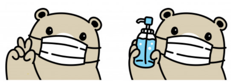
ECE 2 - Année 2020-2021
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com



Devoir Maison n°1

Solution

Exercice 1

(1) Deux sommets d'un pentagone peuvent êtres séparés par une ou deux arrêtes au plus. Ainsi, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $X_n(\Omega) = \{0, 1, 2\}$.

(2) On sait, au moment $n = 0$ où se trouvent les deux personnes, ce n'est pas aléatoire et c'est à une route de distance, ainsi $X_0 = 1$ est une variable aléatoire *certaine* (ou constante).

(3) Si les deux amis se retrouvent, ils ne se quittent plus, donc la présence des deux personnes sur le même site au moment n entraîne forcément la même chose au moment $n + 1$. Donc

$$P_{X_n=0}(X_{n+1} = 0) = 1.$$

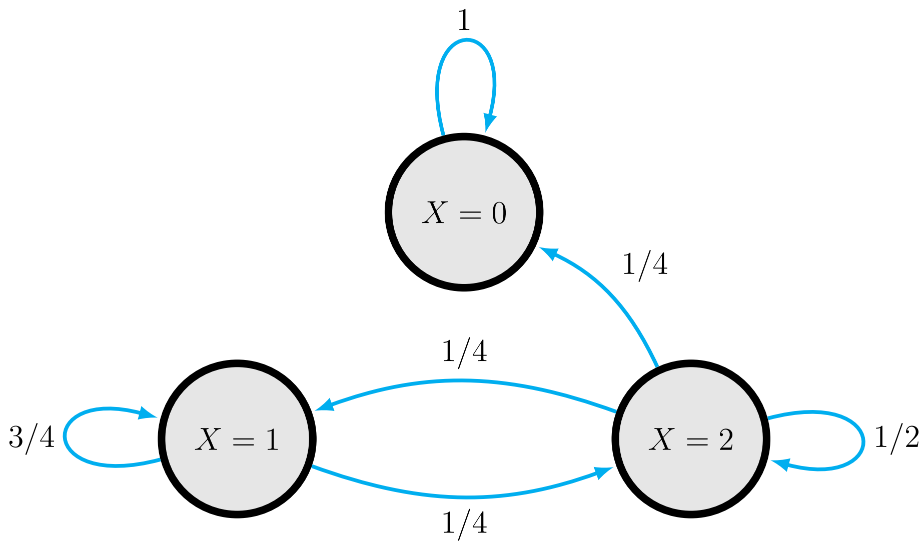
D'autre part, si il y a deux routes d'écart entre les deux personnes, la seule façon que celles-ci se retrouvent est qu'elles partent toutes deux l'une vers l'autre, ce que chacune fait avec probabilité $1/2$ donc on a bien

$$P_{X_n=2}(X_{n+1} = 0) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

Avec le même raisonnement, on trouve les autres probabilités conditionnelles:

- $\mathrm{P}_{X_n=0}(X_{n+1} = 1) = 0 = \mathrm{P}_{X_n=0}(X_{n+1} = 2) = 0$ (si ils sont ensembles au moment n, ils le restent);
- $\mathrm{P}_{X_n=1}(X_{n+1} = 0) = 0$ (quand ils sont à une route de distance, ils se croisent ou ils s'éloignent);
- $\mathrm{P}_{X_n=1}(X_{n+1} = 1) = \dfrac{3}{4}$ (ils se déplacent tous deux dans le même sens ; horaire ou anti-horaire avec une probabiltié $\frac{1}{4}$, ou ils se croisent);
- $\mathrm{P}_{X_n=1}(X_{n+1} = 2) = \dfrac{1}{4}$ (ils se fuient);
- $\mathrm{P}_{X_n=2}(X_{n+1} = 1) = \dfrac{1}{4}$ (ils se déplacent dans le sens opposé qui les rapproche);
- $\mathrm{P}_{X_n=2}(X_{n+1} = 2) = \dfrac{1}{2}$ (ils se déplacent tous deux dans le même sens).

