ECE 2 - Année 2020-2021
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
`http://frederic.gaunard.com`

Concours Blanc n°4 - Sujet B

Mercredi 10 Mars
Durée : 4 heures

Exercice 1

Cet exercice provient du sujet **EDHEC 2011**.

On désigne par E l'espace vectoriel des fonctions polynômiales de degré inférieur ou égal à 2 et on note $\mathcal{B}$ la base (e_0, e_1, e_2) de E, où pour tout réel x, on a : $e_0(x) = 1$, $e_1(x) = x$ et $e_2(x) = x^2$.

On considère l'application, notée f, qui à toute fonction polynômiale P appartenant à E associe la fonction polynômiale $f(P)$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ (f(P))(x) = 2xP(x) - \left(x^2 - 1\right) P'(x).$$

(1) (a) Soient P, Q deux éléments de E et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. On observe que

$$\begin{aligned}
f(\lambda P + \mu Q)(x) &= 2x(\lambda P + \mu Q)(x) - (x^2 - 1)(\lambda P + \mu Q)'(x) \\
&= 2\lambda x P(x) + 2\mu x Q(x) - \lambda(x^2 - 1)P'(x) - \mu(x^2 - 1)Q'(x) \\
&= \lambda\left(2xP(x) - (x^2 - 1)P'(x)\right) + \mu\left(2xQ(x) - (x^2 - 1)Q'(x)\right) \\
&= \lambda f(P)(x) + \mu f(Q)(x)
\end{aligned}$$

et f est bien linéaire.

(b) On utilise la définition de f

$$\begin{aligned}
f(e_0)(x) &= 2xe_0(x) - (x^2 - 1)e_0'(x) \\
&= 2x \\
&= 2e_1(x),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f(e_1)(x) &= 2xe_1(x) - (x^2 - 1)e_1'(x) \\
&= 2x^2 - (x^2 - 1) \times 1 = x^2 + 1 \\
&= e_2(x) + e_0(x)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
f(e_2)(x) &= 2xe_2(x) - (x^2 - 1)e_2'(x) \\
&= 2x^3 - (x^2 - 1) \times (2x) = 2x \\
&= 2e_1(x)
\end{aligned}$$

Ainsi, les images par f des trois vecteurs de la base canonique de E sont combinaisons linéaires de e_0, e_1 et e_2. Par suite, tout élément de E, lui-même combinaison linéaire de e_0, e_1 et e_2 aura pour image par f, car celle-ci est linéaire, un élément encore combinaison linéaire de e_0, e_1 et e_2 donc élément de E; f est donc un endomorphisme de E. Sa matrice dans la base canonique est alors

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(2) (a) L'image de f est engendrée par les vecteurs qui forment les colonnes de A. Comme la première et la troisième colonne sont les mêmes, on peut ne garder que les deux première et remplacer la première colonne par la moitié de celle-ci. Ainsi,

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix};\ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix};\ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \mathrm{Vect}\left(e_1;\ e_0 + e_2\right).$$

Ces deux vecteurs sont clairement non colinéaires; la dimension de l'image (et donc le rang de f) est donc égale à 2. Par le théorème du rang, il suit que

$$\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 3 - 2 = 1,$$

en particulier 0 est valeur propre de f.

(b) On pourrait résoudre $AX = 0$ pour trouver une base de $\mathrm{Ker}(f)$, mais remarquant que $f(e_0) = f(e_2)$, on peut en déduire que $f(e_0 - e_2) = 0$ et que $e_0 - e_2 \in \mathrm{Ker}(f)$. Ce vecteur étant non nul et la dimension du noyau étant déjà connue et égale à 1, il en forme une base.

$$\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}(e_0 - e_2).$$

(3) (a) Le calcul donne

$$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 8 & 0 & 8 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} = 4A$$

ce qui permet d'écrire que $A^3 - 4A = 0$ et d'en déduire que le polynôme $X^3 - 4X = X(X^2 - 4)$ est un polynôme annulateur de A.

(b) Le polynôme a trois racines qui sont 0, 2 et -2 et qui sont donc les valeurs propres **possibles** pour A. On sait déjà que 0 est valeur propre. On vérifie donc pour les deux autres qu'elles le sont en résolvant les équations correspondantes.

