ECE 2 - Année 2020-2021
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Concours Blanc n°3 - Sujet B

Lundi 7 Décembre
Solution

Exercice 1

Cet exercice provient du sujet **EDHEC 1999**.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et X, Y, Z trois variables aléatoires mutuellement indépendantes de même loi $\mathcal{U}(\llbracket 1; n \rrbracket)$.

(1) (a) Les variables X et Y étant supposées indépendantes,

$$\forall (i,j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2, \qquad P(X = i \cap Y = j) = P(X = i)P(Y = j) = \frac{1}{n} \times \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2}.$$

(b) Soit $k \in \llbracket 2; n+1 \rrbracket$. D'après la formule des probabilités totales appliquée au s.c.e. $\{[X = i] : i \in \llbracket 1; n \rrbracket\}$,

$$\begin{aligned} P(X+Y=k) &= \sum_{i=1}^{n} P(X+Y=k \cap X=i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} P(Y=k-i \cap X=i) \end{aligned}$$

Or,

$$k - i \in \llbracket 1; n \rrbracket \Longleftrightarrow k-n \leq i \leq k-1 \Longleftrightarrow 1 \leq i \leq k-1$$

Car $k - n \leq 1$. Ainsi,

$$P(X+Y=k) = \sum_{i=1}^{k-1} P(Y=k-i \cap X=i) = \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{n^2} = \frac{k-1}{n^2}.$$

(c) Par ailleurs, soit $k \in \llbracket n+2; 2n \rrbracket$. Avec la même méthode,

$$\begin{aligned} P(X+Y=k) &= \sum_{i=1}^{n} P(X+Y=k \cap X=i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} P(Y=k-i \cap X=i) \end{aligned}$$

Mais,

$$k - i \in \llbracket 1; n \rrbracket \Longleftrightarrow k-n \leq i \leq k-1 \Longleftrightarrow k-n \leq i \leq n$$

car ici $k-1 \geq n+1$ et $2 \leq k-n \leq n$. Donc

$$P(X+Y=k) = \sum_{i=k-n}^{n} P(Y=k-i \cap X=i) = \sum_{i=k-n}^{n} \frac{1}{n^2} = \frac{2n-k+1}{n^2}.$$

(2) Encore la formule des probabilités totales mais cette fois avec le s.c.e $\{[Z=k] : k \in [\![1;n]\!]\}$. Par le lemme des coalitions, Z et $X+Y$ sont indépendantes.

$$\begin{aligned}
P(X+Y=Z) &= \sum_{k=1}^{n} P(X+Y=Z \cap Z=k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} P(X+Y=k \cap Z=k) \\
&= \sum_{k=2}^{n} P(X+Y=k)P(Z=k) \qquad \text{(par indépendance)} \\
&= \sum_{k=2}^{n} \frac{k-1}{n^2} \times \frac{1}{n} \\
&= \frac{1}{n^3} \sum_{j=1}^{n-1} j \\
&= \frac{(n-1)n}{2n^3} \\
&= \frac{n-1}{2n^2},
\end{aligned}$$

ce qui est bien le résultat attendu.

(3) On introduit la variable aléatoire $T = n+1-Z$.

(a) T est fonction affine décroissante de Z. On sait que le coefficient de corrélation linéaire est alors égal à -1, ou encore

$$\frac{\operatorname{cov}(Z,T)}{\sqrt{V(Z)V(T)}} = -1.$$

Or, $V(Z) = V(T) = 1/12$. Donc, on peut conclure que

$$\operatorname{cov}(Z,T) = -\frac{1}{12}.$$

(b) Soit $k \in [\![1;n]\!]$, alors $n+1-k \in [\![1,n]\!]$. Ainsi,

$$P(T=k) = P(n+1-Z=k) = P(Z=n+1-k) = \frac{1}{n}$$

et on peut donc affirmer que T suit la loi uniforme $\mathcal{U}([\![1;n]\!])$.

(c) Légère coquille dans le sujet initial. T n'est pas indépendante de Z (voir la covariance non nulle ci-dessus), mais en revanche, par le lemme des coalitions, T est indépendante de X et de Y.