Ceci se résume dans le *diagramme de transition* ci-dessous (pour plus de lisibilité, on a supprimé les flèches correspondant à des probabilités nulles)



(4) On complète sans mal la fonction `SciLab` :

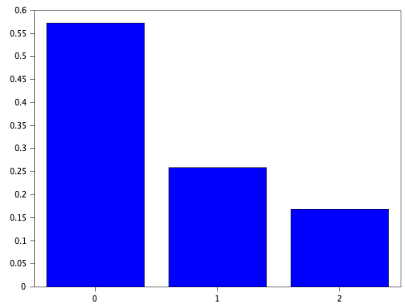
```
function y=X(n)
    y=1
    for k=1:n
        r=rand()
        if y==1 then
            if r <= 1/4 then // on passe de 1 à 2 avec une proba de 1/4
                y=2
            end
        else
         if y==2 then
            if r<= 1/4 then
                .y=1
            end
            if r>1/4 & r <=1/2 then // l'intervalle entre 1/4 et 1/2 a pour longueur 1/4 qui correspond à la proba de passer de 2 à 0
                y=0
            end
        end
   end
endfunction
```

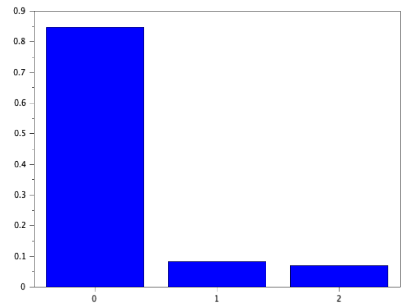
Si $X_n = 0$ pour un certain n, alors $X_{n+1} = 0$, ainsi on a pas besoin de traiter `y==0`, car dans ce cas, `y` est inchangé.

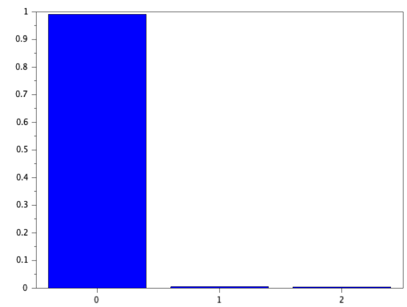
(5) On complète avec les commandes suivantes (en faisant varier `n=10, n=20, n=50`)

```
n=50
U=zeros(1,1000)
for k=1:1000
    U(k)=X(n)
end
T=tabul(U, 'i')
bar(T(:,1), T(:,2)/1000)
```

On observe







Il semblerait que

$$\lim_{n\to+\infty} P(X_n = 1) = \lim_{n\to+\infty} P(X_n = 2) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} P(X_n = 0) = 1.$$

(6) Comme $\{(X_n = i),\ 0 \leq i \leq 2\}$ forme un s.c.e. Par la formule des probabilités totales, on a donc

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= P(X_{n+1} = 0) \\ &= P_{X_n=0}(X_{n+1} = 0)P(X_n = 0) + P_{X_n=1}(X_{n+1} = 0)P(X_n = 1) + P_{X_n=2}(X_{n+1} = 0)P(X_n = 2) \\ &= a_n + \frac{1}{4}c_n. \end{aligned}$$

On obtient de façon totalement analogue les autres relations de récurrence du système ci-dessous:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a_{n+1} &=& a_n + \frac{1}{4}c_n \\ b_{n+1} &=& \frac{3}{4}b_n + \frac{1}{4}c_n \\ c_{n+1} &=& \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{2}c_n \end{array} \right. .$$

(7) (a) On a

$$\begin{aligned} b_{n+2} &= \frac{3}{4}b_{n+1} + \frac{1}{4}c_{n+1} \\ &= \frac{3}{4}b_{n+1} + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}b_n + \frac{1}{2}c_n\right) \\ &= \frac{3}{4}b_{n+1} + \frac{1}{16}b_n + \frac{1}{8}c_n \end{aligned}$$

et comme $b_{n+1} = \dfrac{3}{4}b_n + \dfrac{1}{4}c_n$ on a $c_n = 4b_{n+1} - 3b_n$ et donc

$$\begin{aligned} b_{n+2} &= \frac{3}{4}b_{n+1} + \frac{1}{16}b_n + \frac{1}{8}(4b_{n+1} - 3b_n) \\ &= \frac{5}{4}b_{n+1} - \frac{5}{16}b_n \end{aligned}$$

(b) La suite (b_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre 2. On détermine son terme général en suivant le plan d'étude du cours.