- Pour $\lambda = 2$

$$\begin{aligned} AX = 2X &\iff \left\{\begin{array}{rcl} -2x + y &=& 0 \\ 2x - 2y + 2z &=& 0 \\ y - 2z &=& 0 \end{array}\right. \\ &\iff \left\{\begin{array}{rcl} z &=& x \\ y &=& 2x \end{array}\right. \\ &\iff X = \begin{pmatrix} x \\ 2x \\ x \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

L'équation a des solutions X non nulles; 2 est bien valeur propre de f et on peut écrire

$$E_2 = \mathrm{Vect}(e_0 + 2e_1 + e_2).$$

- Pour $\lambda = -2$

$$\begin{aligned} AX = -2X &\iff \left\{\begin{array}{rcl} 2x+y &=& 0 \\ 2x+2y+2z &=& 0 \\ y+2z &=& 0 \end{array}\right. \\ &\iff \left\{\begin{array}{rcl} z &=& x \\ y &=& -2x \end{array}\right. \\ &\iff X = \begin{pmatrix} x \\ -2x \\ x \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

L'équation a des solutions X non nulles; -2 est bien valeur propre de f et on peut écrire

$$E_{-2} = \mathrm{Vect}(e_0 - 2e_1 + e_2).$$

Comme f admet trois valeurs propres distinctes, on peut conclure que f est bien diagonalisable.

(c) On voit tout de suite, car on connait une base de $\mathrm{Im}(f)$,

$$e_0 + 2e_1 + e_2 = 1 \times (e_0 + e_2) + 2 \times e_1 \in \mathrm{Im}(f) \Longrightarrow E_2 = \mathrm{Vect}(e_0 + 2e_1 + e_2) \subset \mathrm{Im}(f).$$

et

$$e_0 - 2e_1 + e_2 = 1 \times (e_0 + e_2) - 2 \times e_1 \in \mathrm{Im}(f) \Longrightarrow E_{-2} = \mathrm{Vect}(e_0 + 2e_1 + e_2) \subset \mathrm{Im}(f).$$

Exercice 2

Cet exercice provient aussi du sujet **EDHEC 2011**.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = \left\{\begin{array}{ll} \dfrac{2}{x^2}\displaystyle\int_0^x \frac{t}{e^t+1}\mathrm{d}t, & \text{si } x > 0 \\ \dfrac{1}{2}, & \text{si } x = 0 \end{array}\right.$.

(1) (a) Par croissante de la fonction exponentielle, si $0 \le t \le x$, on a

$$\begin{aligned} 1 \le e^t \le e^x &\Longrightarrow 2 \le e^t + 1 \le e^x + 1 \\ &\Longrightarrow \frac{1}{e^x+1} \le \frac{1}{e^t+1} \le \frac{1}{2} \end{aligned}$$

(b) En multipliant par t l'encadrement précédent, on obtient

$$\frac{t}{e^x+1} \le \frac{t}{e^t+1} \le \frac{t}{2}$$

Par positivité de l'intégrale, il suit que

$$\frac{x^2}{2(e^x+1)} = \int_0^x \frac{t}{e^x+1}\mathrm{d}t \le \int_0^x \frac{t\mathrm{d}t}{e^t+1} \le \int_0^x \frac{t}{2}\mathrm{d}t = x^2.$$

En multipliant par $2/x^2$, on a bien

$$\frac{1}{e^x+1} \le f(x) \le \frac{1}{2}.$$

(c) Les deux termes qui encadrent $f(x)$ tendent tous deux vers $1/2$ en 0. Par le théorème des gendarmes,

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \frac{1}{2} = f(0),$$

et f est bien continue (à droite) en 0.

(2) (a) La fonction

$$\varphi :\ t \mapsto \frac{t}{e^t+1}$$

est continue sur $\mathbb{R}_+$. Par le théorème fondamental de l'analyse, la fonction

$$x \mapsto \int_0^x \frac{t}{e^t+1}\mathrm{d}t$$

est alors la primitive de φ qui s'annule en 0. À ce titre, elle est bien sûr $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$. De plus, la fonction

$$x \mapsto \frac{2}{x^2}$$

est aussi $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ comme multiple de l'inverse d'un polynôme qui ne s'annule pas. Par produit, f est bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus,

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{4}{x^3}\int_0^x \frac{t}{e^t+1}\mathrm{d}t + \frac{2}{x^2} \times \frac{x}{e^x+1} \\ &= -\frac{4}{x^3}\int_0^x \frac{t}{e^t+1}\mathrm{d}t + \frac{4}{x^3} \times \frac{x^2}{2(e^x+1)} \\ &= -\frac{4}{x^3}g(x), \end{aligned}$$

où on a posé

$$g(x) = \int_0^x \frac{t}{e^t+1}\mathrm{d}t - \frac{x^2}{2(e^x+1)}.$$

(b) On commence par dériver g

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{x}{e^x+1} - \frac{4x(e^x+1) - 2x^2e^x}{4(e^x+1)^2} \\ &= \frac{4x(e^x+1) - 4x(e^x+1) + 4x^2e^x}{4(e^x+1)^2} \\ &= \frac{x^2e^x}{(e^x+1)^2} \end{aligned}$$