(d) On utilise ce qui précède, notamment que, T suivant la même loi que Z et étant indépendante de X et Y, on a

$$P(X+Y=T) = \frac{n-1}{2n^2}.$$

Ainsi,

$$P(X+Y+Z=n+1) = P(X+Y=n+1-Z) = P(X+Y=T) = \frac{n-1}{2n^2}.$$

Exercice 2

Dans tout l'exercice, on considère la suite (u_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

(1) (a) C'est une question classique déjà rencontrée. Par décroissance de la fonction $t \mapsto 1/t$ sur $[k; k+1]$, on a

$$\forall t \in [k; k+1], \qquad \frac{1}{t} \geq \frac{1}{k+1}$$

puis, par croissance de l'intégrale,

$$\int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \geq \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{k+1} = \frac{1}{k+1}.$$

(b) On somme la relation précédente pour k allant de 1 à $n-1$, puis on fait un changement d'indice et on utilise la relation de Chasles. Plus précisément,

$$\begin{aligned} \int_1^n \frac{\mathrm{d}t}{t} &= \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \geq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \\ &\geq \sum_{j=2}^{n} \frac{1}{j} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} - 1 \\ &\geq u_n - 1 \end{aligned}$$

On encore

$$\ln(n) = \int_1^n \frac{\mathrm{d}t}{t} \geq u_n - 1 \Longleftrightarrow u_n \leq 1 + \ln(n).$$

(2) Sur $\mathbb{R}_+^*$, φ_1 est produit de fonctions usuelles continues donc continue. En 0, un résultat de croissance comparée permet de voir que

$$\lim_{x \to 0^+} \varphi_1(x) = \lim_{x \to 0^+} x \ln(x) = 0 = \varphi_1(0)$$

et donc φ_1 est continue sur $\mathbb{R}_+$.

(3) On introduit maintenant une suite de fonctions. Plus précisément, Pour tout réel $x \in \mathbb{R}_+$ et pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on poste

$$\varphi_{n+1}(x) = \int_0^x \varphi_n(t)\mathrm{d}t$$

(a) Comme demandé, on procède par récurrence.

- <u>initialisation</u>. Pour $n = 1$, on sait que φ_1 est bien définie et continue sur $\mathbb{R}_+$ et que $\varphi_1(0) = 0$.

- <u>hérédité</u>. Supposons que, pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$, φ_n soit bien définie et continue sur $\mathbb{R}_+$. Par le théorème fondamental de l'analyse, la fonction

$$\varphi_{n+1} : x \mapsto \int_0^x \varphi_n(t)\mathrm{d}t$$

est alors bien définie comme **la** primitive de φ_n qui s'annule en 0. À ce titre, elle est elle-même de classe $\mathcal{C}^1$ et donc continue sur $\mathbb{R}_+$ et on peut même affirmer que $\varphi_{n+1}(0) = 0$.

(b) C'est alors une autre récurrence.

- initialisation. Pour $n = 1$, on sait que, pour $x > 0$
$$\varphi_1(x) = x\,(1 + \ln(x))\,,$$
ainsi la propriété est vérifiée avec
$$a_1 = 1, \quad \text{et} \quad b_1 = 1.$$
- hérédité. Supposons que, pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$, on ait l'existence d'un couple de réel $(a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2$ tels que
$$\forall x > 0, \qquad \varphi_n(x) = x^n(a_n + b_n \ln(x)).$$
On va faire une intégration par parties pour déterminer une primitive de φ_{n+1}. Mais attention, l'intégrale est (faussement) impropre en 1. Soit donc $\varepsilon > 0$. On pose
$$\left\{\begin{array}{rcl} u'(t) & = & t^n \\ v(t) & = & a_n + b_n \ln(t) \end{array}\right. \rightsquigarrow \left\{\begin{array}{rcl} u(t) & = & \frac{t^{n+1}}{n+1} \\ v'(t) & = & \frac{b_n}{t} \end{array}\right.$$
Les fonctions u et v sont toutes deux de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\varepsilon; x]$, rendant l'intégration par parties licites. Ce qui permet d'écrire