Son équation caractéristique est $r^2 - \dfrac{5}{4}r + \dfrac{5}{16} = 0$ de discriminant $\Delta = \dfrac{25}{16} - \dfrac{20}{16} = \dfrac{5}{16}$ et donc de racines

$$\alpha = \frac{5-\sqrt{5}}{8} \qquad \text{et} \qquad \beta = \frac{5+\sqrt{5}}{8}.$$

Donc, on va devoir trouver $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout entier n,

$$b_n = \lambda\alpha^n + \mu\beta^n.$$

En utilisant les valeurs des termes initiaux ($b_0 = 1$ et $b_1 = 3/4$) on doit le système suivant

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \lambda + \mu &=& 1 \\ \alpha\lambda + \beta\mu &=& 3/4 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} \lambda &=& (5-\sqrt{5})/10 \\ \mu &=& (5+\sqrt{5})/10 \end{array} \right.$$

Au final,

$$b_n = \left(\frac{5-\sqrt{5}}{10}\right)\left(\frac{5-\sqrt{5}}{8}\right)^n + \left(\frac{5+\sqrt{5}}{10}\right)\left(\frac{5+\sqrt{5}}{8}\right)^n = \frac{4}{5}\left(\alpha^{n+1}+\beta^{n+1}\right)$$

(c) Et comme $c_n = 4b_{n+1} - 3b_n$ on a alors :

$$\begin{aligned} c_n &= 4\frac{4}{5}\left(\alpha^{n+2}+\beta^{n+2}\right) - 3\frac{4}{5}\left(\alpha^{n+1}+\beta^{n+1}\right) \\ &= \frac{4}{5}\left((4\alpha-3)\,\alpha\cdot\alpha^n + (4\beta-3)\,\beta\cdot\beta^{n+1}\right) \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} (4\alpha-3)\,\alpha &= \left(4\frac{5-\sqrt{5}}{8} - 3\right)\frac{5-\sqrt{5}}{8} \\ &= -\frac{1}{4}\sqrt{5} \\ (4\beta-3)\,\beta &= \left(4\frac{5+\sqrt{5}}{8} - 3\right)\frac{5+\sqrt{5}}{8} \\ &= \frac{1}{4}\sqrt{5} \end{aligned}$$

Au final, on a bien

$$c_n = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\beta^n - \alpha^n\right).$$

(8) Étant clair que $|\alpha| < 1$ et $|\beta| < 1$, on en déduit que b_n et c_n tendent toutes deux vers 0. Comme on a un système complet d'évènements,

$$a_n = 1 - b_n - c_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

(9) On note Z l'évènement "les deux personnes se rencontrent à un moment".

(a) Z signifie qu'il existe un moment n tel que $X_n = 0$, ainsi

$$Z = \bigcup_{n=1}^{+\infty}[X_n = 0].$$

(b) Étant clair que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $[X_n = 0] \subset Z$ et il découle immédiatement que

$$a_n \leq P(Z) \leq 1$$

Par le théorème des gendarmes, cela impose que $P(Z) = 1$. En fait, comme la suite $([X_n = 0])$ est croissante (au sens de l'inclusion), le théorème de la limite monotone donne même que

$$P(Z) = \lim_{n\to+\infty} P(X_n = 0) = 1.$$

(c) La probabilité cherchée est celle du contraire de Z qui a pour probabilité 1, donc il y a une probabilité nulle de ne jamais se rencontrer.

Exercice 2

Les questions (1), (2) *et* (3) *de cet exercice sont indépendantes*

(1) (i) Il est facile d'exhiber un équivalent du dénominateur (son terme prépondérant obtenu par une croissance comparée immédiate). Pour le numérateur, il faut d'abord factoriser à l'intérieur du log.

$$\ln\left(e^{2x}-1\right)=\ln\left(e^{2x}\right)+\ln\left(1-e^{-2x}\right)=2x+\ln\left(1-e^{-2x}\right)\underset{x\to+\infty}{\sim}2x.$$

Ainsi,

$$\frac{\ln\left(e^{2x}-1\right)}{x-\ln(x)+2}\underset{x\to+\infty}{\sim}\frac{2x}{x}=2\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}2.$$

(ii) Les DL usuels en 0 de $\ln(1+u)$ et $\sqrt{1+u}$ permettent d'écrire

$$\frac{\ln(n+2)-\ln(n)}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}=\frac{\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}=\frac{\frac{2}{n}-\frac{2}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)}{1+\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0.$$

(il n'était pas utile ici de faire appel aux DL, une fois les deux log mis comme un seul, ce n'était plus indéterminé).

