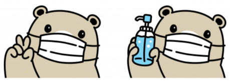
ECE 2 - Année 2020-2021
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com



Devoir Maison n°1

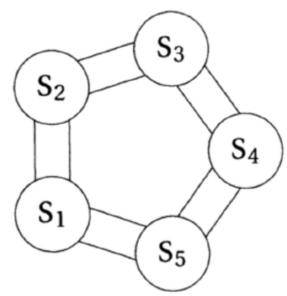
À rendre le 18/09

*Ce devoir est à faire **individuellement**. Toutes les réponses doivent êtres **justifiées** et **soigneusement rédigées**.*

Exercice 1

Deux personnes P_1 et P_2 ont rendez-vous dans un complexe formé de cinq sites S_1, S_2, S_3, S_4 et S_5, disposés en pentagone et reliés par des routes, comme l'illustre le schéma ci-contre.

Ils arrivent au rendez-vous à l'heure prévue, mais suite à un malentendu, P_1 se présente au site S_1 et P_2 au site S_2.



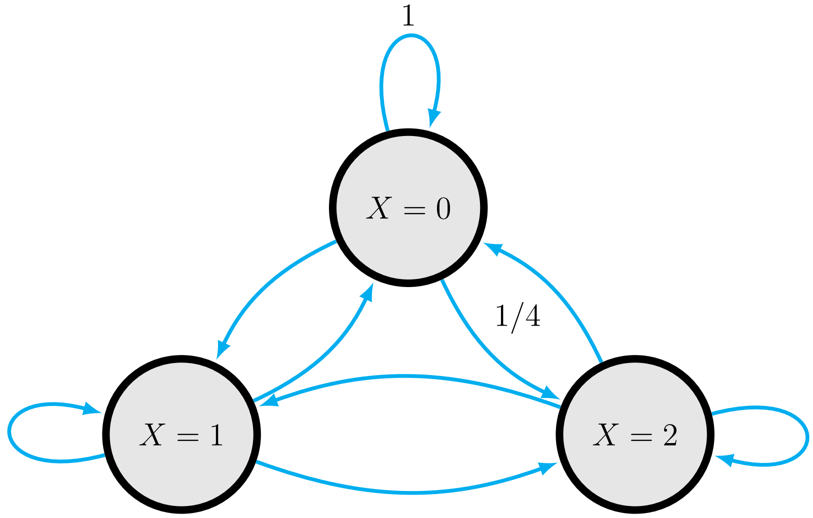
Ils décident alors de partir à la recherche I'un de l'autre. Ils empruntent les différentes routes du complexe, avec les règles suivantes

- à partir d'un site, chacun choisit de se rendre sur l'un des deux sites voisins, les deux possibilités étant équiprobables;
- les déplacements des deux personnes se font simultanément;
- tous les choix de déplacement se font indépendamment les uns des autres.

Ils continuent à se déplacer ainsi jusqu'à se retrouver éventuellement sur un même site (ils ne se rencontrent pas le long des routes). Une fois retrouvés, ils ne se déplacent plus.

Pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, on introduit la variable aléatoire X_n égale au nombre (minimal) de routes dont les deux personnes sont distantes après le $n-$ième déplacement. En particulier, $X_0 = 1$ et si elles se retrouvent après le $n-$ième déplacement, alors $X_n = 0$.

(1) Pour $n \in \mathbb{N}$, préciser $X_n(\Omega)$.
(2) Déterminer la loi de X_0.
(3) Recopier et compléter le diagramme de transition ci-dessous en justifiant les réponses et en expliquant à quoi correspondent les valeurs sur les arrêtes du graphe.



(4) Compléter la fonction `SciLab` suivane (d'argument n) afin qu'elle renvoie une simulation de la variable X_n

```
function y=X(n)
    y=1
    for k=1:n
        r=rand()
        if y==1 then
            if ............... then
                ...............
            end
         else
             if y==2 then
                 if ............... then
                     ...............
                 end
                 if ................. then
                     ...............
                 end
             end
        end
    end
endfunction
```

Pourquoi n'a-t-on pas besoin de considérer le cas `y==0` dans ce programme ?

(5) [1] Écrire un programme permettant de créer un échantillon de taille 100 de X_{10}, X_{20} et X_{50} et représenter les diagrammes à bâton des fréquences des valeurs obtenues. Commenter.

(6) On note, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n = P(X_n = 0), \quad b_n = P(X_n = 1) \quad \text{et} \quad P(X_n = 2) = c_n.$$

Établir les relations suivantes pour tout entier $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{cases} a_{n+1} &= a_n + \frac{1}{4}c_n \\ b_{n+1} &= \frac{3}{4}b_n + \frac{1}{4}c_n \\ c_{n+1} &= \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{2}c_n \end{cases}.$$

[1]Cette question ne pourra être traitée qu'après avoir fait le **TP n°1**

(7) (a) Exprimer b_{n+2} à l'aide de b_{n+1}, b_n et c_n puis exprimer c_n en fonction de b_{n+1} et b_n pour obtenir enfin une relation entre b_{n+2}, b_{n+1} et b_n.