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\int_\varepsilon^x \varphi_n(t)\mathrm{d}t & = & \displaystyle\left[\frac{t^{n+1}(a_n + b_n\ln(t))}{n+1}\right]_\varepsilon^x - \int_\varepsilon^x \frac{b_n t^n}{n+1}\mathrm{d}t \\ & = & \displaystyle x^{n+1}\left(\frac{a_n}{n+1} + \frac{b_n}{n+1}\ln(x)\right) - \varepsilon^n\left(\frac{a_n}{n+1} + \frac{b_n}{n+1}\ln(\varepsilon)\right) - \frac{b_n}{n+1}\left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_\varepsilon^x \\ & \downarrow & \\ \varphi_{n+1}(x) & = & \displaystyle x^{n+1}\left(\frac{a_n}{n+1} + \frac{b_n}{n+1}\ln(x) - \frac{b_n}{(n+1)^2}\right) \end{array}$$

En posant,
$$a_{n+1} = \frac{a_{n+1}}{n+1} - \frac{b_n}{(n+1)^2}, \qquad b_{n+1} = \frac{b_n}{n+1},$$
on a bien
$$\varphi_{n+1}(x) = x^{n+1}(a_{n+1} + b_{n+1}\ln(x)),$$
ce qui termine la récurrence.

(c) Par croissance comparée,
$$\lim_{x\to 0^+} x^n(a_n + b_n\ln(x)) = \lim_{x\to 0^+} x^n \ln(x) = 0 = \varphi_n(0),$$
et donc la formule reste valide.

(4) Il suffit d'initialiser avec les valeurs de a_1 et b_1 et d'implémenter les relations de récurrence, en faisant attention

```
n=input('n=?')
a=1
b=1
for k=2:n
    a=a/k-b/(k^2) //car a_k=a_{k-1}/k-b_{k-1}/k^2
    b=b/k
end
disp(a)
disp(b)
```

(5) On sait que $b_1 = 1$ et $b_2 = b_1/2 = 1/2$, $b_3 = b_2/3 = 1/6$, etc... Une récurrence immédiate donne
$$b_n = \frac{1}{n!}.$$

(6) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $c_n = n! \times a_n$

(a) On procède par récurrence.

- initialisation. Pour $n = 1$, $c_1 = a_1 = 1 = 2 - 1 = 2 - u_1$ et la relation est vérifiée.

- hérédité. Supposons que, pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$, on ait $c_n = 2 - u_n$. Il suit que
$$\begin{aligned} c_{n+1} &= (n+1)!a_{n+1} = (n+1)!\left(\frac{a_n}{n+1} - \frac{b_n}{(n+1)^2}\right) \\ &= n!a_n - (n+1)! \times \frac{1}{n!} \times \frac{1}{(n+1)^2} \\ &= c_n - \frac{1}{n+1} \\ &= 2 - u_n - \frac{1}{n+1} \qquad \text{(par HR)} \\ &= 2 - u_{n+1}, \end{aligned}$$
ce qui est bien la formule au rang $n+1$ et termine la récurrence.

(b) D'après la première question de l'exercice, $u_n \geq 1 + \ln(n)$. Il suit que
$$c_n = 2 - u_n \leq 2 - (1 + \ln(n)) = 1 - \ln(n).$$
Par inégalité triangulaire, pour $n \geq 2$,
$$|c_n| \leq |1 - \ln(n)| \leq 1 + |\ln(n)| = 1 + \ln(n).$$

(c) Par la question précédente, on a
$$0 \leq |a_n| = \frac{|c_n|}{n!} \leq \frac{1}{n!} + \frac{\ln(n)}{n!} \leq \frac{1}{n} + \frac{\ln(n)}{n}$$
Par croissance comparée, le terme de droite de cet encadrement tend vers 0. Par le théorème des gendarmes c'est donc le cas pour $|a_n|$ et donc (encore par application du théorème des gendarmes) pour a_n.

