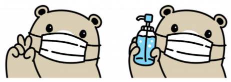
ECE 2 - Année 2020-2021
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com



Devoir Maison n°3/2

Solution

Exercice 1

Préambule : loi géométrique

(1) D'après le cours, si $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$, alors $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a

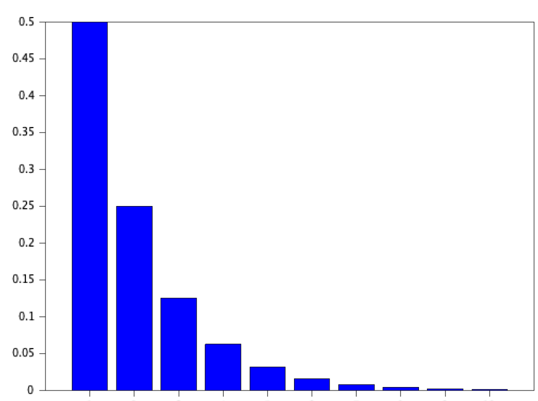
$$P(X = k) = (1-p)^{k-1}p$$

La loi géométrique correspond au *temps d'attente* du premier succès lors d'une répétition (infinie) d'épreuves de Bernoulli indépendantes dont le succès est de probabilité p.
Le cours permet aussi d'affirmer que X admet une espérance (et une variance) et que

$$E(X) = \frac{1}{p}, \qquad V(X) = \frac{(1-p)}{p^2}.$$

(2) Pour $p = 1/2$, on a $p = 1 - p = 1/2$ et alors $P(X = k) = (1/2)^k$.

(3) Les commandes `SciLab` données permettent d'afficher le diagramme à bâtons des n premières valeurs (théoriques) de $P(X = k)$ pour $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ où n et p sont rentrés par l'utilisateur.
Par exemple, pour $p = 1/2$ et $n = 20$, on a



(4) **C'est une question classique à savoir refaire**. Soit $k \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned}
P(X \geq k) &= 1 - P(X < k) = 1 - P(X \leq k-1) \\
&= 1 - \sum_{j=1}^{k-1} (1-p)^{j-1} p \\
&= 1 - p \sum_{i=0}^{k-2} (1-p)^i \\
&= 1 - p \cdot \frac{1-(1-p)^{k-1}}{1-(1-p)} = 1 - 1 + (1-p)^{k-1} \\
P(X \geq k) &= (1-p)^{k-1}
\end{aligned}$$

Longueur de la première série

(1) La fonction à écrire est la fonction classique permettant de simuler une loi de Bernoulli de paramètre $1-p$ (attention, on prend la valeur 1 si on a *Face*). Voici la syntaxe attendue

```
function y=piece(p)
    if rand()<=1-p then //une alternative est rand() > p
        y=1;
    else
        y=0;
    end
endfunction
```

(2) L'idée du programme et de continuer à lancer la pièce tant que les résultats des deux derniers lancers (que l'on *stocke* dans les variables `told` et `tnew`) sont les mêmes. Il en découle le programme suivant.

```
function y=X(p)
    y=1;
    told=piece(p)
    tnew=piece(p)
    while told == tnew // tant qu'il s'agit de la même série de lancers
        y= y+1 // un lancer de plus
        told=tnew;
        tnew=piece(p) // résultat du dernier  lancer
    end
endfunction
```

(3) On utilise une boucle `for`. On propose deux alternatives à ce programme

Dans la première version, la variable de sortie `U` est une liste dont la longueur augmente à chaque tour de boucle, en étant complété par une réalisation de X.

```
// version 1

function U=SampleX(N,p)
    U=[ ]
    for k=1:N
        U=[U, X(p)]
    end
endfunction
```

Dans la deuxième version, on prépare la liste `U` en la pré-remplissant de 0. On écrase ensuite chaque composante `U(k)` une par une à chaque tour de boucle par une réalisation de X.

```
// version 2

function U=SampleX(N,p)
    U=zeros(1, N)
    for k=1:N
        U(k)=X(p)
    end
endfunction
```

(4) On a le script pour les valeurs théoriques grâce à la Partie 1 de l'exercice (le monde est bien fait). Si on veut "y voir quelquechose", il est judicieux de décaler les bâtons d'une des liste en les mettant en face de $k+\frac{1}{2}$ plutôt que de k. De plus, on va représenter les n premières valeurs de la loi géométrique, avec n la valeur maximale prise par une des 1000 réalisations de X. On propose donc le programme suivant

