ECE 2 - Année 2020-2021
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
`http://frederic.gaunard.com`

 

Devoir Maison n°3/2

À rendre le 25/09

---

*Ce devoir est à faire **par groupe de 2 étudiants**. Toutes les réponses doivent êtres **justifiées** et **soigneusement rédigées**.*

Exercice 1

Préambule : loi géométrique

(1) Soit $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$. Rappeler la formule pour la loi de X ainsi que la valeur de son espérance et de sa variance.
(2) Préciser les formules précédentes dans le cas $p = 1/2$.
(3) Que font les commandes `SciLab` suivantes?

```
n=input('n=?')
p=input('p=?')
U=[ ]
for k=1:n
    U=[U, (1-p)^(k-1)*p]
end
bar(1:n, U)
```

(4) Exprimer, en fonction de p, pour $k \in \mathbb{N}$, la quantité $P(X \geq k)$.

Longueur de la première série

On effectue une succession infinie de lancers indépendants d'une pièce donnant pile avec probabilité p. On note $q = 1 - p$.
On dit que la première série est de longueur $n \geq 1$ si les n premiers lancers ont amené le même côté de la pièce et le $(n+1)$-ième l'autre côté. De même la deuxième série commence au lancer suivant la fin de la première série et se termine au lancer précédant un changement de côté.

Par exemple si les lancers donnent les résultats $FFPPPPPPFFFPP\dots$ alors la première série est de longueur 2 et la deuxième est de longueur 6.
Soit X la variable aléatoire correspondant à la longueur de la première série.

(1) Écrire une fonction `function y=piece(p)` qui simule un lancer et renvoie 1 on obtient *Face* et 0 si on obtient *Pile*.

(2) Recopier et compléter la fonction suivante, prenant en argument la probabilité p d'obtenir pile et permettant de simuler la variable aléatoire X.

```
function y=X(p)
    y=1;
    told=piece(p)
    tnew=piece(p)
    while .............
        y=.................
        told=tnew;
        tnew=..............
    end
endfunction
```

(3) Écrire une fonction d'entête `function U=SampleX(N,p)` permettant d'obtenir un $N-$échantillon de X, c'est à dire un vecteur ligne U de taille N dont chaque composante est une réalisation de la variable X.

(4) Écrire un script permettant de comparer graphiquement les fréquences des valeurs obtenues sur un échantillon de taille 1000 de X avec $p = 1/2$ et les valeurs théoriques de la loi géométrique de paramètre $1/2$. Commenter.

(5) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,
$$P(X = k) = p^k(1 - p) + (1 - p)^k p.$$

(6) Pour $p = 1/2$, retrouver le résultat observé précédemment.

(7) Montrer que X admet une espérance et la déterminer.

(8) Montrer que X admet une variance et la déterminer.

Exercice 2

Un insecte pond des oeufs. Le nombre d'oeufs pondus est une variable aléatoire X suivant une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$. Chaque oeuf a une probabilité p d'éclore, indépendante des autres oeufs. Soit Z le nombre d'oeufs qui ont éclos.

(1) Rappeler la valeur de $P(X = n)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

(2) Pour $k, n \in \mathbb{N}^2$, expliciter $P_{[X=n]}(Z = k)$.

(3) En déduire, à l'aide de la formule des probabilités totales appliquée au s.c.e $\{(X = n) : n \in \mathbb{N}\}$ la loi de Z.

(4) La variable aléatoire Z admet-elle une espérance? Si oui, la calculer.