(d) En reprenant les éléments de l'encadrement précédent, on a par exemple, pour $n > 2$,
$$0 \leq n^2|a_n| \leq \frac{n^2}{n!} + \frac{n^2\ln(n)}{n!} = \frac{n}{(n-1)!} + \frac{n\ln(n)}{(n-1)!} \sim \frac{1}{(n-3)!} \longrightarrow 0$$
Ainsi, $|a_n| = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, $n \to +\infty$. Par critère de comparaison (pour les séries à termes positifs), par négligeabilité, avec une série de Riemann convergence, on peut donc affirmer que la série de terme général $|a_n|$ converge absolument (et donc qu'elle converge).

Exercice 3

On considère les fonctions e_1, e_2, e_3 et e_4 définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par
$$e_1(x) = x, \quad e_2(x) = x^2, \quad e_3(x) = x\ln(x) \quad \text{et} \quad e_4(x) = x^2\ln(x)$$
et on note E l'espace vectoriel engendré par e_1, e_2, e_3 et e_4
$$E = \text{Vect}(e_1, e_2, e_3, e_4).$$

Ainsi, E est un espace vectoriel dont les vecteurs sont des fonctions définies sur $\mathbb{R}_+^*$, son vecteur nul 0_E est la fonction identiquement nulle sur $\mathbb{R}_+^*$.

(1) Le but de cette question est de montrer que la famille (e_1, e_2, e_3, e_4) est libre. Pour cela, on considère quatre réels a, b, c et d tels que

$$ae_1 + be_2 + ce_3 + de_4 = 0_E,$$

c'est à dire que, **pour tout** $x \in \mathbb{R}$,

$$ax + bx^2 + cx\ln(x) + dx^2\ln(x) = 0 \qquad (\star)$$

(a) En choisissant $x = 1$ dans la relation $(\star)$, on fait disparaître les log et il reste $a + b = 0$.

(b) Soit $x > 1$. En divisant dans la relation $(\star)$ par $x^2\ln(x)$ (qui est une quantité strictement positive), on a bien

$$\frac{a}{x\ln(x)} + \frac{b}{\ln(x)} + \frac{c}{x} + d = 0.$$

En faisant tendre $x \to +\infty$, un résultat de croissance comparée permet de voir que

$$d \underset{x\to+\infty}{\longleftarrow} \frac{a}{x\ln(x)} + \frac{b}{\ln(x)} + \frac{c}{x} + d = 0.$$

(c) La relation $(\star)$ est donc devenue

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad ax + bx^2 + cx\ln(x)$$

en la divisant, pour $x > 1$, par x^2 (de sorte à isoler b), on obtient,

$$\forall x > 1, \qquad \frac{a}{x} + b + c\frac{\ln(x)}{x} = 0.$$

En passant à la limite lorsque $x \to +\infty$ et par croissance comparée

$$b \underset{x\to+\infty}{\longleftarrow} \frac{a}{x} + b + c\frac{\ln(x)}{x} = 0.$$

(d) Comme $a = -b = 0$ et $d = 0$. Il reste

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad cx\ln(x) = 0.$$

En prenant par exemple $x = e$, on obient $c = 0$. Ainsi, on a bien montré que $a = b = c = d = 0$ et la famille (e_1, e_2, e_3, e_4) est libre.

(2) La famille (e_1, e_2, e_3, e_4) étant génératrice de E (par définition de E) et libre, elle en forme une base. On peut alors affirmer que

$$\dim(E) = 4.$$

(3) On note u l'application qui à toute fonction f de E associe la fonction $g = u(f)$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad g(x) = u(f)(x) = xf'(x).$$

(a) Soient f, g deux fonctions de E et λ, μ deux réels. Par linéarité de l'opération de dérivation, on a

$$\begin{aligned} u(\lambda f + \mu g)(x) &= x(\lambda f + \mu g)'(x) = x(\lambda f'(x) + \mu g'(x)) \\ &= \lambda x f'(x) + \mu x g'(x) \\ &= \lambda u(f)(x) + \mu u(g)(x) \end{aligned}$$

et u est bien une application linéaire.