(iii) On utilise le DL (à l'ordre 1) de e^u en 0 avec $u=x^2$.

$$\frac{e^{x^2}-1}{x+x^2}=\frac{1+x^2+o(x^2)-1}{x+x^2}=\frac{x^2+o(x^2)}{x+x^2}=\frac{x+o(x)}{1+x}\underset{x\to0}{\longrightarrow}0.$$

(2) On essaie de calculer la limite du quotient des deux quantités à comparer. Remarquons (même si ici ce n'est pas nécessaire pour obtenir la limite désirée) que, comme

$$e^{-x^2/2}\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}0,$$

on a

$$\left(1-e^{-x^2/2}\right)^5\underset{x\to+\infty}{\sim}-5e^{-x^2/2}.$$

Il suit que

$$\begin{aligned}\frac{\frac{1}{\sqrt{x}e^x}}{e^{-2x}\left(1-e^{-x^2/2}\right)^5}&=\frac{1}{e^{-3x}\sqrt{x}\left(1-e^{-x^2/2}\right)^5}\\&\underset{x\to+\infty}{\sim}\frac{1}{5\sqrt{x}e^{-x^2/2-3x}}\\&\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}+\infty,\end{aligned}$$

par croissance comparée. Il suit que l'inverse de ce quotient tend vers 0, ce qui donne

$$e^{-2x}\left(1-e^{-x^2/2}\right)^5=o\left(\frac{1}{\sqrt{x}e^x}\right),\qquad x\to+\infty.$$

(3) Soient N et f les fonctions définies sur l'intervalle $[0,1[$ par

$$N(x)=x^2-2x-2(1-x)\ln(1-x)$$

et

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{-2(x+\ln(1-x))}{x^2}, & \text{si } 0<x<1\\ 1, & \text{si } x=0\end{cases}$$

(a) (i) On voit que

- La fonction $x\mapsto 1-x$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1[$ à valeur sur $\mathbb{R}_+^*$ car $x<1\Longrightarrow 1-x>0$.
- La fonction $t\mapsto\ln(t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Donc par composition, $x \mapsto \ln(1-x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1[$.
Finalement la fonction N est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1[$ comme somme et produit de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1[$.

(ii) Posons $h : x \mapsto \ln(1-x) + x$.
h est dérivable sur $[0,1[$ et pour tout $x \in [0,1[$, on a :

$$h'(x) = \frac{-1}{1-x} + 1 = \frac{-x}{1-x} \leq 0 \qquad \text{car} \quad -x \leq 0 \;\text{ et }\; 1-x > 0 \;\text{ sur }\; [0,1[$$

Donc la fonction h est décroissant sur $[0,1[$. Elle est donc majorée par $h(0) = 0$.
Ainsi, pour tout $x \in [0,1[$, on a : $h(x) \leq 0$ soit

$$\forall x \in [0,1[, \qquad \ln(1-x) \leq -x.$$

(On aurait pu utiliser un argument de *convexité*. En effet, $x \mapsto \ln(1-x)$ est concave et sa courbe se situe au dessous de toutes ses tangentes, notamment $y = -x$, tangente en 0.)

(iii) Pour tout $x \in [0,1[$, on a :

$$\begin{aligned} N'(x) &= 2x - 2 - 2\left[-\ln(1-x) + (1-x)\frac{-1}{1-x}\right] \\ &= 2x - 2 + 2\ln(1-x) + 2 \\ &= 2\left((x + \ln(1-x)\right) \leq 0 \end{aligned}$$

car d'après la question précédente, $\ln(1-x) \leq -x$ soit $x + \ln(1-x) \leq 0$ pour tout $x \in [0,1[$.
Finalement, on a

$$\forall x \in [0,1[, \qquad N'(x) \leq 0.$$

(iv) D'après la question précédente, la fonction N est décroissant sur $[0,1[$. Elle est donc majorée par $N(0) = 0$.
Ainsi, pour tout $x \in [0,1[$, on a bien $N(x) \leq 0$.

(b) (i) Au voisinage de 0, on a :

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

donc

$$\ln(1-x) = -x - \frac{(-x)^2}{2} + o(x^2) = -x - \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

(ii) Au voisinage de 0, on a donc :

$$\begin{aligned} x + \ln(1-x) &= x - x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \\ &= -\frac{x^2}{2} + o(x^2) \end{aligned}$$

et donc

$$x + \ln(1-x) \underset{x \to 0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$$

On en déduit que au voisinage de 0^+ :

$$f(x) = -2\frac{x + \ln(1-x)}{x^2} \underset{x \to 0^+}{\sim} -2\frac{-\frac{x^2}{2}}{x^2} = 1$$

Ainsi, $f(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} 1$ donc

$$\lim_{x\to 0} f\left(x\right) = 1.$$

(iii) On a:

- La fonction f est continue sur $]0,1[$ comme quotient de fonction continues sur $]0,1[$ car $x^2 \neq 0$.
- De plus, $\lim_{x\to 0} f\left(x\right) = 1 = f(0)$ donc f est continue en 0.