quantité strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$. Ainsi g est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Étant clair que g est continue sur $\mathbb{R}_+$ (les mêmes arguments que pour le caractère $\mathcal{C}^1$ de f s'appliquent), g est en fait croissante sur $\mathbb{R}_+$. Comme $g(0) = 0$, on peut conclure que $g(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$. Il suit alors que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad f'(x) = -\frac{4}{x^3}g(x) < 0,$$

et f est (strictement) décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

(3) (a) Observant que

$$\frac{t}{e^t+1} \leq 1 \Longleftrightarrow e^t + 1 \geq t \Longleftrightarrow e^t \geq t - 1$$

on peut par exemple voir que, pour tout $t > 0$

$$e^t = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} > 1 + t > t - 1.$$

(b) Par positivité de l'intégrale, l'inégalité précédente donne

$$0 \leq \int_0^x \frac{t}{e^t+1}\mathrm{d}t \leq \int_0^x \mathrm{d}t = x$$

puis, en multipliant par $2/x^2$,

$$0 \leq f(x) \leq \frac{2}{x}.$$

Les deux termes qui encadrent $f(x)$ tendent vers 0 lorsque $x \to +\infty$, par le théorème des gendarmes, on peut conclure que

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$$

Exercice 3

Cet exercice est inspiré du sujet **ESSEC 2009**.

Dans cet exercice, on considère un $n-$échantillon $(X_1, ..., X_n)$ d'une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre θ inconnu ($\theta \in]0, +\infty[$). On souhaite estimer le paramètre $\exp(-\theta)$.

On note, pour $k \in [\![1; n]\!]$, $S_k = \sum_{i=1}^{k} X_i$, puis on définit, pour tout $i \in [\![1; n]\!]$, la variable aléatoire Y_i par

$$Y_i = \begin{cases} 1, & \text{si } X_i = 0 \\ 0, & \text{sinon} \end{cases} \quad , \quad \text{et on note} \quad \overline{Y_n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i.$$

(1) D'après le cours, la somme de variables indépendantes suivant des loi de Poisson est encore une loi de Poisson dont le paramètre est égal à la somme des paramètres des variables sommées. Ainsi,

$$S_k \hookrightarrow \mathcal{P}(k\theta).$$

Chaque variable Y_i est clairement une variable de Bernoulli dont le paramètre est

$$P(Y_i = 1) = P(X_i = 0) = e^{-\theta}.$$

(2) Toujours d'après le cours, $n\overline{Y}_n$ est une somme de variables de Bernoulli indépendantes et de même paramètre, c'est donc une loi binomiale

$$n\overline{Y}_n \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, e^{-\theta}\right).$$

Il suit que

$$E(n\overline{Y}_n) = ne^{-\theta},$$

puis, par linéarité de l'espérance

$$E(\overline{Y}_n) = e^{-\theta},$$

et $\overline{Y}_n$ est bien un estimateur (en tant que fonction de l'échantillon et qui ne dépend pas de θ) sans biais de $e^{-\theta}$.

(3) L'estimateur étant sans biais, son risque quadratique est égal à sa variance. On a alors, d'après les formules du cours sur la variance d'une binomiale et avec les propriétés de la variance,

$$\begin{aligned} r(\overline{Y}_n) &= V(\overline{Y}_n) = V\left(\frac{1}{n} \times n\overline{Y}_n\right) \\ &= \frac{1}{n^2} V(\overline{Y}_n) = \frac{ne^{-\theta}(1-e^{-\theta})}{n^2} \\ &= \frac{e^{-\theta}(1-e^{-\theta})}{n}. \end{aligned}$$

Le risque quadratique de $\overline{Y}_n$ tend vers 0: c'est donc bien un estimateur convergent de $e^{-\theta}$.

