Corrigé EML 2017 voie E : (par L. FOUBERT et M. DUDOGNON)

EXERCICE 1

On considère la fonction $f :]0;+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par : $f(x) = e^x - \mathrm{e}\ln(x)$.

Partie I : Etude de la fonction f

1. (a) Les fonctions $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto \ln(x)$ étant deux fois dérivables sur $]0;+\infty[$,la fonction f l'est aussi.
On a pour tout $x > 0$: $\boxed{f'(x) = e^x - \frac{\mathrm{e}}{x}}$ et $\boxed{f''(x) = e^x + \frac{\mathrm{e}}{x^2}}$.

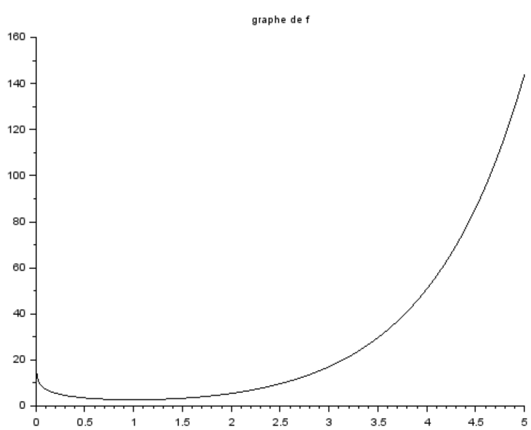
   (b) Évidemment pour tout $x > 0$, on a $f''(x) > 0$ donc f' est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.
On a : $f'(x) = e^x - \frac{\mathrm{e}}{x} \underset{0^+}{\to} -\infty$ (car $\frac{1}{x} \underset{0^+}{\to} +\infty$) , $f'(x) = e^x - \frac{\mathrm{e}}{x} \underset{+\infty}{\to} +\infty$ et $f'(1) = e^1 - e/1 = 0$.
D'où le tableau de variations de f' :

x	0		1		$+\infty$
$f''(x)$		$+$		$+$	
$f'(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

2. On a : $f(x) = e^x - \mathrm{e}\ln(x) \underset{0^+}{\to} +\infty$ (car $\ln(x) \underset{0^+}{\to} -\infty$) ,
$f(x) = e^x(1 - \mathrm{e}.\frac{\ln(x)}{e^x}) \underset{+\infty}{\to} +\infty$ (croissances comparées de $\ln(x)$ et e^x)
et $f(1) = e^1 - e\ln(1) = e$.
D'où le tableau de variations de f :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	e	$\nearrow$	$+\infty$

3. En $+\infty$,$\ln(x)$ est négligeable devant e^x donc $f(x) \underset{+\infty}{\sim} e^x$ et f a une "allure exponentielle " en $+\infty$. La courbe représentative de f :



4. (a) u est dérivable sur $]0;+\infty[$ et $u'(x) = (f'(x) - x)' = f''(x) - 1$.
Et comme pour tout $x > 0$: $f''(x) = e^x + \frac{\mathrm{e}}{x^2} > e^x > 1$,de plus on a $u'(x) = f''(x) - 1 > 0$ sur $]0;+\infty[$. $\boxed{\text{u est donc strictement croissante sur }]0;+\infty[.}$

   (b) u est continue et strictement croissante sur $]0;+\infty[$,
on a $\lim_{x\to 0^+} u(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} u(x) = \lim_{x\to+\infty} e^x - \frac{\mathrm{e}}{x} - x = \lim_{x\to+\infty} e^x(1 - \frac{\mathrm{e}}{x.e^x} - \frac{x}{e^x}) = +\infty$,
donc $\boxed{\text{u s'annule une et une seule fois dans }]0;+\infty[.}$

   De plus : $u(1) = -1 < 0$ et $u(2) = e^2 - \frac{\mathrm{e}}{2} - 2 > 7,3 - 1,4 - 2 > 0$, donc la solution (notée

α par l'énoncé) des équations équivalentes $u(x) = 0$ et $f'(x) = x$ est dans l'intervalle $]1; 2[$. On a bien $\boxed{1 < \alpha < 2.}$

Partie II : Etude d'une suite, étude d'une série

On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 2$ et, pour tout n de $\mathbb{N}$, $\quad u_{n+1} = f(u_n)$

5. Les variations de f montrent que pour tout $x > 0$: $f(x)$ existe et $f(x) \geqslant \mathrm{e}$.
   Par récurrence :
   • <u>initialisation :</u> Pour $n = 0$, on a bien $u_0 = 2$ qui existe et est bien supérieur ou égal à 2.
   • <u>hérédité :</u> Comme $u_n \geqslant 2 > 0$, $u_{n+1} = f(u_n)$ est bien défini et $u_{n+1} = f(u_n) \geqslant \mathrm{e} \geqslant 2$
   • <u>conclusion :</u> Pour tout n de $\mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \geqslant 2$.
6. (a) g est dérivable sur $[2; +\infty[$ et $g'(x) = (f(x) - x)' = f'(x) - 1$.
   Or f' est croissante sur $[2; +\infty[$,donc si $x \geqslant 2$:
   $$g'(x) = f'(x) - 1 \geqslant f'(2) - 1 = e^2 - \frac{e}{2} - 1 \geqslant 7,3 - \frac{2,8}{2} - 1 = 4,9 > 0.$$
   $\boxed{\text{g est donc strictement croissante sur } [2; +\infty[.}$