Ainsi, la fonction f est continue sur $[0,1[$.

(iv) On a déjà vu que $x \mapsto \ln(1-x)$ est dérivable sur $]0,1[$.
Donc, la fonction f est dérivable sur $]0,1[$ comme quotient de fonction dérivable sur $]0,1[$ car $x^2 \neq 0$.
Pour tout $x \in]0,1[$, on a :

$$\begin{aligned}
f'\left(x\right) &= -2\left[\frac{\left(1+\dfrac{-1}{1-x}\right)x^2 - 2x\left(x+\ln(1-x)\right)}{x^4}\right]\\
&= -2\left[\frac{\dfrac{-x^3-2x(1-x)\left(x+\ln(1-x)\right)}{1-x}}{x^4}\right]\\
&= -2\left[\frac{-x^2-2(1-x)\left(x+\ln(1-x)\right)}{x^3(1-x)}\right]\\
&= -2\left[\frac{-x^2-2x(1-x)-2(1-x)\ln(1-x)}{x^3(1-x)}\right]\\
&= -2\left[\frac{x^2-2x-2(1-x)\ln(1-x)}{x^3(1-x)}\right]\\
&= -2\frac{N(x)}{x^3(1-x)}
\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $x \in]0,1[$, on a

$$f'\left(x\right) = -2\frac{N\left(x\right)}{x^3\left(1-x\right)}.$$

(v) Calculons le taux d'accroissement de f en 0. On a :

$$\begin{aligned}
\frac{f(x)-f(0)}{x-0} &= \frac{-2\dfrac{x+\ln\left(1-x\right)}{x^2}-1}{x}\\
&= \frac{-2x-2\ln\left(1-x\right)-x^2}{x^3}\\
&= -2\frac{\ln\left(1-x\right)+x+\dfrac{x^2}{2}}{x^3}
\end{aligned}$$

Or, on a admis qu'au voisinage de 0, on a

$$\ln\left(1-x\right)+x+\frac{x^2}{2} \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^3}{3}.$$

Ainsi, on obtient par quotient d'équivalents

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} \underset{x\to 0}{\sim} -2\frac{-\frac{x^3}{3}}{x^3} = \frac{2}{3}$$

Ainsi, f est dérivable en 0 et que $f'(0) = \frac{2}{3}$.

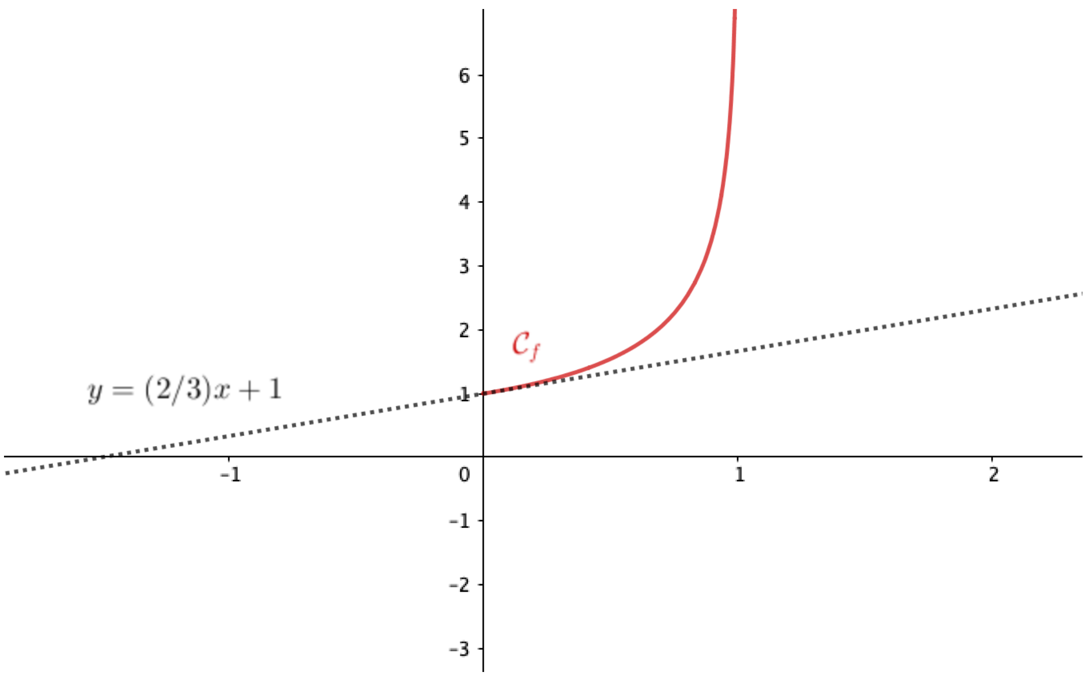
(vi) On a :