(b) On calcule:

$$\begin{aligned} u(e_1)(x) &= xe_1'(x) = x \\ u(e_1) &= e_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u(e_2)(x) &= xe_2'(x) = x(2x) = 2x^2 \\ u(e_2) &= 2e_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u(e_3)(x) &= xe_3'(x) = x\left(\ln(x)+1\right) = x + x\ln(x) \\ u(e_3) &= e_1 + e_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u(e_4)(x) &= xe_4'(x) = x(2x\ln(x)+x) = x^2 + 2x^2\ln(x) \\ u(e_4) &= 2e_4 + e_2 \end{aligned}$$

(c) Les images par u des quatre vecteurs e_1, e_2, e_3, e_4 sont encore des éléments de E, ainsi, comme u est linéaire, il en sera de même pour l'image de toute combinaison de vecteurs de e_1, e_2, e_3 et e_4. Comme ces quatre vecteurs forment une base de E, on peut alors affirmer que l'image par u de tout vecteur de E sera encore un élément de E et u est bien un endomorphisme.

(4) (a) D'après les calculs précédents et la définition de la matrice de u dans la base (e_1, e_2, e_3, e_4), on peut écrire

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(b) La matrice A est triangulaire supérieure sans zéro sur la diagonale; elle est donc inversible et l'endomorphisme qu'elle représente, u bijectif (donc un automorphisme).

(c) On résout. D'une part,

$$\begin{aligned} X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker}(A-I) &\iff (A-I)X = 0 \\ &\iff \left\{ \begin{aligned} z &= 0 \\ y+t &= 0 \\ t &= 0 \end{aligned} \right. \\ &\iff X = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\operatorname{Ker}(A-I) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

D'autre part,

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(A-2I) \iff (A-2I)X = 0$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcl} -x+z & = & 0 \\ t & = & 0 \\ -z & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\iff X = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi,

$$\mathrm{Ker}(A-I) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

Dans les deux cas, on a bien

$$\dim(\mathrm{Ker}(A-I)) = \dim(\mathrm{Ker}(A-2I)) = 1.$$

☞ **Remarque**. En reprenant cet exercice après avoir travaillé sur le Chapitre 9, on pourra conclure que, la somme des dimensions des sous-espaces propres n'étant pas égale à la dimension de tout l'espace, l'endomorphisme n'est pas diagonalisable. C'est l'unique intérêt de cette question.

(5) On remarque en effet que

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = D + N,$$

avec D diagonale et $N^2 = 0$. Comme, de plus D et N commutent, ce qu'on vérifie

$$DN = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = ND,$$

on peut utiliser la formule du binôme pour le calcul des puissances de $A = D + N$. Comme de plus, par une récurrence immédiate, on a $N^k = 0$, pour $k \geq 2$, on a

$$\begin{aligned} A^n &= (D+N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k D^{n-k} = D^n + nND^{n-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et on a bien

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & n & 0 \\ 0 & 2^n & 0 & n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}.$$

Problème

Ce problème est extrait du sujet **EDHEC 2019**.

Partie 1 : étude de quelques propriétés d'une variable aléatoire

Dans cette exercice, θ désigne un réel élément de $\left]0, \frac{1}{2}\right[$. On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\theta x^{1+\frac{1}{\theta}}}, & \text{si } x \geqslant 1 \\ \\ 0, & \text{si } x < 1 \end{cases}.$$

(1) Vérifions que f densité:

- f est positive ou nulle partout;
- f continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en $x_0 = 1$, comme fonction constante d'une part, et comme puissance d'une quantité strictement positive d'autre part.
- Comme f est nulle sur $]-\infty; 1[$, la convergence de l'intégrale sur $\mathbb{R}$ se ramène à celle sur $[1; +\infty[$. Soit $A > 1$.

$$\int_1^A f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\theta}\int_1^A x^{-1-1/\theta}\mathrm{d}x = \frac{1}{\theta}\left[\frac{x^{-1-1/\theta+1}}{-1+1/\theta+1}\right]_1^A = -\left[x^{-1/\theta}\right]_1^A = 1 - \frac{1}{A^{1/\theta}} \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Ainsi, f est bien une densité.