   (b) g est croissante sur $[2; +\infty[$ et $g(2) = f(2) - 2 \geqslant \mathrm{e} - 2 > 0$ donc ,pour tout $x \geqslant 2$, $g(x) > 0$ et $f(x) > x$.
   Or pour tout n de $\mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \geqslant 2$ donc $u_{n+1} = f(u_n) \geqslant u_n$.
   $\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante.}}$
7. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant croissante , elle est convergente ou elle tend vers $+\infty$.
   Démontrons par l'absurde qu'elle n'est pas convergente :
   Comme $u_n \geqslant 2$ et $u_{n+1} = f(u_n)$, si la suite (u_n) admettait une limite finie L ,on aurait $L \geqslant 2$ et f continue en L donc on aurait aussi $f(L) = \lim f(u_n) = \lim(u_{n+1}) = \lim(u_n) = L$.
   Comme d'après 6.(b) , l'équation $f(L) = L$ n'a pas de solution dans $[2; +\infty[$,une telle limite L n'est pas possible , donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente et on a donc $\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty}$
8. Programme en Scilab qui, étant donné un réel A, renvoie un entier naturel N tel que $u_N \geqslant A$:

```
U = 2  , N=0,
while U < A do
     U = exp(U)-%e*log(U),
     N=N+1,
end
disp(N)
```

9. (a) • $2\ln(x) \leqslant x$: En posant $h(x) = 2\ln(x) - x$, on a $h'(x) = 2/x - 1 < 0$ sur $[2; +\infty[$.
   Donc h est décroissante et pour tout $x \geqslant 2$: $h(x) \leqslant h(2) = 2\ln(2) - 2 < 2 * 0,6 - 2 < 0$. cqfd.
   • $x \leqslant \dfrac{\mathrm{e}^x}{3}$: En posant $k(x) = x - \dfrac{\mathrm{e}^x}{3}$, on a $k'(x) = 1 - \dfrac{\mathrm{e}^x}{3} < 1 - \dfrac{2,7}{3} < 0$ sur $[2; +\infty[$.
   Donc k est décroissante et pour tout $x \geqslant 2$: $k(x) \leqslant k(2) = 2 - \dfrac{\mathrm{e}^2}{3} < 2 - \dfrac{7,3}{3} < 0$. cqfd.

   On a donc démontré : $\boxed{\forall x \in [2; +\infty[, \quad 2\ln(x) \leqslant x \leqslant \frac{\mathrm{e}^x}{3}.}$

   (b) $u_{n+1} = f(u_n) = e^{u_n} - \mathrm{e} * \ln(u_n)$.
   D'après ce qui précède : $e^{u_n} \geqslant 3 * u_n$ et $\ln(u_n) \leqslant \frac{u_n}{2}$ donc $-\mathrm{e} * \ln(u_n) \geqslant -\mathrm{e} * \frac{u_n}{2}$.
   On obtient alors ,en ajoutant les 2 inégalités :
   $$u_{n+1} = e^{u_n} - \mathrm{e} * \ln(u_n) \geqslant 3 * u_n - \mathrm{e} * \frac{u_n}{2} = \frac{6 - \mathrm{e}}{2} * u_n.$$

(c) Comme $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \geqslant \dfrac{6-\mathrm{e}}{2} u_n > 0$, on a aussi :

$$0 < \frac{1}{u_{n+1}} \leqslant \frac{2}{6-\mathrm{e}} . \frac{1}{u_n}.$$

On pourrait alors démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < \dfrac{1}{u_n} \leqslant \left(\dfrac{2}{6-\mathrm{e}}\right)^n . \dfrac{1}{u_0}$

Or , comme $\dfrac{2}{6-\mathrm{e}} \in]-1;1[$,la série de terme général $\left(\dfrac{2}{6-\mathrm{e}}\right)^n . \dfrac{1}{u_0}$ est convergente .

Par le théorème de majoration des séries , <u>la série de terme général $\dfrac{1}{u_n}$ est elle aussi convergente.</u>

Partie III : Étude d'intégrales généralisées

10. f est continue sur $]0;1]$,donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$ est impropre en 0.
Comme $(x\ln(x) - x)' = \ln(x)$,on a pour tout $a > 0$:
$\displaystyle\int_a^1 f(x)dx = \int_a^1 e^x - \mathrm{e}\ln(x)dx = [e^x - \mathrm{e}.(x\ln(x) - x)]_a^1 = 2.\mathrm{e} - (e^a - \mathrm{e}.(a\ln(a) - a)) \underset{a\to 0^+}{\longrightarrow} 2.\mathrm{e} - 1$.
L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$ est donc convergente et $\boxed{\displaystyle\int_0^1 f(x)dx = 2.\mathrm{e} - 1 \text{ .}}$

11. En $+\infty$, $\ln(x)$ est négligeable devant e^x donc $f(x) \underset{+\infty}{\sim} e^x > 0$.
Et comme l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^x dx$ est divergente (évident ?) , <u>$\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)dx$ est elle aussi divergente.</u>