(b) En déduire une expression de b_n en fonction de n. On fera intervenir les nombres
$$\alpha = \frac{5-\sqrt{5}}{8} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{5+\sqrt{5}}{8}.$$
(c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$c_n = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\beta^n - \alpha^n\right).$$
(8) On note Z l'évènement "les deux personnes se rencontrent à un moment".
(a) Exprimer Z à l'aide des évènements $[X_n = 0]$.
(b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq P(Z) \leq 1$.
(c) À partir de la somme $a_n + b_n + c_n$, déterminer la limite, lorsque n tend vers l'infini, de la suite (a_n).
(d) Quelle est la probabilité que les deux personnes ne se retrouvent jamais ?

Exercice 2

Les questions (1), (2) *et* (3) *de cet exercice sont indépendantes*

(1) À l'aide d'équivalentes, obtenir les limites des quantités suivantes
$$(i)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(e^{2x}-1\right)}{x-\ln(x)+2}, \qquad (ii)\ \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n+2)-\ln(n)}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}, \qquad (iii)\ \lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-1}{x+x^2}.$$
(2) Trouver une relation, et la justifier, de *négligeablité*, en $+\infty$, entre les quantités
$$\frac{1}{\sqrt{x}e^x}, \quad \text{et} \quad e^{-2x}\left(1-e^{-x^2/2}\right)^5.$$
(3) Soient N et f les fonctions définies sur l'intervalle $[0,1[$ par
$$N(x) = x^2 - 2x - 2(1-x)\ln(1-x)$$
et
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{-2(x+\ln(1-x))}{x^2}, & \text{si } 0 < x < 1 \\ 1, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$
(a) (i) Montrer que la fonction N est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1[$.
(ii) Montrer que pour tout $x \in [0,1[$, on a : $\ln(1-x) \leq -x$.
(iii) Montrer que pour tout $x \in [0,1[$, on a : $N'(x) \leq 0$.
(iv) En déduire le signe de N sur l'intervalle $[0,1[$.

(b) Déterminer le développement limité en 0 à l'ordre 2 de $\ln(1-x)$.
(c) En déduire $\lim_{x\to 0} f(x)$.
(d) En déduire que la fonction f est continue sur $[0,1[$.
(e) Montrer que f est dérivable sur $]0,1[$ et que pour tout $x \in]0,1[$, on a :
$$f'(x) = -2\frac{N(x)}{x^3(1-x)}.$$

☞ On **admet** qu'au voisinage de 0, on a : $\ln(1-x) + x + \dfrac{x^2}{2} \sim -\dfrac{x^3}{3}$.

(f) Montrer alors que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = 2/3$.
(g) Dresser le tableau de variation de la fonction f sur $[0, 1[$, limites comprises.
(h) En déduire que f réalise une bijection strictement croissante de $[0, 1[$ sur un intervalle à préciser.
(i) Tracer soigneusement l'allure de la courbe représentative de la fonction f. On donnera l'équation de la tangente en 0 et on la

Exercice 3

(1) Soient $x \geq 0$ un nombre réel positif et $p, r \in \mathbb{N}^*$ deux entiers naturels non nuls tels que $p \leq r$. En distinguant les cas $0 \leq x < 1$ et $x \geq 1$, montrer que

$$\forall x \geq 0, \quad 0 \leq x^p \leq 1 + x^r.$$

(2) On considère X une variable aléatoire telle que $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$.
Soit $r \in \mathbb{N}^*$. On rappelle la définition suivante

$$X \text{ admet un } \textit{moment d'ordre } r \Longleftrightarrow \sum k^r P(X = k) \text{ converge .}$$

Montrer que, si X admet un moment d'ordre r, alors, pour tout entier naturel non nul $p \leq r$, X admet un moment d'ordre p, c'est à dire que la série $\sum k^p P(X = k)$ converge.

(3) On considère X une variable aléatoire dont une densité est notée f vérifiant $f(x) = 0, x < 0$.
Soit $r \in \mathbb{N}^*$. On rappelle la définition suivante

$$X \text{ admet un } \textit{moment d'ordre } r \Longleftrightarrow \int_0^{+\infty} t^r f(t) \mathrm{d}t \text{ converge .}$$

Montrer que, si X admet un moment d'ordre r, alors, pour tout entier naturel non nul $p \leq r$, X admet un moment d'ordre p, c'est à dire que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^p f(t) \mathrm{d}t$ converge.