(4) On utilise la définition de probabilité conditionnelle

$$\begin{aligned} P_{[S_n=j]}(X_1 = 0) &= \frac{P(S_n = j \cap X_1 = 0)}{P(S_n = j)} \\ &= \frac{P(X_1 = 0 \cap \sum_{i=2}^n X_i = j)}{P(S_n = j)} \end{aligned}$$

Or, par le lemme des coalition, X_1 et $\displaystyle\sum_{i=2}^n X_i$ sont indépendantes, et, pour la même raison que précédemment,

$$\sum_{i=2}^n X_i \hookrightarrow \mathcal{P}((n-1)\theta).$$

Il suit que

$$\begin{aligned} P_{[S_n=j]}(X_1 = 0) &= \frac{P(X_1 = 0)P(\sum_{i=2}^n X_i = j)}{P(S_n = j)} \\ &= \frac{e^{-\theta}e^{-(n-1)\theta}\frac{((n-1)\theta))^j}{j!}}{e^{-n\theta}\frac{(n\theta)^j}{j!}} \\ &= \frac{(n-1)^j}{n^j} = \left(\frac{n-1}{n}\right)^j \\ &= \left(1 - \frac{1}{n}\right)^j, \end{aligned}$$

ce qu'on voulait.

On introduit alors, pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'estimateur $T_n = \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^{S_n}$.

(5) D'après le théorème de transfert,

$$T_n \text{ admet une espérance} \iff \sum_{k \geq 0} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k P(S_n = k) \text{ converge .}$$

Or,

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k P(S_n = k) &= \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k e^{-n\theta}\frac{(n\theta)^k}{k!} \\ &= e^{-n\theta}\left[\left(1 - \frac{1}{n}\right)n\theta\right]^k \times \frac{1}{k!} \end{aligned}$$

et on reconnait le multiple du terme général d'une série exponentielle convergence de paramètre

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)n\theta.$$

Ainsi, T_n admet une espérance et

$$\begin{aligned} E(T_n) &= e^{-n\theta}\sum_{k=0}^{+\infty}\left[\left(1-\frac{1}{n}\right)n\theta\right]^k \times \frac{1}{k!} \\ &= e^{-n\theta}\exp\left(\left(1-\frac{1}{n}\right)n\theta\right) \\ &= \exp(-\theta), \end{aligned}$$

et T_n est encore un estimateur sans biais de $\exp(-\theta)$.

(6) Toujours d'après le théorème de transfert,

$$\begin{aligned} T_n \text{ admet une variance} &\iff T_n^2 \text{ admet une espérance} \\ &\iff \sum_{k\geq 0}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{2k} P(S_n=k) \text{ converge .} \end{aligned}$$

C'est encore une série exponentielle, cette fois de paramètre

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^2 n\theta.$$

Ainsi T_n admet une variance, son moment d'ordre 2 vaut

$$\begin{aligned} E(T_n^2) &= \exp(-n\theta)\exp\left(\left(1-\frac{1}{n}\right)^2 n\theta\right) \\ &= \exp\left(-2\theta+\frac{\theta}{n}\right) \end{aligned}$$

Par la formule de König-Huygens, on obtient alors

$$\begin{aligned} V(T_n) &= E(T_n^2)-E(T_n)^2 \\ &= \exp\left(-2\theta+\frac{\theta}{n}\right)-\exp(-\theta)^2 \\ &= \exp(-2\theta)\left(\exp\left(\frac{\theta}{n}\right)-1\right). \end{aligned}$$

Comme $\theta/n\to 0$, $e^{\theta/n}-1\to 1$ et $V(T_n)\to 0$. Comme T_n est un estimateur sans biais de $e^{-\theta}$, son risque quadratique est égal à sa variance et tend donc vers 0; c'est encore un estimateur convergent.

(7) On souhaite comparer les performances de $\overline{Y_n}$ et T_n en tant qu'estimateurs de $\exp(-\theta)$.

(a) La fonction exponentielle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et *a fortiori* sur $[0;\theta]$. Sa dérivée est encore la fonction exponentielle qui admet pour minimum 1 et pour maximum $\exp(\theta)$ sur $[0;\theta]$. Ainsi, par l'inégalité des accroissements finis sur ce même intervalle

$$1\times(\theta-0)\leq \exp(\theta)-\exp(0)\leq e^\theta(\theta-0)$$

ou encore

$$\theta\leq e^\theta-1\leq e^\theta\theta.$$

En divisant par $\theta>0$, on a bien

$$1\leq\frac{\exp(\theta)-1}{\theta}\leq\exp(\theta).$$

(b) La fonction h (dont la variable est t et pas θ, attention!) est bien dérivable sur $[0:1]$ comme combinaison de fonctions usuelles dérivables sur ce même intervalle. Pour $t \in [0;1]$, on a

$$h'(t) \quad = \quad e^{\theta} - 1 - \theta e^{t\theta} = \theta \left(\frac{e^{\theta} - 1}{\theta} - e^{t\theta} \right)$$

On a donc

$$h'(t) \geq 0 \Longleftrightarrow t \leq \frac{1}{\theta} \ln \left(\frac{e^{\theta} - 1}{\theta} \right) = t_0$$