12. Première méthode : Pour montrer que $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{f(x)}dx$ converge,on va chercher une majoration de $\dfrac{1}{f(x)}$,en minorant $f(x)$.
Grâce au 9.(a),on a pour tout $x \geqslant 2$: $e^x \geqslant 6\ln(x)$ et $-\ln(x) \geqslant -\dfrac{e^x}{6}$,
donc $f(x) = e^x - \mathrm{e}\ln(x) \geqslant e^x - \mathrm{e}.\dfrac{e^x}{6} = \dfrac{6-\mathrm{e}}{6}.e^x > 0$
On en déduit alors : $0 < \dfrac{1}{f(x)} \leqslant \dfrac{6}{6-\mathrm{e}}.\dfrac{1}{e^x} = \dfrac{6}{6-\mathrm{e}}.e^{-x}$
Et comme l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} e^{-x}dx$ est convergente (évident ?) , <u>$\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{f(x)}dx$ est elle aussi convergente.</u>
Deuxième méthode : Puisque $f(x) \underset{+\infty}{\sim} e^x$ on a : $\dfrac{1}{f(x)} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{e^x} = e^{-x}$
— $\dfrac{1}{f(x)} \underset{+\infty}{\sim} e^{-x}$
— $x \mapsto \dfrac{1}{f(x)}$ et $x \mapsto e^{-x}$ sont continues et positives sur $[1;+\infty[$
— $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-x}dx$ converge (peut se calculer facilement ! !)
D'après les critères de comparaison, $\boxed{\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{f(x)}dx \text{ est elle aussi convergente.}}$

Partie IV : Étude d'une fonction de deux variables réelles

On considère la fonction $F :]1;+\infty[^2 \to \mathbb{R}$, de classe C^2 sur l'ouvert $]1;+\infty[^2$, définie pour tout (x,y) de $]1;+\infty[^2$ par :

$$F(x,y) = f(x) + f(y) - xy$$

13. On a $\partial_1 F(x,y) = f'(x) - y$ et $\partial_2 F(x,y) = f'(y) - x$,

donc (x,y) est un point critique de F si, et seulement si, $\left\{\begin{array}{l}\partial_1 F(x,y) = 0\\ \partial_2 F(x,y) = 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}f'(x) - y = 0\\ f'(y) - x = 0\end{array}\right.$.

La différence de ces deux équations implique $f'(x) - y - f'(y) + x = 0$ et $\underline{f'(x) + x = f'(y) + y}$.
Or pour tout $x \in]1;+\infty[$, $(f'(x)+x)' = f''(x) + 1 > 0$ donc la fonction $x \to f'(x) + x$ est bijective et injective sur $]1;+\infty[$: l'équation $f'(x) + x = f'(y) + y$ implique donc que $\underline{x = y}$.

Le système à résoudre équivaut donc à $\left\{\begin{array}{l}f'(x) = x\\ y = x\end{array}\right.$, dont l'unique solution est le point (α, α) , α étant l'unique solution de $f'(x) = x$ définie à la question 4 de la partie I.

14. (a) On a $\partial^2_{1,1} F(x,y) = f''(x)$, $\partial^2_{2,2} F(x,y) = f''(y)$ et $\partial^2_{1,2} F(x,y) = \partial^2_{2,1} F(x,y) = -1$.

La matrice hessienne de F en (α,α) est donc $H = \begin{pmatrix} f''(\alpha) & -1 \\ -1 & f''(\alpha) \end{pmatrix}$.

(b) — Première méthode :
Le déterminant de H est $det(H) = (f''(\alpha))^2 - 1 > 0 \quad$ (car $\quad f''(\alpha)) > 1$).
Et la trace de H est $tr(H) = 2.f''(\alpha) > 0$.

H est donc une matrice symétrique qui admet 2 valeurs propres strictement positives (leur produit est égale à $det(H) > 0$ et leur somme égale à $tr(H) > 0$) ,donc
<u>F admet un minimum local au point (α, α) .</u>

— Deuxième méthode :
Cherchons les valeurs propres de H. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. λ est valeur propre de H ssi $H - \lambda I$ est non inversible.
Or, $H - \lambda I = \begin{pmatrix} f''(\alpha) - \lambda & -1 \\ -1 & f''(\alpha) - \lambda \end{pmatrix}$. Ainsi, λ est valeur propre de H ssi
$(f''(\alpha) - \lambda)^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (f''(\alpha) - \lambda - 1)(f''(\alpha) - \lambda + 1) = 0 \Leftrightarrow \lambda = f''(\alpha) - 1$ ou $\lambda = f''(\alpha) + 1$.
Or nous avons démontré dans la partie I que pour tout $x > 0$, $f''(x) > 1$. Ainsi, H admet deux valeurs propres strictement positives donc F admet un minimum local en (α, α).

EXERCICE 2

Partie I : Étude de a

1.
   - Montrons que a est linéaire. Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et P et Q deux éléments de E.
   $a(\alpha P + Q) = (\alpha P + Q) - X(\alpha P + Q)' = (\alpha P + Q) - X(\alpha P' + Q') = \alpha(P - XP') + (Q - XQ')$
   Ainsi, $a(\alpha P + Q) = \alpha a(P) + a(Q)$.
   - Montrons que a est à valeurs dans E. Soit $P = \alpha + \beta X + \gamma X^2$ un polynôme de E.
   $a(P) = P - XP' = \alpha + \beta X + \gamma X^2 - X(\beta + 2\gamma X) = \alpha - \gamma X^2 \in E$.

