ECE 2 - Année 2020-2021
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

# Concours Blanc n°4 - Sujet B

*Mercredi 10 Mars*
*Durée : 4 heures*

# Exercice 1

On désigne par $E$ l'espace vectoriel des fonctions polynômiales de degré inférieur ou égal à 2 et on note $\mathcal{B}$ la base $(e_0, e_1, e_2)$ de $E$, où pour tout réel $x$, on a : $e_0(x) = 1$, $e_1(x) = x$ et $e_2(x) = x^2$.

On considère l'application, notée $f$, qui à toute fonction polynômiale $P$ appartenant à $E$ associe la fonction polynômiale $f(P)$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ (f(P))(x) = 2xP(x) - \left(x^2 - 1\right) P'(x).$$

(1) (a) Montrer que $f$ est une application linéaire.
(b) Écrire $f(e_0)$, $f(e_1)$ et $f(e_2)$ comme des combinaisons linéaires de $e_0$, $e_1$ et $e_2$. En déduire que $f$ est un endomorphisme de $E$ puis exprimer la matrice $A$ de $f$ dans la base $\mathcal{B}$.

(2) (a) Vérifier que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(e_1, e_0 + e_2)$ et donner $\mathrm{rg}(f)$. En déduire une valeur propre de $f$.
(b) Expliciter alors une base de $\mathrm{Ker}(f)$.

(3) (a) Calculer $A^3$. En déduire un polynôme annulateur de $A$.
(b) En déduire que $f$ est diagonalisable et donner les sous-espaces propres de $f$.
(c) Vérifier que les sous-espaces propres de $f$, autres que $\mathrm{Ker}(f)$, sont inclus dans $\mathrm{Im}(f)$.

# Exercice 2

On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x^2}\displaystyle\int_0^x \dfrac{t}{e^t+1}\mathrm{d}t, & \text{si } x > 0 \\ \dfrac{1}{2}, & \text{si } x = 0 \end{cases}.$

(1) (a) Montrer que : $\forall x \in ]0, +\infty[$, $\forall t \in [0, x]$

$$\frac{1}{e^x+1} \leq \frac{1}{e^t+1} \leq \frac{1}{2}.$$

(b) Établir alors que, pour tout réel $x$ strictement positif, on a : $\dfrac{1}{e^x+1} \leq f(x) \leq \dfrac{1}{2}$.

(c) En déduire que la fonction $f$ est continue (à droite) en 0.

(2) (a) Montrer que $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ puis vérifier que, pour tout réel $x$ strictement positif, on peut écrire
$$f'(x) = -\frac{4}{x^3}g(x),$$
où $g$ est une fonction que l'on déterminera.

(b) Étudier les variations, puis le signe de la fonction $g$. En déduire que $f$ est décroissante sur $\mathbb{R}^+$.

(3) (a) Montrer que, pour tout réel $t$ positif, on a : $\dfrac{t}{e^t+1} \leq 1$.

(b) En déduire la limite de $f(x)$ lorsque $x$ tend vers $+\infty$.

# Exercice 3

Dans cet exercice, on considère un $n-$échantillon $(X_1, ..., X_n)$ d'une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\theta$ inconnu ($\theta \in ]0,+\infty[$). On souhaite estimer le paramètre $\exp(-\theta)$.

On note, pour $k \in [\![1;n]\!]$, $S_k = \sum_{i=1}^{k} X_i$, puis on définit, pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, la variable aléatoire $Y_i$ par
$$Y_i = \begin{cases} 1, & \text{si } X_i = 0 \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}, \quad \text{et on note} \quad \overline{Y_n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i.$$

(1) Préciser, pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, la loi de $S_k$ et, pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, la loi de $Y_i$.

(2) Donner la loi de $n\overline{Y}_n$, puis en déduire que $\overline{Y}_n$ est un estimateur sans biais de $\exp(-\theta)$.

(3) Déterminer le risque quadratique $r\left(\overline{Y}_n\right)$. En déduire que $\overline{Y}_n$ est un estimateur convergent.

(4) Montrer que pour tout $j$ entier naturel, $P_{[S_n=j]}(X_1 = 0) = \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^j$.

On introduit alors, pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'estimateur $T_n = \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^{S_n}$.

(5) Montrer que $T_n$ admet une espérance et que c'est encore un estimateur sans biais de $\exp(-\theta)$.

(6) Montrer que $T_n$ admet une variance vérifiant
$$V(T_n) = \exp(-2\theta)\left(\exp\left(\frac{\theta}{n}\right) - 1\right).$$
L'estimateur $T_n$ est-il convergent?