(2) Déterminons les conditions d'existence et la valeur des moments d'ordre n ($n \in \mathbb{N}^*$).

$$\begin{aligned} E(X^n) \text{ existe} &\iff \int_{-\infty}^{+\infty} x^n f(x)\mathrm{d}x \quad \text{CV} \\ &\iff \frac{1}{\theta}\int_1^{+\infty} \frac{x^n}{x^{1+1/\theta}}\mathrm{d}x \quad \text{CV} \\ &\iff \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{1+1/\theta-n}}\mathrm{d}x \quad \text{CV} \\ &\iff 1 + \frac{1}{\theta} - n > 1 \iff n < \frac{1}{\theta} \end{aligned}$$

Or $\theta \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$ donc $\frac{1}{\theta} \in]2, +\infty[$. Donc $E(X^n)$ existe pour $n = 1$ et $n = 2$.
$E(X)$ et $E(X^2)$ existent donc $V(X)$ existe.
Pour $n \leq 2$,

$$E(X^n) = \frac{1}{\theta}\int_1^{+\infty} x^{-1-1/\theta+n}\mathrm{d}x.$$

Soit $A > 1$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{\theta}\int_1^A x^{-1-1/\theta+n}\mathrm{d}x &= \frac{1}{\theta}\times\frac{1}{-1/\theta+n}\left[x^{-1/\theta+n}\right]_1^A\\ &= \frac{1}{n\theta-1}\left(\frac{1}{A^{-1/\theta+n}}-1\right)\\ &\underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{1-n\theta}.\end{aligned}$$

En particulier

$$E(X)=\frac{1}{1-\theta}, \qquad \text{et} \qquad E(X^2)=\frac{1}{1-2\theta}$$

et

$$V(X)=E(X^2)-E(X)^2=\frac{1}{1-2\theta}-\frac{1}{1-\theta^2}=\frac{(1-\theta)^2-(1-2\theta)}{(1-2\theta)(1-\theta)^2}=\frac{\theta^2}{(1-2\theta)(1-\theta)^2}.$$

(3) Soit $x\in\mathbb{R}$.

$$F(x)=\int_{-\infty}^x f(t)\mathrm{d}t.$$

- $F(x)=0$ si $x<1$.
- Pour $x\geq 1$, $F(x)=\displaystyle\int_1^x f(t)\mathrm{d}t = 1-\frac{1}{x^{1/\theta}}$

Au final,

$$F(x)=\begin{cases} 0, & \text{si } x<1\\ 1-\dfrac{1}{x^{1/\theta}}, & \text{si } x\geq 1\end{cases}$$

(4) (a) Nécessairement, $F(x)=\dfrac{1}{2}$ est impossible si $x<1$. Pour $x\geq 1$:

$$\begin{aligned}F(x)=\frac{1}{2} &\iff 1-\frac{1}{x^{1/\theta}}=\frac{1}{2}\\ &\iff \frac{1}{x^{1/\theta}}=\frac{1}{2}\\ &\iff x^{1/\theta}=2\\ &\iff \frac{1}{\theta}\ln(x)=\ln(2)\\ &\iff x=e^{\theta\ln(2)}=2^\theta\end{aligned}$$

Ainsi,

$$M_e=2^\theta.$$

(b) On observe que

$$2^x(1-x)\leq 1 \iff x\ln(2)+\ln(1-x)\leq 0.$$

Posons alors

$$h(x)=x\ln(2)+\ln(1-x), \qquad x\in\left[0,\frac{1}{2}\right].$$

h est C^∞ et

$$h'(x)=\ln(2)-\frac{1}{1-x}=\frac{-x\ln(2)-1+\ln(2)}{1-x}$$

qui est du signe du numérateur. Or $-1+\ln(2)$ est négatif donc $h'(x)<0$. Ainsi, h est strictement décroissante sur $[0,1/2]$ et $h(0)=0$. Donc

$$\forall x\in\left[0,\frac{1}{2}\right], \qquad 2^x(1-x)\leq 1.$$

(c) $E(X) - M_e = \dfrac{1}{1-\theta} - 2^\theta = \dfrac{1-2^\theta(1-\theta)}{1-\theta} \geq 0$ d'après ce qui précède.
Donc
$$\forall \theta \in \left]0, \frac{1}{2}\right[, \qquad E(X) \geq M_e$$