   Ainsi, $\boxed{a \text{ est un endomorphisme de } E}$

2. (a)
   - $a(1) = 1 - X.0 = 1$
   - $a(X) = X - X.1 = 0$
   - $a(X^2) = X^2 - X.2X = -X^2$

   Ainsi, la matrice de a dans la base $(1, X, X^2)$ est : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

   (b) rg(A)=dim$\left(\text{Vect}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}\right\}\right)$=dim$\left(\text{Vect}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}\right\}\right) = 2$. ainsi, $\boxed{\text{rg}(A)=2}$

3. A est une matrice d'ordre 3 et rg(A)=2 donc A n'est pas inversible et donc a n'est pas bijectif.

- Déterminons Ker(a) : Soit $P = \alpha + \beta X + \gamma X^2$
  $P \in \text{Ker}(a) \Leftrightarrow a(P) = 0 \Leftrightarrow \alpha - \gamma X^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = \gamma = 0$
  Ainsi, $P = \beta X$ et $\boxed{\text{Ker}(a)\text{=Vect}\{X\}}$
- Déterminons Im(a) :
  Im(a)=Vect$\{a(1), a(X), a(X^2)\}$=Vect$\{1, 0, -X^2\}$=Vect$\{1, X^2\}$
  Ainsi, $\boxed{\text{Im}(a)\text{=Vect}\{1, X^2\}}$

Partie II : Étude de b

4. b est un endomorphisme de E donc b est bijectif ssi Ker(b)={0}. Soit $P \in E, P = \alpha + \beta X + \gamma X^2$.

$$\begin{array}{rcl} P \in \text{Ker}(b) & \Leftrightarrow & b(P) = 0 \\ & \Leftrightarrow & P - P' = 0 \\ & \Leftrightarrow & \alpha + \beta X + \gamma X^2 - (\beta + 2\gamma X) = 0 \\ & \Leftrightarrow & \alpha - \beta + (\beta - 2\gamma)X + \gamma X^2 = 0 \\ & \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} \alpha - \beta = 0 \\ \beta - 2\gamma = 0 \\ \gamma = 0 \end{array} \right. \\ & \Leftrightarrow & \gamma = \beta = \alpha = 0 \end{array}.$$

Ainsi, Ker(b) = $\{0\}$ et b est bijectif.
De plus, notons g l'application définie par : $\forall Q \in E, g(Q) = Q + Q' + Q''$. g est un endormorphisme de E et :
$\forall P \in E, \quad (g \circ b)(P) = g(P - P') = g(P) - g(P') = P + P' + P'' - (P' + P'' + P''')$. Or P est un polynôme de degré inférieur ou égal à 2 donc $P''' = 0$.
ainsi, $\forall P \in E, \quad (g \circ b)(P) = P$ De même, $\forall P \in E, \quad (b \circ g)(P) = P$. Ainsi, $g = b^{-1}$.
On a alors : $\boxed{\text{Pour tout } Q \text{ dans } E,\ g^{-1}(Q) = Q + Q' + Q''}$

5. (a) Déterminons la matrice B de b dans la base $(1, X, X^2)$.
   - $b(1) = 1 - 0 = 1$
   - $b(X) = X - 1$
   - $b(X^2) = X^2 - 2X$

   Ainsi, la matrice de b dans la base $(1, X, X^2)$ est : $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   Cette matrice est triangulaire supérieure donc ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux : ainsi, B et donc b admet 1 comme unique valeur propre.
   Ainsi, $\boxed{\text{Spec}(b) = \{1\}}$

   (b) Raisonnons par l'absurde : puisque 1 est la seule valeur propre de b, si b était diagonalisable, il existerait une matrice P inversible telle que $PBP^{-1} = I$ ce qui impliquerait $B = I$ ce qui est absurde !
   Ainsi, b n'est pas diagonalisable.

Partie III : Étude de c

6. - $c(1) = 2X - (X^2 - 1).0 = 2X$
   - $c(X) = 2X.X - (X^2 - 1).1 = 1 + X^2$
   - $c(X^2) = 2X.X^2 - (X^2 - 1).2X = 2X$

Ainsi, $\boxed{C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$

7. La matrice C a deux lignes égales donc n'est pas inversible donc c n'est pas bijectif.

8. (a) Déterminons les valeurs propres et les sous-espaces propres de C.

   - Recherchons les valeurs propres de C. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$; λ est valeur propre de C ssi $C - \lambda I$ est non inversible. Or,

$$C - \lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 2 & -\lambda & 2 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -\lambda & 2 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ -\lambda & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\sim \begin{pmatrix} 2 & -\lambda & 2 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & 2-\lambda^2 & 2\lambda \end{pmatrix} L_3 \leftarrow 2L_3 + \lambda L_1$$
$$\sim \begin{pmatrix} 2 & -\lambda & 2 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & 0 & 2\lambda + \lambda(2-\lambda^2) \end{pmatrix} L_3 \leftarrow L_3 - (2-\lambda^2)L_2$$

   Ainsi, λ est valeur propre de C ssi $2\lambda + \lambda(2-\lambda^2) = 0 \Leftrightarrow \lambda(4-\lambda^2) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2$ ou $\lambda = -2$ ou $\lambda = 0$.