(7) On souhaite comparer les performances de $\overline{Y_n}$ et $T_n$ en tant qu'estimateurs de $\exp(-\theta)$.

(a) En utilisant le théorème des accroissements finis, démontrer que
$$1 \leq \frac{\exp(\theta) - 1}{\theta} \leq \exp(\theta).$$

(b) Soit la fonction $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par
$$h(t) = t\exp(\theta) + (1-t) - \exp(t\theta)$$
pour tout $t \in [0,1]$. Étudier les variations de $h$.

(c) En déduire que

$$\exp\left(\frac{\theta}{n}\right) \leq \frac{\exp(\theta)}{n} + \frac{n-1}{n}.$$

(d) Quel estimateur parait alors le plus performant? On comparera les risques quadratiques.

(8) **Simulation informatique**.

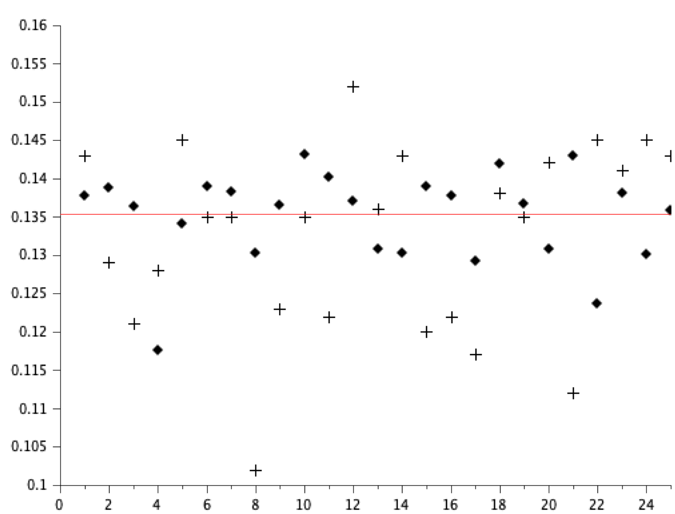
(a) Recopier et compléter les fonctions `SciLab` suivantes qui permettent de simuler des échantillons de taille $m$ de $\overline{Y}_n$ et $T_n$ respectivement.

```
function M=estimateur1(theta, m, n)
  M=zeros(1, m)
  X=.......................
  for k=1:m
    M(k)=length(find(X(k, :)==0))/n
  end
endfunction

function M=estimateur2(theta, m, n)
  M=zeros(1, m)
  X=..........................
  for k=1:m
    M(k)=(1-1/n)^(sum(X(k,:)))
  end
endfunction
```

(b) Recopier et compléter les instructions suivantes pour qu'elles permettent d'afficher la figure ci-jointe. Justifier.

```
n=1000; m=25
theta=.............
M=estimateur1(theta, m, n)
T=estimateur2(theta, m, n)
plot2d(........., style=-1) //-1 donne des +
plot2d(......... style=-4) //-4 donne des losanges
plot2d(0:m, exp(-2)*ones(1, m+1), style=5) //5 donne une ligne brisée rouge
```



# Problème

### Partie I - Formule de sommation par parties et critère d'Abel

Soient $(a_n)$ et $(b_n)$ deux suites. On note,

$$B_n = \sum_{k=1}^{n} b_k \qquad \text{et} \qquad S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k.$$

(1) Montrer, en remarquant que, pour $k \geq 2$, on a $B_k - B_{k-1} = b_k$, que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$S_n = a_{n+1} B_n - \sum_{k=1}^{n} B_k (a_k - a_{k+1}).$$

(2) Démontrer alors le critère d'Abel, dont l'énoncé suit.

*Si la suite $(a_n)$ tend vers 0, si la suite $(B_n)$ est bornée et si la série $\sum (a_k - a_{k+1})$ converge absolument, alors la série $\sum a_k b_k$ converge.*

### Partie II - Semi-convergence d'une série par le critère d'Abel

On considère la série $\sum (-1)^n \sqrt{n} \ln\left(\dfrac{n+2}{n}\right)$.

(3) Rappeler les DL en 0 à l'ordre 2 de

$$\ln(1+u) \qquad \text{et} \qquad \sqrt{1+u}.$$

(4) Montrer que

$$a_n = \sqrt{n} \ln\left(\frac{n+2}{n}\right) \sim \frac{2}{\sqrt{n}}, \qquad n \to +\infty$$

(5) En déduire que la série n'est pas absolument convergente.