(Observons que l'inégalité du (a) permet de voir que

$$t_0 \leq \frac{1}{\theta} \ln(e^{\theta}) = 1$$

et donc $t_0 \in [0;1]$). Notant

$$M = h(t_0) = h \left(\frac{1}{\theta} \ln \left(\frac{e^{\theta} - 1}{\theta} \right) \right),$$

on a les variations de h

t	0		t_0		1
$h'(t)$		$+$	0	$-$	
h	0	$\nearrow$	M	$\searrow$	0

En particulier, pour tout $t \in [0;1]$,

$$h(t) \geq 0.$$

(c) En utilisant l'inégalité précédente avec $t = 1/n$, on obtient

$$\frac{e^{\theta}}{n} + \left(1 - \frac{1}{n}\right) - \exp\left(\frac{\theta}{n}\right) \geq 0 \Longleftrightarrow \exp\left(\frac{\theta}{n}\right) \leq \frac{e^{\theta}}{n} + \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{\exp(\theta)}{n} + \frac{n-1}{n},$$

ce qu'on voulait.

(d) L'estimateur le plus performant est celui au risque quadratique le plus petit. On a

$$r(\overline{Y}_n) = \frac{e^{-\theta}(1 - e^{-\theta})}{n}, \qquad r(T_n) = \exp(-2\theta) \left(\exp\left(\frac{\theta}{n}\right) - 1 \right).$$

D'après ce qui précède,

$$\exp\left(\frac{\theta}{n}\right) - 1 \leq \frac{\exp(\theta)}{n} + \frac{n-1}{n} - 1 = \frac{\exp(\theta)}{n} - \frac{1}{n} = \frac{\exp(\theta) - 1}{n}.$$

Mais alors

$$r(T_n) = e^{-2\theta} \left(\exp\left(\frac{\theta}{n}\right) - 1 \right) \leq e^{-\theta} e^{-\theta} \left(\frac{\exp(\theta) - 1}{n} \right) = \frac{e^{-\theta}(1 - e^{-\theta})}{n} = r(\overline{Y}_n)$$

et T_n est donc plus performant que $\overline{Y}_n$.

(8) **Simulation informatique.**

(a) Il faut dans les deux cas générer une matrice aléatoire X dont chaque coefficient est la réalisation d'une variable de loi de Poisson de paramètre θ. Il manque donc à chaque fois

```
X=grand(m, n, 'poi', theta)
```

(b) Il est clair qu'il s'agit de réalisation des estimateurs $\overline{Y}_n$ et T_n. Reste à savoir qui est qui. Déjà, les valeurs semblent se concentrer autour de la ligne en rouge qui est la droite d'équation $y = e^{-2}$ or les deux estimateurs sont censés donner des estimations de $e^{-\theta}$, on peut donc penser que $\theta = 2$. Les losanges sont moins dispersés que les + laissant penser qu'ils représentent le meilleur estimateur, à savoir T_n. Ce qui donne:

```
n=1000; m=25
theta=2
M=estimateur1(theta, m, n)
T=estimateur2(theta, m, n)
plot2d(M,  style=-1) //-1 donne des +
plot2d(T, style=-4) //-4 donne des losanges
plot2d(0:m, exp(-2)*ones(1, m+1), style=5) //5 donne une ligne brisée rouge
```

Problème

Partie I - Formule de sommation par parties et critère d'Abel

Soient (a_n) et (b_n) deux suites. On note,

$$B_n = \sum_{k=1}^{n} b_k \qquad \text{et} \qquad S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k.$$

(1) L'idée principale de cette question est d'observer que

$$b_k = B_k - B_{k-1}, \quad k \geq 2.$$

et que $b_1 = B_1$. Ainsi,

$$\begin{aligned} S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k &= a_1 b_1 + \sum_{k=2}^{n} a_k (B_k - B_{k-1}) \\ &= a_1 B_1 + \sum_{k=2}^{n} a_k B_k - \sum_{k=2}^{n} a_k B_{k-1} \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_k B_k - \sum_{k=1}^{n-1} a_{k+1} B_k \qquad \text{(changement d'indice)} \\ &= a_{n+1} B_n - \sum_{k=1}^{n} B_k (a_k - a_{k+1}), \end{aligned}$$

ce qui est bien la formule attendue.

(2) Supposons donc que
- ⋆ La suite (a_n) tend vers 0;
- ⋆ la suite (B_n) est bornée;
- ⋆ la série $\sum (a_{k+1} - a_k)$ converge absolument.