   Ainsi Spec(C)=$\{-2; 0; 2\}$. C est une matrice d'ordre 3 et admet 3 valeurs propres donc elle est diagonalisable.

   - Recherchons les sous-espace propres de C.

     — Recherche de E_0.

     Soir $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

$$X \in E_0 \Leftrightarrow CX = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} b & = & 0 \\ 2a + 2c & = & 0 \\ b & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} b = 0 \\ c = -a \end{array} \right. .$$

     Ainsi, $X = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ -a \end{pmatrix}$ et $\boxed{E_1 = \text{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}}$

     — Recherche de E_2.

     Soir $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} X \in E_2 \Leftrightarrow CX = 2X \quad & \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} b & = & 2a \\ 2a + 2c & = & 2b \\ b & = & 2c \end{array} \right. \\ & \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a - b + c = 0 \\ -2a + b = 0 \\ b - 2c = 0 \end{array} \right. \\ & \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a - b + c = 0 \\ -b + 2c = 0 \quad (L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1) \\ b - 2c = 0 \end{array} \right. \\ & \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = c \\ b = 2c \end{array} \right. \end{aligned} .$$

Ainsi, $X = \begin{pmatrix} c \\ 2c \\ c \end{pmatrix}$ et $\boxed{E_2 = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}}$

— Recherche de E_{-2}.

Soir $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

$$X \in E_{-2} \Leftrightarrow CX = -2X \quad \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} b & = & -2a \\ 2a+2c & = & -2b \\ b & = & -2c \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a+b+c=0 \\ 2a+b=0 \\ b+2c=0 \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a-b+c=0 \\ -b-2c=0 \quad (L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1) \\ b-2c=0 \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a=c \\ b=-2c \end{array}\right. .$$

Ainsi, $X = \begin{pmatrix} c \\ -2c \\ c \end{pmatrix}$ et $\boxed{E_2 = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}}$

Conclusion : Compte tenu des recherches de valeurs propres et sous-espaces propres précédents, si $D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, alors $C = RDR^{-1}$

(b) La matrice C est diagonalisable donc l'endomorphisme c l'est aussi et ses valeurs propres sont -2, 0 et 2.
En traduisant les sous-espaces propres trouvés dans la question précédentes dans la base $(1, X, X^2)$ on a :
$$E_0 = \text{Vect}(1+X^2), \quad E_2 = \text{Vect}(1+2X+X^2), \quad E_{-2} = \text{Vect}(1-2X+X^2)$$

Partie IV : Étude de f

9. Soit $P \in E, \quad f(P) = (b \circ a)(P) - (a \circ b)(P)$. Or,
   - $(b \circ a)(P) = b\,(a(P)) = b\,(P - XP') = P - XP' - (P - XP')' = P - XP' - (P' - P' - XP'')$ donc $(b \circ a)(P) = P - XP' + XP''$
   - $(a \circ b)(P) = a\,(b(P)) = a\,(P - P') = P - P' - X(P - P')' = P - P' - X(P' - P'')$ donc $(a \circ b)(P) = P - (1+X)P' + XP''$

   Ainsi, $f(P) = P - XP' + XP'' - (P - (1+X)P' + XP'') = P'$ et $\boxed{\forall P \in E, \quad f(P) = P'}$

10. On a alors, $\forall P \in E, \quad (f \circ f)(P) = P''$ puis $(f \circ f \circ f)(P) = P''' = 0$; ainsi, $f^3 = 0$.
    Or la matrice de f dans la base $(1, X, X^2)$ est la matrice $BA - AB$, puisque B est la matrice de b et A celle de a.
    Ainsi, $f^3 = 0 \Rightarrow (BA - AB)^3 = 0$.

EXERCICE 3

On considère une urne contenant initialement une boule bleue et deux boules rouges.

On effectue, dans cette urne, des tirages successifs de la façon suivante : on pioche une boule au hasard, on note sa couleur, puis on la replace dans l'urne en ajoutant une boule de la même couleur que celle qui vient d'être obtenue.

Pour tout k de $\mathbb{N}^*$, on note :
B_k l'événement : "on obtient une boule bleue au k-ième tirage"
R_k l'événement : "on obtient une boule rouge au k-ième tirage"

Partie I : Simulation informatique

1. Si r et b désignent les nombres de boules rouges et blanches dans l'urne lors du k-ième tirage , la probabilité de tirer une boule rouge lors de ce tirage est $\mathrm{P}(R_k) = \dfrac{r}{r+b}$ et l'évènement "$rand() <= \dfrac{r}{r+b}$" est réalisé avec cette même probabilité .

```
function s=EML(n)
    b=1 // b désigne le nombre de boules bleues présentes dans l'urne
    r=2 // r désigne le nombre de boules rouges présentes dans l'urne
    s=0 // s désigne le nombre de boules rouges obtenues lors des n tirages
    for k=1:n
        x=rand()
        if x<=r/(r+b) then  //si la boule tirée est rouge
            r=r+1,s=s+1  // on augmente alors les nombres de rouges tirées et dans l'urne
        else
            b=b+1 // on augmente seulement le nombre de boules bleues dans l'urne
        end
    end
endfunction
```

2. On répète ici 1000 fois l'expérience de 10 tirages , m compte le nombre total de boules rouges obtenues et $m/1000$ le nombre moyen de boules rouges obtenues lors de 10 tirages. (ce qui sera noté $E(S_{10})$ dans la suite du problème.
On peut penser que $E(S_{10}) \approx 6.66 \quad (\dfrac{20}{3})$.

