
$$P(X+Y=k) = \frac{2n-k+1}{n^2}.$$
(2) Utiliser la formule des probabilités totales pour montrer que
$$P(X+Y=Z) = \frac{n-1}{2n^2}$$
(3) On introduit la variable aléatoire $T = n+1-Z$.

(a) Que peut-on dire de $\operatorname{cov}(Z, T)$?
(b) Montrer que T suit la loi uniforme $\mathcal{U}(\llbracket 1; n \rrbracket)$.
(c) Justifier que T est indépendante de Y et de X.
(d) Déterminer la valeur de $P(X+Y+Z=n+1)$.

Exercice 2

Dans tout l'exercice, on considère la suite (u_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

(1) (a) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \geq \frac{1}{k+1}$.

(b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $u_n \leq 1 + \ln(n)$.

(2) Montrer que la fonction φ_1 définie ci-dessous est continue $\mathbb{R}_+$, où

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} x(1+\ln(x)), & \text{si } x > 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

(3) On introduit maintenant une suite de fonctions. Plus précisément, Pour tout réel $x \in \mathbb{R}_+$ et pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on poste

$$\varphi_{n+1}(x) = \int_0^x \varphi_n(t)\mathrm{d}t$$

(a) Montrer, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$, que la fonction fonction φ_n est parfaitement définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.
Préciser la valeur de $\varphi_n(0)$.

(b) Montrer, par récurrence sur $\mathbb{N}^*$ et à l'aide d'une intégration par parties scrupuleusement effectuée et rédigée, qu'il existe des suites (a_n) et (b_n) qui vérifient

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad \varphi_n(x) = x^n(a_n + b_n \ln(x)).$$

On montrera notamment que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad a_{n+1} = \frac{a_n}{n+1} - \frac{b_n}{(n+1)^2}, \quad \text{et} \quad b_{n+1} = \frac{b_n}{n+1}.$$

(c) Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la formule ci-dessous reste valide pour $x = 0$.

(4) Compléter le programme `SciLab` suivant pour qu'il calcule et affiche les termes a_n et b_n, où n est rentré par l'utilisateur

```
n=input('n=?')
a=................
b=................
for k=2:n
    ...................
    ...................
end
disp(a)
disp(b)
```

(5) Expliciter, pour $n \in \mathbb{N}^*$, b_n en fonction de n.

(6) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $c_n = n! \times a_n$

(a) Montrer que $c_n = 2 - u_n$.
(b) En déduire que, pour tout entier $n \geq 2$, on a $|c_n| \leq 1 + \ln(n)$.
(c) Conclure que $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 0$.
(d) Montrer enfin que la série de terme général a_n est absolument convergente.

Exercice 3

On considère les fonctions e_1, e_2, e_3 et e_4 définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$e_1(x) = x, \quad e_2(x) = x^2, \quad e_3(x) = x\ln(x) \quad \text{et} \quad e_4(x) = x^2\ln(x)$$

et on note E l'espace vectoriel engendré par e_1, e_2, e_3 et e_4

$$E = \mathrm{Vect}(e_1, e_2, e_3, e_4).$$

Ainsi, E est un espace vectoriel dont les vecteurs sont des fonctions définies sur $\mathbb{R}_+^*$, son vecteur nul 0_E est la fonction identiquement nulle sur $\mathbb{R}_+^*$.

(1) Le but de cette question est de montrer que la famille (e_1, e_2, e_3, e_4) est libre. Pour cela, on considère quatre réels a, b, c et d tels que

$$ae_1 + be_2 + ce_3 + de_4 = 0_E,$$

c'est à dire que, **pour tout** $x \in \mathbb{R}$,

$$ax + bx^2 + cx\ln(x) + dx^2\ln(x) = 0 \qquad (\star)$$

(a) Avec un choix judicieux de x dans la relation $(\star)$, montrer que $a + b = 0$.
(b) Établir que, pour tout $x > 1$,

$$\frac{a}{x\ln(x)} + \frac{b}{\ln(x)} + \frac{c}{x} + d = 0.$$

En déduire que $d = 0$.
(c) Utiliser le même type de raisonnement pour montrer que $b = 0$.
(d) Montrer finalement que $a = b = c = d = 0$.