(5) (a) Par définition d'une proba conditionnelle,
$$P_{(X>a)}(X > a+b) = \frac{P(X > a+b \cap X > a)}{P(X > a)} = \frac{\dfrac{1}{(a+b)^{1/\theta}}}{\dfrac{1}{a^{1/\theta}}} = \left(\frac{a}{a+b}\right)^{1/\theta}.$$
C'est le résultat attendu.

(b) Comme
$$\lim_{a\to+\infty} \frac{a}{a+b} = 1,$$
on a
$$\lim_{a\to+\infty} P_{(X>a)}(X > a+b) = 1.$$
On peut interpréter cela en remarquant que si l'appareil fonctionne longtemps, il est presque certain qu'il fonctionne beaucoup plus longtemps.

Partie 2 : simulation de X

(6) (a) Par définition de la fonction de répartition,
$$G(x) = P(Y \leq x) = P(\ln(X) \leq x) = P(X \leq e^x) = F(e^x)$$

- Si $x \geq 0$ $\quad e^x \geq 1$ donc $F(e^x) = 1 - \dfrac{1}{(e^x)^{1/\theta}} = 1 - e^{-x/\theta}$
- Si $x < 0$ $\quad e^x < 1$ donc $F(e^x) = 0$

Ainsi,
$$G(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x/\theta}, & \text{si } x \geq 0 \\ 0, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

(b) On reconnaît une loi exponentielle
$$Y \hookrightarrow \mathcal{E}\left(\frac{1}{\theta}\right).$$

(7) La question précédente permet sans difficulté de simuler X, en remarquant que $Y = \ln(X) \iff X = e^Y$, avec les deux insctructions suivantes

```
Y=grand(1,1,'exp',theta)
X=exp(Y)
```

Partie 3 : estimation de θ

On suppose dans la suite que le paramètre θ est inconnu et on considère n variables aléatoires $Y_1, \ldots, Y_n$ toutes définies sur le même espace probabilisé, mutuellement indépendantes, et suivant toutes la même loi que Y.

(8) On pose $T_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} Y_k$.

(a) Par linéarité de l'espérance,

$$E(T_n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} E(Y_k) = E(Y_1) = \theta.$$

(b) Par **indépendance** des variables Y_k, et propriété de la variance, on a

$$V(T_n) = \frac{1}{n^2}V\left(\sum_{k=1}^{n} T_k\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} V(T_k) = \frac{n\theta^2}{n^2} = \frac{\theta^2}{n}.$$

On **admet**[1] ici que

$$\forall \varepsilon > 0, \qquad P\left(|T_n - E(T_n)| > \varepsilon\right) \leq \frac{V(T_n)}{\varepsilon^2}.$$

(9) D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev admise ci-avant et les calculs qui précèdent, on a, pour $\varepsilon > 0$ fixé,

$$0 \leq P\left(|T_n - \theta| > \varepsilon\right) = P\left(|T_n - E(T_n)| > \varepsilon\right) \leq \frac{V(T_n)}{\varepsilon^2} = \frac{\theta^2}{n\varepsilon^2}.$$

Or,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\theta^2}{n\varepsilon^2} = 0.$$

Par le théorème des gendarmes, on peut donc conclure que

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(|T_n - \theta| > \varepsilon\right) = 0.$$

Ainsi, la probabilité que T_n s'écarte de θ de ε tend vers 0 si n devient grand, T_n fournit donc une bonne approximation de θ. On dit que l'*estimateur* T_n de θ est *convergent*.

[1]Il s'agit de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, au programme du Chapitre 11