Partie II : Rang d'apparition de la première bleue et de la première rouge

On définit la variable aléatoire Y égale au rang d'apparition de la première boule bleue et la variable aléatoire Z égale au rang d'apparition de la première boule rouge.

3. (a) Tout d'abord , comme il y remise de boules dans l'urne, il est clair que Y peut prendre toutes les valeurs de $\mathbb{N}^*$. Et $\forall n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}\mathrm{P}([Y=n]) &= \mathrm{P}(R_1 \cap \ldots \cap R_{n-1} \cap B_n) &&= \frac{2}{3}.\frac{3}{4}.\frac{4}{5}\ldots\frac{2+(n-2)}{3+(n-2)}.\frac{1}{3+(n-1)}\\ &= \frac{2}{3}.\frac{3}{4}.\frac{4}{5}\ldots\frac{n}{n+1}.\frac{1}{n+2} &&= \frac{2}{(n+1)(n+2)}\end{aligned}$$

Remarques :
— Pour la deuxième égalité ,les évènements n'étant pas indépendants , on utilise la formule des probabilités composées .

— pour tout $k \in [\![1; n-1]\!]$,on calcule $\mathrm{P}_{R_1 \cap \ldots \cap R_{n-1} \cap Rk-1}(R_k)$ en faisant le quotient du nombre de boules rouges dans l'urne $(2 + (k-1))$ par le nombre total de boules dans l'urne $(3 + (k-1))$.

(b) Comme $n.\mathrm{P}([Y = n]) = \dfrac{2n}{(n+1)(n+2)} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{2}{n} > 0$, la série qui définit $E(Y) = \sum\limits_{n \in \mathbb{N}^*} n.\mathrm{P}([Y = n])$ est de même nature que la série de Riemann $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}^*} \dfrac{1}{n}$,c'est à dire divergente et donc la variable aléatoire Y n'admet pas d' espérance et donc pas de variance non plus.

4. • Comme pour Y, il est clair que Z peut prendre toutes les valeurs de $\mathbb{N}^*$. Et $\forall n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} \mathrm{P}([Z = n]) &= \mathrm{P}(B_1 \cap \ldots \cap B_{n-1} \cap R_n) &&= \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{3}{5} \cdots \frac{1 + (n-2)}{3 + (n-2)} \cdot \frac{2}{3 + (n-1)} \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{3}{5} \cdots \frac{n-1}{n+1} \cdot \frac{2}{n+2} &&= \frac{2.2}{n(n+1)(n+2)}. \end{aligned}$$

• Comme $n.\mathrm{P}([Z = n]) = \dfrac{4n}{n(n+1)(n+2)} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{4}{n^2} > 0$, la série qui définit $E(Z) = \sum\limits_{n \in \mathbb{N}^*} n.\mathrm{P}([Z = n])$ est de même nature que la série de Riemann $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}^*} \dfrac{1}{n^2}$,c'est à dire convergente et donc la variable aléatoire Z admet une espérance .

• Par contre, $n^2.\mathrm{P}([Z = n]) = \dfrac{4n^2}{n(n+1)(n+2)} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{4}{n} > 0$, donc la série qui définit $E(Z^2) = \sum\limits_{n \in \mathbb{N}^*} n^2.\mathrm{P}([Z = n])$ est de même nature que la série de Riemann $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}^*} \dfrac{1}{n}$,c'est à dire divergente et donc
la variable aléatoire Z n'admet pas de variance .

Partie III : Nombre de boules rouges obtenues au cours de n tirages

On définit, pour tout k de $\mathbb{N}^*$, la variable aléatoire X_k égale à 1 si on obtient une boule rouge au k-ième tirage et égale à 0 sinon.

On définit, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, la variable aléatoire S_n égale au nombre de boules rouges au cours des n premiers tirages.

5. De façon classique, X_k étant le nombre de boules rouges tirées (0 ou 1) au k-ième tirage et S_n le nombre total de boules rouges tirées au cours des n premiers tirages : $S_n = \sum\limits_{k=1}^{k=n} X_k$.

6. La variable aléatoire X_1 suit une loi de Bernoulli de paramètre $\mathrm{P}(X_1 = 1) = \mathrm{P}(R_1) = \dfrac{2}{3}$.
Comme $\boxed{X_1 \text{ suit } \mathrm{B}(\frac{2}{3})}$, son espérance est donc $E(X_1) = \dfrac{2}{3}$ et sa variance $V(X_1) = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{9}$.