(2) Expliciter une base et préciser la dimension de E.

(3) On note u l'application qui à toute fonction f de E associe la fonction $g = u(f)$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad g(x) = u(f)(x) = xf'(x).$$

(a) Montrer que u est une application linéaire.
(b) Déterminer $u(e_1), u(e_2), u(e_3)$ et $u(e_4)$.
(c) En déduire que u est un endomorphisme de E.

(4) (a) Donner la matrice A de u dans la base (e_1, e_2, e_3, e_4).
(b) Montrer que u est un automorphisme de E.
(c) Montrer que

$$\dim(\mathrm{Ker}(A - I)) = \dim(\mathrm{Ker}(A - 2I)) = 1.$$

(5) En écrivant $A = D + N$ où D est une matrice diagonale et N une matrice telle que $N^2 = 0$, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & n & 0 \\ 0 & 2^n & 0 & n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}.$$

Problème

Partie 1 : étude de quelques propriétés d'une variable aléatoire

Dans cette exercice, θ désigne un réel élément de $\left]0, \frac{1}{2}\right[$. On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\theta x^{1+\frac{1}{\theta}}}, & \text{si } x \geqslant 1 \\ 0, & \text{si } x < 1 \end{cases}.$$

(1) Montrer que f peut être considérée comme une densité.

On considère dans la suite une variable aléatoire X de densité f et on note F sa fonction de répartition.

(2) Montrer que X possède une espérance et une variance et les déterminer.
(3) Déterminer, pour tout réel x, l'expression de $F(x)$ en fonction de x et θ.

(4) (a) Montrer que l'équation $F(x) = \dfrac{1}{2}$ possède une seule solution, notée M_e, que l'on déterminera.
(b) Montrer que

$$\forall x \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \qquad 2^x(1-x) \leqslant 1.$$

(c) Comparer $E(X)$ et M_e.

(5) Soit a un réel supérieur ou égal à 1 et b un réel strictement positif.

(a) Montrer que $P_{(X>a)}(X > a+b) = \left(\dfrac{a}{a+b}\right)^{1/\theta}$.
(b) Déterminer la limite de cette quantité lorsque a tend vers $+\infty$. Interpréter cette dernière valeur si l'on admet que la variable X représente la durée de vie d'un certain appareil.

Partie 2 : simulation de X

(6) On pose $Y = \ln(X)$ et on admet que Y est une variable aléatoire définie sur le même espace probabilisé que X. On note G sa fonction de répartition.

(a) Pour tout réel x, exprimer $G(x)$ à l'aide de la fonction F.
(b) En déduire que Y suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.

(7) On rappelle qu'en `SciLab`, la commande `grand(1,1,'exp',1/lambda)` simule une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ. Écrire des commandes `SciLab` utilisant `grand` et permettant de simuler X.

Partie 3 : estimation de θ

On suppose dans la suite que le paramètre θ est inconnu et on considère n variables aléatoires $Y_1, \ldots, Y_n$ toutes définies sur le même espace probabilisé, mutuellement indépendantes, et suivant toutes la même loi que Y.

(8) On pose $T_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} Y_k$.

(a) Expliciter l'espérance de T_n.
(b) Calculer ensuite $V(T_n)$.

On **admet**[1] ici que

$$\forall \varepsilon > 0, \qquad P\left(|T_n - E(T_n)| > \varepsilon\right) \leq \frac{V(T_n)}{\varepsilon^2}.$$

(9) Montrer alors que

$$\forall \varepsilon > 0, \qquad \lim_{n\to+\infty} P\left(|T_n - \theta| > \varepsilon\right) = 0.$$

Interpréter ce résultat.

[1]Il s'agit de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, au programme du Chapitre 11