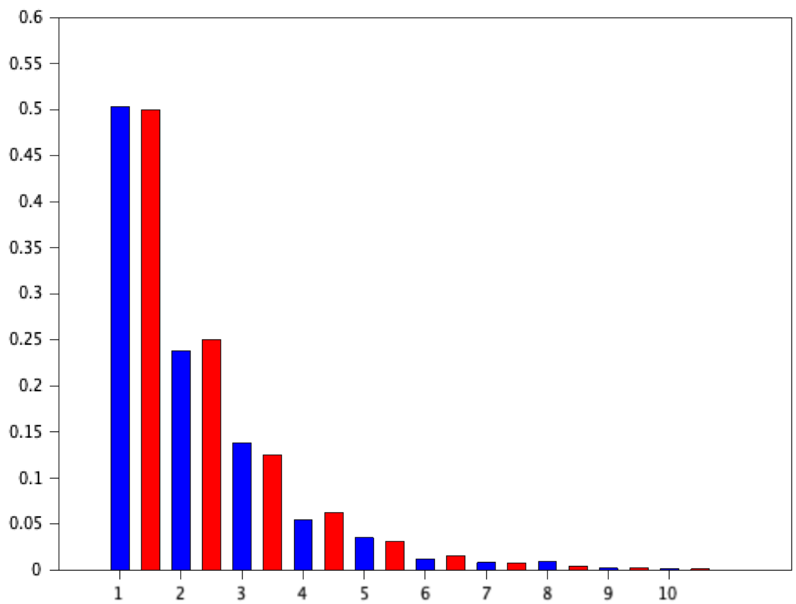
```
p=1/2

U=SampleX(1000,p);
T=tabul(U, 'i')
n=max(U)

G=[ ]
for k=1:n
    G=[G, (1-p)^(k-1)*p]
end

bar([1+0.5:1:n+0.5], G, 0.3, 'red') //valeurs théoriques en rouge
bar(T(:,1), T(:,2)/1000, 0.3) // fréquences observées en bleu

//0.3 correspond à la largeur du bâton
```



Les bâtons semblent être à la même hauteur. On peut **conjecturer** que $X \hookrightarrow \mathcal{G}(1/2)$. Mais attention, déjà ce n'est qu'une conjecture et ensuite il ne s'agit que d'un cas particulier. Comme on va le voir, si $p \neq 1/2$, X ne suit pas du tout une loi géométrique.

(5) Introduisons les évènements F_i "le $i-$ème lancer de la pièce donne *Face*. On peut avoir une série de k lancers avec chaque côté de la pièce et il faut que la série soit interrompue par un lancer de l'autre face. Les deux alternatives étant incompatibles et les lancers indépendants, on a

$$\begin{aligned} P(X=k) &= P\left(\left[F_1 \cap F_2 \cap \ldots \cap F_k \cap \overline{F}_{k+1}\right] \cup \left[\overline{F}_1 \cap \overline{F}_2 \cap \ldots \cap \overline{F}_k \cap F_{k+1}\right]\right) \\ &= P\left(\left[F_1 \cap F_2 \cap \ldots \cap F_k \cap \overline{F}_{k+1}\right]\right) + P\left(\left[\overline{F}_1 \cap \overline{F}_2 \cap \ldots \cap \overline{F}_k \cap F_{k+1}\right]\right) \quad \text{(par incompatibilité)} \\ &= P(F_1) \times \ldots \times P(F_k) \times P(\overline{F}_{k+1}) + P(\overline{F}_1) \times \ldots \times P(\overline{F}_k) \times P(F_{k+1}) \quad \text{(par indépendance)} \\ &= q^k p + p^k q, \end{aligned}$$

ce qui est bien la formule attendue.

(6) Pour $p = 1/2$, on obtient

$$P(X=k) = \left(\frac{1}{2}\right)^k \times \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^k \times \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^k,$$

et on reconnait la formule de la loi géométrique de paramètre $1/2$. Donc, **uniquement lorsque** $p = 1/2$, on peut affirmer que X suit une loi géométrique de paramètre $1/2$ (ce qu'on avait conjecturé). Mais, ce n'est pas une loi géométrique dans les autres cas!

(7) On sait que

$$\begin{aligned} X \text{ admet une espérance} &\iff \text{la série } \sum kP(X=k) \text{ converge} \\ &\iff \sum k\left(p^k q + q^k p\right) \text{ converge .} \end{aligned}$$

Or,

$$k\left(p^k q + q^k p\right) = pq\left(kp^{k-1} + kq^{k-1}\right)$$

On reconnait alors une combinaison de termes généraux de séries géométriques (de raisons p et q) dérivées une fois, donc convergentes (car $0 < p, q < 1$). Ainsi, $\sum kP(X=k)$ converge et X admet une espérance. De plus,