7. (a) On a $(X_1, X_2)(\Omega) = [\![0; 1]\!]^2$,

$$\mathrm{P}((X_1, X_2) = (0, 0)) = \mathrm{P}((B_1, B_2)) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{4} = \frac{1}{6}$$

$$\mathrm{P}((X_1, X_2) = (0, 1)) = \mathrm{P}((B_1, R_2)) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{4} = \frac{1}{6}$$

$$\mathrm{P}((X_1, X_2) = (1, 0)) = \mathrm{P}((R_1, B_2)) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{6}$$

$$\mathrm{P}((X_1, X_2) = (1, 1)) = \mathrm{P}((R_1, R_2)) = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{2}$$

(b) La variable aléatoire X_2 suit aussi une loi de Bernoulli dont le paramètre est :

$P(X_2 = 1) = P((X_1, X_2) = (0,1)) + P((X_1, X_2) = (1,1)) = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{2}{3}$. $\boxed{X_2 \text{ suit } B(\frac{2}{3})}$

(c) Comme $P(X_1 = 0).P(X_1 = 0) = \frac{1}{3}.\frac{1}{3} = \frac{1}{9}$ et $P((X_1, X_2) = (0,0)) = \frac{1}{6}$,
les variables aléatoires X_1 et X_2 ne sont pas indépendantes.

8. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![0;n]\!]$.

(a) Comme précédemment , en utilisant la formule des probabilités composées :

$P(R_1 \cap \ldots \cap R_k \cap B_{k+1} \cap \ldots \cap B_n) = \frac{2}{3}\frac{3}{4}\frac{4}{5}\ldots\frac{2+(k-1)}{3+(k-1)}\frac{1}{3+k}\frac{2}{4+k}\ldots\frac{1+(n-1-k)}{3+(n-1)}$.
$= \frac{2}{2}\frac{2}{3}\frac{3}{4}\frac{4}{5}\ldots\frac{2+(k-1)}{3+(k-1)}\frac{1}{3+k}\frac{2}{4+k}\ldots\frac{1+(n-1-k)}{3+(n-1)} = \frac{2(k+1)!(n-k)!}{(n+2)!}$.

(b) L'événement $(S_n = k)$ se réalise lorsque sur n tirages , il apparait k boules rouges et $n-k$ boules blanches, dans un ordre indéterminé .

• Pour calculer la probabilité d'avoir k boules rouges et $n-k$ boules blanches dans un ordre déterminé , on ferait un calcul analogue au précédent pour obtenir finalement le même résultat qu'au (a) (car le dénominateur est déterminé par les nombres successifs de boules dans l'urne et le numérateur correspond au nombre de boules blanches ou rouge au cours des n tirages : ce sont les mêmes qu'au (a) dans un ordre différent),on a donc finalement :

$P(k \text{ rouges et } n-k \text{ boules blanches, dans un ordre déterminé}) = \frac{2(k+1)!(n-k)!}{(n+2)!}$.

• $(S_n = k)$ est donc la réunion disjointe d' événements incompatibles de même probabilité. Chacun de ces événements correspondant aux s d'apparition des k boules rouges et des $n-k$ boules blanches,il y en a donc autant que de manières de placer k "R" parmi n places possibles ,c'est à dire $\binom{n}{k}$.

• Finalement : $P([S_n = k]) = \binom{n}{k} P(R_1 \cap \ldots \cap R_k \cap B_{k+1} \cap \ldots \cap B_n)$,

et donc : $P([S_n = k]) = \frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{2(k+1)!(n-k)!}{(n+2)!} = \frac{2(k+1)}{(n+1)(n+2)}$.

9. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$,$S_n(\Omega) = [\![0;n]\!]$,donc S_n admet une espérance et : $E(S_n) = \sum_{k=0}^{k=n} k.P([S_n = k])$.

Donc $E(S_n) = \sum_{k=0}^{k=n} k.\frac{2(k+1)}{(n+1)(n+2)} = \frac{2}{(n+1)(n+2)}\sum_{k=0}^{k=n} k(k+1) = \frac{2}{(n+1)(n+2)}.\left(\sum_{k=0}^{k=n} k^2 + \sum_{k=0}^{k=n} k\right)$.

Soit $E(S_n) = \frac{2}{(n+1)(n+2)}.\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}\right) = \frac{2}{(n+1)(n+2)}\frac{n(n+1)}{2}\left(\frac{(2n+1)}{3} + 1\right)$

Finalement : $E(S_n) = \frac{2}{(n+1)(n+2)}\frac{n(n+1)}{2}\left(\frac{(2(n+2)}{3}\right) = \frac{2n}{3}$.

10. (a) $\forall k \in [\![0;n]\!]$, $P_{[S_n=k]}([X_{n+1} = 1])$ est la probabilité de tirer au $n+1$-ième tirage une boule rouge dans une urne qui , après n tirages ayant amené k rouges , contient $n+3$ boules dont $2+k$ sont rouges .

On a donc bien $P_{[S_n=k]}([X_{n+1} = 1]) = \frac{k+2}{n+3}$.

(b) La formule des probabilités totales associée au système complet d'événements $([S_n = k])_{k \in [\![0;n]\!]}$ fournit :

$P([X_{n+1} = 1]) = \sum_{k=0}^{k=n} P_{[S_n=k]}([X_{n+1} = 1])\, P([S_n = k])$

$\mathrm{P}([X_{n+1}=1]) = \sum\limits_{k=0}^{k=n} \dfrac{k+2}{n+3}\mathrm{P}([S_n=k]) = \dfrac{1}{n+3}\left(\sum\limits_{k=0}^{k=n} k.\mathrm{P}([S_n=k]) + \sum\limits_{k=0}^{k=n} 2.\mathrm{P}([S_n=k])\right)$

$\mathrm{P}([X_{n+1}=1]) = \dfrac{1}{n+3}\left(\mathrm{E}(S_n)+2\right) = \dfrac{\mathrm{E}(S_n)+2}{n+3}$.