On peut alors déduire que

- la suite $(a_n B_n)$ converge vers 0. En effet, comme (B_n) est bornée, il existe $M \geq 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|B_n| \leq M$. Il suit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$-M a_n \leq a_n B_n \leq M a_n$$

et par le théorème des gendarmes, $a_n B_n$ tend bien vers 0;

- La série $\sum B_k(a_k - a_{k+1})$ converge (absolument). En effet,

$$|B_k(a_k - a_{k+1})| \leq M|a_{k+1} - a_k|$$

et comme par hypothèse la série $\sum(a_k - a_{k+1})$ converge absolument, le critère de comparaison pour les séries à termes positifs permet d'affirmer que la série $\sum B_k(a_k - a_{k+1})$ converge absolument et donc converge.

Ainsi, la somme partielle S_n admet une limite finie, ce qui est la définition d'une série convergente.

Partie II - Semi-convergence d'une série par le critère d'Abel

On considère la série $\sum (-1)^n \sqrt{n} \ln\left(\frac{n+2}{n}\right)$.

(3) On énonce les formules des DL en 0, à l'ordre 2, qu'on connait sur le bout des doigts:

$$\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + o(u^2), \qquad \text{et} \qquad \sqrt{1+u} = 1 + \frac{u}{2} - \frac{u^2}{8} + o(u^2).$$

(4) On commence par réécrire la quantité dans le log.

$$\begin{aligned} a_n &= \sqrt{n}\ln\left(\frac{n+2}{n}\right) \\ &= \sqrt{n}\ln\left(1+\frac{2}{n}\right) \\ &= \sqrt{n}\left(\frac{2}{n} - \frac{2}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &= \frac{2\sqrt{n}}{n} + o\left(\frac{\sqrt{n}}{n}\right) \\ &\sim \frac{2}{\sqrt{n}}, \quad n \to +\infty. \end{aligned}$$

(5) Comme

$$\left|(-1)^n\sqrt{n}\ln\left(\frac{n+2}{n}\right)\right| = a_n \sim \frac{2}{\sqrt{n}}, \quad n \to +\infty,$$

le critère d'équivalence (en comparaison à une série de Riemann divergente) permet d'affirmer que la série ne converge pas absolument.

(6) On utilise les DL rappelés ci-dessus.

$$\begin{aligned} a_n - a_{n+1} &= \sqrt{n}\ln\left(1+\frac{2}{n}\right) - \sqrt{n}\sqrt{1+\frac{1}{n}}\ln\left(1+\frac{2}{n+1}\right) \\ &= \sqrt{n}\left(\ln\left(1+\frac{2}{n}\right) - \sqrt{1+\frac{1}{n}}\ln\left(1+\frac{2}{n+1}\right)\right) \\ &= \sqrt{n}\left(\frac{2}{n} + \frac{2}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) - \left(1+\frac{1}{2n} - \frac{1}{8n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\left(\frac{2}{(n+1)} - \frac{2}{(n+1)^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_n - a_{n+1} &= \sqrt{n}\left(\frac{2}{n} - \frac{2}{n^2} - \frac{1}{n(n+1)} - \frac{2}{n+1} + \frac{2}{(n+1)^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\\
&= \sqrt{n}\left(\frac{2}{n(n+1)} - \frac{1}{n(n+1)} + \frac{2n^2-2(n+1)^2}{n^2(n+1)^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\\
&= \sqrt{n}\left(\frac{1}{n(n+1)} + \frac{2-4n}{n^2(n+1)^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\\
&= \sqrt{n}\left(\frac{1}{n(n+1)} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\\
&\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{n}}{n^2} = \frac{1}{n\sqrt{n}}
\end{aligned}$$

(7) On vérifie que les hypothèses du critères sont bien satisfaites:

- Comme $a_n \sim 2/\sqrt{n}$, on a bien que $a_n \to 0$;
- La suite (B_n) est bornée. En effet
$$B_n = \sum_{k=1}^{n}(-1)^k = \begin{cases} 0, & \text{si } n \text{ est pair}\\ 1, & \text{sinon.}\end{cases}$$
Donc $|B_n| \leq 1$;
- La série $\sum(a_k - a_{k+1})$ converge absolument. En effet,
$$|a_k - a_{k+1}| = a_k - a_{k+1} \sim \frac{1}{k\sqrt{k}}$$
et par équivalence avec une série de Riemann convergente, on a bien la convergence.

Tous les critères sont satisfaits, la série considérée converge.