x	0 $\qquad\qquad\qquad\qquad$ 1
$N(x)$	$-$
$x^3(1-x)$	$+$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$1 \nearrow +\infty$

car $\ln(1-x) \to -\infty, x \to 1^-$, donc par somme, quotient et produit de limites, on a $f(x) \to +\infty,\ x \to 1^-$.

(c) L'équation de la tangente en 0 est donnée par : $\quad y = f'(0)(x-0) + f(0)$, soit d'après les calculs précédents :

$$y = \frac{2}{3}x + 1$$



Exercice 3

On retrouve ces questions (en moins détaillé) au sein du sujet **ESSEC Maths 2, 2020**.

(1) Soient $x \geq 0$ un nombre réel positif et $p, r \in \mathbb{N}^*$ deux entiers naturels non nuls tels que $p \leq r$.

- Si $0 \leq x < 1$.
  Dans ce cas les puissances de x sont rangées dans l'ordre décroissant... mais elles sont

toutes inférieures à 1. Plus précisément, $x^p \leq 1^p = 1$ (par croissante de la fonction $t \mapsto t^p$) et comme $x^p \geq 0$ et $x^r \geq 0$, on a

$$0 \leq x^p \leq 1 \leq 1 + x^r.$$

- Si $x \geq 1$.
  Dans ce cas, $x^p \leq x^r$. Il suit que

$$0 \leq x^p \leq x^r \leq x^r + 1.$$

Dans tous les cas, on a l'encadrement voulu.

(2) On considère X une variable aléatoire telle que $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$ admettant un moment d'ordre r.

Pour montrer qu'une série converge, on peut travailler sur son terme général. Ici,

$$0 \leq k^p P(X = k) \leq (1 + k^r) P(X = k) = P(X = k) + k^r P(X = k)$$

Or, la série $\sum P(X = k)$ converge (car X est une v.a.) et la série $\sum k^r P(X = k)$ converge aussi par hypothèse de l'existence du moment d'ordre r. Par critère de comparaison pour les séries à termes positifs, on peut alors conclure que la série $\sum k^p P(X + k)$ converge également, ce qui est bien ce qu'on voulait montrer.

(3) On considère X une variable aléatoire dont une densité est notée f vérifiant $f(x) = 0, x < 0$ et admettant un moment d'ordre r.

Comme la densité f est nulle sur $]-\infty; 0[$, l'existence du moment d'ordre p se ramène à la convergence de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} t^p f(t) \mathrm{d}t.$$

Soit $t \geq 0$. On a

$$0 \leq t^p f(t) \leq (1 + t^r) f(t) = f(t) + t^r f(t).$$

Or, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge (et vaut 1) car f est une densité (nulle sur $\mathbb{R}_-^*$) et par hypothèse d'existence du moment d'ordre r, on a également la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^r f(t)\mathrm{d}t$.
Par critère de comparaison pour les intégrales impropres de fonctions positives, on peut conclure à la convergence de

$$\int_0^{+\infty} t^p f(t) \mathrm{d}t,$$

ce qui est bien ce qu'on voulait montrer.

☞ Les critères de comparaison ici utilisés seront à nouveau introduit dans les Chapitres 4 (Séries) et 6 (Intégrales impropres) et mêmes complétés par de nouveaux critères faisant intervenir les notions de quantités équivalentes ou négligeables.

Le résultat montré ici implique notamment qu'une v.a (discrète ou continue) qui admet un moment d'ordre 2 (donc une variance) admet alors nécessairement un moment d'ordre 1 (une espérance), mais est bien plus général que cela.