(c) X_{n+1} suit une loi de Bernoulli et ,puisque $\mathrm{E}(S_n) = \dfrac{2n}{3}$, son paramètre est :

$\mathrm{P}([X_{n+1}=1]) = \dfrac{\mathrm{E}(S_n)+2}{n+3} = \dfrac{\frac{2n}{3}+2}{n+3} = \dfrac{\frac{2n+6}{3}}{n+3} = \dfrac{2}{3}$.

On remarque que : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \text{ , } X_n \text{ suit une loi de Bernoulli de paramètre } \dfrac{2}{3}}$

Partie IV : Étude d'une convergence en loi

On s'intéresse dans cette partie à la proportion de boules rouges obtenues lors des n premiers tirages.
On pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $\quad T_n = \dfrac{S_n}{n}$.

11. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $S_n(\Omega) = [\![0;n]\!]$ donc $T_n(\Omega) = \left\{0, \dfrac{1}{n}, \ldots, \dfrac{n-1}{n}, 1\right\} \subset [0;1]$.
Ainsi,
$\forall x < 0, \quad \mathrm{P}([T_n \leqslant x]) = 0, \quad$ et : $\quad \forall x > 1, \quad \mathrm{P}([T_n \leqslant x]) = 1$.

12. Soit $x \in [0;1]$ et soit n de $\mathbb{N}^*$:
$\mathrm{P}([T_n \leqslant x]) = \mathrm{P}([S_n \leqslant nx]) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\lfloor nx \rfloor} \mathrm{P}([S_n=k]) = \sum_{k=0}^{\lfloor nx \rfloor} \dfrac{2(k+1)}{(n+1)(n+2)}$ d'après le résultat de la question 8. (b) de la partie III.
Ainsi,
$\mathrm{P}([T_n \leqslant x]) = \dfrac{2}{(n+1)(n+2)} \displaystyle\sum_{k=0}^{\lfloor nx \rfloor}(k+1) = \dfrac{2}{(n+1)(n+2)} \sum_{j=1}^{\lfloor nx \rfloor+1} j$ (changement d'indice $j = k+1$)
Or, $\displaystyle\sum_{j=1}^{m} j = \dfrac{m(m+1)}{2}$ donc, avec $m = \lfloor nx \rfloor + 1$ on obtient :
$\mathrm{P}([T_n \leqslant x]) = \dfrac{2}{(n+1)(n+2)} \dfrac{(\lfloor nx \rfloor+1)(\lfloor nx \rfloor+2)}{2}$
<u>Conclusion :</u> $\boxed{\mathrm{P}([T_n \leqslant x]) = \dfrac{(\lfloor nx \rfloor+1)(\lfloor nx \rfloor+2)}{(n+1)(n+2)} \text{ si } x \in [0;1]}$

13. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction de répartition de T_n est donnée par :
$$\mathrm{P}([T_n \leqslant x]) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ \dfrac{(\lfloor nx \rfloor+1)(\lfloor nx \rfloor+2)}{(n+1)(n+2)} & \text{si} \quad x \in [0;1] \\ 1 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}.$$
Etudions la limite de $\dfrac{(\lfloor nx \rfloor+1)(\lfloor nx \rfloor+2)}{(n+1)(n+2)}$ lorsque n tend vers $+\infty$:
$\dfrac{(\lfloor nx \rfloor+1)(\lfloor nx \rfloor+2)}{(n+1)(n+2)} = \dfrac{(\lfloor nx \rfloor+1)}{(n+1)}.\dfrac{(\lfloor nx \rfloor+2)}{(n+2)}$
Or, $\dfrac{(\lfloor nx \rfloor+1)}{(n+1)} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n}$.
Et pour tout $x \in [0;1]$, $\qquad nx - 1 \leqslant \lfloor nx \rfloor \leqslant nx \Rightarrow x - \dfrac{1}{n} \leqslant \dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n} \leqslant x$
Ainsi d'après le théorème de l'encadrement, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n} = x$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \dfrac{(\lfloor nx \rfloor+1)}{(n+1)} = x$.

De même, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(\lfloor nx \rfloor + 2)}{(n+2)} = x$.

Ainsi, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{P}\left([T_n \leqslant x]\right) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ x^2 & \text{si} \quad x \in [0;1] \\ 1 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}}$. Notons $G(x)$ cette fonction. Il reste à prouver que G est la fonction de répartition d'une variable à densité.

- G est continue sur $]-\infty;0[$, $]0;1[$ et $]1;+\infty[$. De plus, $\lim\limits_{x\to 0^-} G(x) = 0 = G(0)$ et $\lim\limits_{x\to 1^+} G(x) = 1 = G(1)$ donc G est continue sur $\mathbb{R}$.
- G est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0 et en 1.
- G est croissante sur $\mathbb{R}$.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} G(x) = 1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} G(x) = 0$

Aini, G est la fonction de répartition d'une variable à densité dont une densité est

$$g(x) = \begin{cases} 2x & \text{si} \qquad x \in [0;1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$\boxed{(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge en loi vers une variable à densité dont la fonction de répartition est } G \text{ et une densité est } g}$.