Partie III - Partie entière et partie décimale d'une variable gaussienne

On dit qu'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{Z}$ admet une espérance si et seulement si **les deux** séries de termes généraux respectifs $nP(X=n)$ et $nP(X=-n)$ convergent. Dans ce cas,

$$E(X) = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n} kP(X=k) - \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n} kP(X=-k).$$

Soit T une variable aléatoire normale centrée réduite, on pose $X = \lfloor T \rfloor$ et $Y = T - X$. Dans toute cette partie, on note Φ la fonction de répartition de T. On donne

$$\Phi\left(\frac{1}{2}\right) \simeq 0.6915, \qquad \text{et} \qquad \Phi(1) \simeq 0.8413.$$

(8) T prend ses valeurs dans $\mathbb{R}$ tout entier donc $X = \lfloor T \rfloor$ prend ses valeurs dans $\mathbb{Z}$. Soit $k \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}
P(X=k) &= P(\lfloor T \rfloor = k) = P(k \leq T < k+1)\\
&= P(T < k+1) - P(T < k)\\
&= \Phi(k+1) - \Phi(k).
\end{aligned}$$

(9) Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après les propriété de symétrie de la densité de T, on sait que

$$\Phi(-x) = P(T \leq -x) = P(T \geq x) = 1 - P(T < x) = 1 - \Phi(x).$$

Soit alors $k \in \mathbb{Z}$, d'après la question précédente,

$$P(X=-k) = \Phi(-k+1) - \Phi(-k) = 1 - \Phi(k-1) - 1 + \Phi(k) = \Phi(k) - \Phi(k-1) = P(X = k-1).$$

(10) Soit $k \in \mathbb{N}$. On sait que Φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et *a fortiori* sur $[k;k+1]$. On a de plus,

$$\forall x \in [k, k+1], \qquad |\Phi'(x)| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-k^2/2}.$$

Ainsi, par l'inégalité des accroissements finis, on obtient bien

$$\Phi(k+1) - \Phi(k) = |\Phi(k+1) - \Phi(k)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-k^2/2} |k+1-k| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-k^2/2}.$$

(11) Pour que cette espérance existe, il faut que les deux séries de termes généraux respectifs $kP(X = k)$ et $kP(X = -k)$ convergent.

- D'après la question précédente

$$0 \leq kP(X=k) = k\left(\Phi(k+1) - \Phi(k)\right) \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} k e^{-k^2/2}.$$

Or, il est relativement clair, par croissance comparée, que

$$k e^{-k^2/2} = o\left(\frac{1}{k^2}\right), \qquad k \to +\infty.$$

Par comparaison (pour des séries à termes positifs) par négligeabilité à une série de Riemann convergente, on peut conclure à la convergence de la première série, de terme général $kP(X = k)$.

- D'autre part, avec ce qui précède,

$$0 \leq kP(X=-k) = kP(X=k-1) = k\left(\Phi(k) - \Phi(k-1)\right) \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} k e^{-(k-1)^2/2}.$$

Pour le même argument que précédemment, on a à nouveau convergence de la série de terme général $kP(X = -k)$.

On peut donc conclure que $E(X)$ existe.

(12) (a) On reprend les notations de la Question (1) de la Partie I, en posant

$$B_k = k, \qquad a_k = P(X = k-1),$$

(avec évidemment $b_k = 1$), ce qui donne

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k(P(X=k) - P(X=-k)) &= \sum_{k=1}^{n} k(P(X=k) - P(X=k-1)) = \sum_{k=1}^{n} B_k(a_{k+1} - a_k)) \\
&= a_{n+1}B_n - S_n = nP(X=n) - \sum_{k=1}^{n} P(X=k-1) \\
&= n\left(\Phi(n+1) - \Phi(n)\right) - \sum_{k=1}^{n} (\Phi(k) - \Phi(k-1)) \\
&= n\left(\Phi(n+1) - \Phi(n)\right) - \Phi(n) + \Phi(0) \qquad \text{(par télescopage)},
\end{aligned}$$

ce qui est bien la formule attendue.

$$\sum_{k=1}^{n} k(P(X=k) - P(X=-k)) = n(\Phi(n+1) - \Phi(n)) + \Phi(0) - \Phi(n).$$

(b) Par l'inégalité obtenue à la Question (10), on a

$$0 \leq n(\Phi(n+1) - \Phi(n)) \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} n e^{-n^2/2}$$

Or, toujours par croissance comparé, $ne^{-n^2/2} \to 0$. Par le théorème des gendarmes, il suit que

$$\lim_{n\to+\infty} n(\Phi(n+1) - \Phi(n)) = 0$$

puis que

$$\begin{aligned} E(X) &= \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} k(P(X=k) - P(X=-k)) \\ &= \Phi(0) - \lim_{n\to+\infty} \Phi(n) = \Phi(0) - 1 \\ &= \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