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=1}^{+\infty} kP(X=k) = \sum_{k=1}^{+\infty} k\left(p^k q + q^k p\right) \\ &= pq\left(\sum_{k=1}^{+\infty} kp^{k-1} + \sum_{k=1}^{+\infty} kq^{k-1}\right) \\ &= pq\left(\frac{1}{(1-p)^2} + \frac{1}{(1-q)^2}\right) = \frac{pq}{q^2} + \frac{pq}{p^2} \\ E(X) &= \frac{p}{q} + \frac{q}{p}. \end{aligned}$$

(8) On sait que

$$\begin{aligned} X \text{ admet une espérance} &\iff \text{la série } \sum k^2 P(X=k) \text{ converge} \\ &\iff \sum k^2\left(p^k q + q^k p\right) \text{ converge .} \end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned} k^2\left(p^k q + q^k p\right) &= [k(k-1)+k]\left(p^k q + q^k p\right) \\ &= p^2 q \cdot k(k-1)p^{k-2} + q^2 p \cdot k(k-1)q^{k-2} + pq\left(kp^{k-1} + kq^{k-1}\right) \end{aligned}$$

On reconnait alors une combinaison de termes généraux de séries géométriques (de raisons p et q) dérivées une et deux fois, donc convergentes. Ainsi, $\sum k^2 P(X=k)$ converge et X admet un moment d'ordre 2 donc une variance. De plus,

$$\begin{aligned}
E(X^2) &= \sum_{k=1}^{+\infty} k^2 \left(p^k q + q^k p\right) \\
&= p^2 q \sum_{k=1}^{+\infty} k(k-1)p^{k-2} + q^2 p \sum_{k=1}^{+\infty} k(k-1)q^{k-2} + pq \left(\sum_{k=1}^{+\infty} kp^{k-1} + \sum_{k=1}^{+\infty} kq^{k-1}\right) \\
&= p^2 q \times \frac{2}{(1-p)^3} + q^2 p \times \frac{2}{(1-q)^3} + \frac{p}{q} + \frac{q}{p} \\
E(X^2) &= \frac{2p^2}{q^2} + \frac{2q^2}{p^2} + \frac{p}{q} + \frac{q}{p}
\end{aligned}$$

Par König-Huygens,

$$\begin{aligned}
V(X) &= E(X^2) - E(X)^2 \\
&= \frac{2p^2}{q^2} + \frac{2q^2}{p^2} + \frac{p}{q} + \frac{q}{p} - \left(\frac{p}{q} + \frac{q}{p}\right)^2 \\
&= \frac{p^2}{q^2} + \frac{q^2}{p^2} + \frac{p}{q} + \frac{q}{p} - 2 = \frac{p}{q}\left(\frac{p}{q} + 1\right) + \frac{q}{p}\left(\frac{q}{p} + 1\right) - 2 \\
&= \frac{p}{q^2} + \frac{q}{p^2} - 2.
\end{aligned}$$

Exercice 2

(1) Le cours, connu sous le bout des doigts, donne

$$X(\Omega) = \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N},\ P(X = n) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}.$$

(2) Le nombre d'oeufs finissant par éclore ne peut être supérieur au nombre d'oeufs pondus. Ainsi,

$$\forall k > n, \qquad P_{X=n}(Z = k) = 0.$$

En revanche, sachant $(X = n)$, Z compte le nombre d'oeufs qui éclosent parmi les n oeufs pondus, on est en présente d'un schéma de Bernoulli, répété n fois et dont la probabilité de succès vaut p (éclosion de l'oeuf). Ainsi,

$$\forall k \in [\![0; n]\!], \qquad P_{X=n}(Z = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

(3) D'après la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'évènements $\{(X = n) :\ n \in \mathbb{N}\}$, on a , pour $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
P(Z = k) &= \sum_{n=0}^{+\infty} P_{X=n}(Z = k)P(X = n) = \sum_{n=k}^{+\infty} P_{X=n}(Z = k)P(X = n) \\
&= \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!} = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!} \\
&= \frac{e^{-\lambda}p^k}{k!} \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{(n-k)!}(1-p)^{n-k}\lambda^n \\
&= \frac{e^{-\lambda}p^k}{k!} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{m!}(1-p)^{m}\lambda^{m+k} \qquad\qquad (m = n-k) \\
&= \frac{e^{-\lambda}(\lambda p)^k}{k!} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{m!}(\lambda(1-p))^{m} \\
&= \frac{e^{-\lambda}(\lambda p)^k}{k!} e^{\lambda(1-p)} \\
&= e^{-\lambda p}\frac{(\lambda p)^k}{k!},
\end{aligned}$$

et on reconnait à nouveau une loi de Poisson

$$Z \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda p).$$

(4) D'après le cours, une variable aléatoire suivant une loi de Poisson admet une espérance. On en conclut que c'est le cas pour Z et on a même

$$E(Z) = \lambda p.$$