(6) En écrivant $\sqrt{n+1} = \sqrt{n}\sqrt{1+\frac{1}{n}}$, montrer que

$$a_n - a_{n+1} \sim \frac{1}{n\sqrt{n}}, \qquad n \to +\infty.$$

(7) Conclure que le critère d'Abel s'applique et que la série est bien convergente.

### Partie III - Partie entière et partie décimale d'une variable gaussienne

On dit qu'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{Z}$ admet une espérance si et seulement si **les deux** séries de termes généraux respectifs $nP(X=n)$ et $nP(X=-n)$ convergent. Dans ce cas,

$$E(X) = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} kP(X=k) - \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} kP(X=-k).$$

Soit $T$ une variable aléatoire normale centrée réduite, on pose $X = \lfloor T \rfloor$ et $Y = T - X$. Dans toute cette partie, on note $\Phi$ la fonction de répartition de $T$. On donne

$$\Phi\left(\frac{1}{2}\right) \simeq 0.6915, \qquad \text{et} \qquad \Phi(1) \simeq 0.8413.$$

(8) Préciser $X(\Omega)$ et déterminer la loi de $X$ en fonction de la fonction de répartition $\Phi$ de la loi normale centrée réduite.

(9) Rappeler, pour $x \in \mathbb{R}$, le lien entre $\Phi(x)$ et $\Phi(-x)$. En déduire que
$$\forall k \in \mathbb{Z}, \qquad P(X = -k) = P(X = k-1).$$

(10) Montrer à l'aide de l'inégalité des accroissements finis que :
$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad \Phi(k+1) - \Phi(k) \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-k/2}.$$

(11) En déduire que $E(X)$ existe.

(12) (a) Montrer, à l'aide de la Question (1) de la Partie I, que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\sum_{k=1}^{n} k(P(X=k) - P(X=-k)) = n(\Phi(n+1) - \Phi(n)) + \Phi(0) - \Phi(n).$$

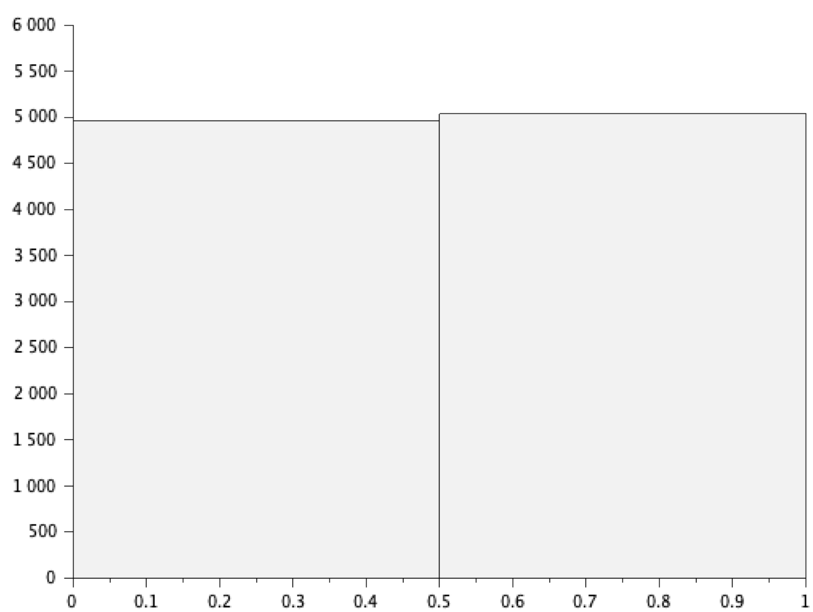
(b) En déduire la valeur de $E(X)$.

(13) Préciser $Y(\Omega)$ puis montrer que la fonction de répartition $F_y$ de $Y$ vérifie la relation
$$\forall y \in [0,1[, \qquad F_Y(y) = \Phi(y) - \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} (\Phi(k+y) - \Phi(k-y)).$$

(14) (a) Écrire une fonction `SciLab` d'en-tête `function U=sampleY(N)` qui simule un échantillon de taille $N$ de la variable $Y$.

(b) On rajoute à la suite de cette fonction les commandes ci-dessous qui renvoient la figure ci-contre. Que peut-on conjecturer?

```
Y=sampleY(10000)
histplot([0:0.5:1], Y, normalization=%f) //normalization=%f permet d'avoir
une hauteur égale au nombre d'élements dans la classe
```




(15) En observant que $k - 1/2 = k - 1 + 1/2$, déterminer $F_Y\left(\frac{1}{2}\right)$.

Interpréter.

(16) Comparer $P([X=0] \cap [Y \leq \frac{1}{2}])$ et $P(X=0)P(Y \leq \frac{1}{2})$.
Que peut-on en déduire?