(13) L'écart entre un nombre réel et sa partie entière est un nombre réel de $[0;1[$ donc $Y(\Omega) = [0;1[$. Notamment, si $y < 0$, alors $F_Y(y) = 0$ et si $y \geq 1$, $F_Y(y) = 1$. Soit alors $y \in [0;1[$, par la formule des probabilités totales appliquées au s.c.e $\{[X=k] :\in \mathbb{Z}\}$, on a

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \leq y) = P(T - X \leq y) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} P(T - X \leq y \cap X = k) + \sum_{k=1}^{+\infty} P(T - X \leq y \cap X = -k) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} P(k \leq T \leq k+y) + \sum_{k=1}^{+\infty} P(-k \leq T \leq -k+y) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} (\Phi(k+y) - \Phi(k)) + \sum_{k=1}^{+\infty} (\Phi(-k+y) - \Phi(-k)) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} (\Phi(k+y) - \Phi(k)) + \sum_{k=1}^{+\infty} (\Phi(k) - \Phi(k-y)) \\ &= \Phi(y) - \Phi(0) + \sum_{k=1}^{+\infty} (\Phi(k+y) - \Phi(k-y)) \end{aligned}$$

où l'opération sur les sommes est bien licite :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{+\infty} (\Phi(k+y) - \Phi(k)) + \sum_{k=1}^{+\infty} (\Phi(k) - \Phi(k-y)) &= \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} (\Phi(k+y) - \Phi(k)) + \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} (\Phi(k) - \Phi(k-y)) \\ &= \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} (\Phi(k+y) - \Phi(k)) + \sum_{k=1}^{n} (\Phi(k) - \Phi(k-y)) \\ &= \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} (\Phi(k+y) - \Phi(k) + \Phi(k) - \Phi(k-y)) \\ &= \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} (\Phi(k+y) - \Phi(k-y)) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} (\Phi(k+y) - \Phi(k-y)), \end{aligned}$$

car la série de terme général $\Phi(k+y) - \Phi(k-y)$ est bien convergente (on peut encore utiliser l'inégalité des accroissements finis pour majorer par une exponentielle elle-même négligeable devant $1/k^2$). On attendait pas autant de rigueur pour cette question. Au final, on a bien montré que

$$\forall y \in [0,1[, \qquad F_Y(y) = \Phi(y) - \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} (\Phi(k+y) - \Phi(k-y)).$$

(14) (a) On propose le programme suivant, sans ambiguité

```
function U=sampleY(N)
    T=grand(1, N, 'nor', 0, 1)
    X=floor(T)
    U=T-X
endfunction
```

(b) On observe qu'environ la moitié de l'effectif est réparti dans chacune des deux classes (la moitié entre 0 et 1/2 et l'autre moitié entre 1/2 et 1). On peut alors notamment conjecturer que

$$F_Y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}.$$

(15) Comme $k - 1/2 = k - 1 + 1/2$, on a en particulier

$$\Phi\left(k+\frac{1}{2}\right) - \Phi\left(k-\frac{1}{2}\right) = \Phi\left(k+\frac{1}{2}\right) - \Phi\left(k-1+\frac{1}{2}\right)$$

faisant apparaître le terme d'une somme télescopique. Il suit que

$$\begin{aligned}
F_Y\left(\frac{1}{2}\right) &= \Phi\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\Phi\left(k+\frac{1}{2}\right) - \Phi\left(k-\frac{1}{2}\right)\right) \\
&= \Phi\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\Phi\left(k+\frac{1}{2}\right) - \Phi\left(k-1+\frac{1}{2}\right)\right) \\
&= \Phi\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} + \lim_{n\to+\infty} \Phi\left(n+\frac{1}{2}\right) - \Phi\left(\frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2},
\end{aligned}$$

ce qui est bien le résultat conjecturé.

(16) Commençons par calculer. D'une part,

$$\begin{aligned}
P\left([X=0] \cap [Y \leq \frac{1}{2}]\right) &= P\left(0 \leq T \leq \frac{1}{2}\right) \\
&= \Phi\left(\frac{1}{2}\right) - \Phi(0) \\
&\simeq 0.1915
\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
P(X=0)P\left(Y \leq \frac{1}{2}\right) &= P(0 \leq T < 1)F_Y\left(\frac{1}{2}\right) \\
&= (\Phi(1) - \Phi(0)) \times \frac{1}{2} \\
&\simeq 0.17065
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$P\left([X=0] \cap [Y \leq \frac{1}{2}]\right) \neq P(X=0)P\left(Y \leq \frac{1}{2}\right)$$

et les variables X et Y ne sont pas indépendantes.