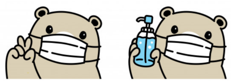
ECE 2 - Année 2020-2021
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com



Devoir Maison n°2

À rendre le 08/10

Exercice 1

On considère la fonction f définie sur $]0,1[$ par :

$$f : x \mapsto \frac{\ln(1-x)}{\ln(x)}$$

Partie A : Étude de la fonction f

(1) Montrer que f est dérivable sur $]0,1[$ et que l'on a :

$$\forall x \in\,]0,1[,\ f'(x) = \frac{1}{x\,(1-x)\,\big(\ln(x)\big)^2}\,\big(-x\,\ln(x) - (1-x)\,\ln(1-x)\big).$$

(2) (a) Justifier : $\forall t \in\,]0,1[,\ t\,\ln(t) < 0$.
(b) En déduire que la fonction f est strictement croissante sur $]0,1[$.

(3) (a) Montrer que la fonction f est prolongeable par continuité en 0.
On note encore f la fonction ainsi prolongée en 0. Préciser $f(0)$.
(b) Montrer que f est dérivable en 0 et préciser $f'(0)$.

(4) Calculer la limite de f en 1. Que peut-on en déduire pour la courbe représentative de f?

(5) Tracer l'allure de la courbe représentative de f dans un repère orthonormé, en faisant figurer la tangente en 0 et les branches infinies éventuelles.

Partie B : Étude d'une suite

On note, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, (E_n) l'équation : $x^n + x - 1 = 0$.

(6) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Étudier les variations sur $\mathbb{R}_+$ de la fonction $x \mapsto x^n + x - 1$.
En déduire que l'équation (E_n) admet une unique solution sur $\mathbb{R}_+$ que l'on note u_n.

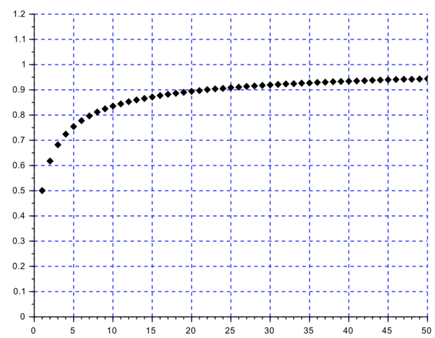
(7) Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, u_n appartient à l'intervalle $]0,1[$.

(8) Déterminer u_1 et u_2.

(9) (a) Recopier et compléter la fonction `SciLab` suivante afin que, prenant en argument un entier n de $\mathbb{N}^*$, elle renvoie une valeur approchée de u_n à 10^{-3} près, obtenue à l'aide de la méthode par dichotomie.

```
function u=valeur_approchee(n)
 a=0
 b=1
 while ........................
     c = (a + b) / 2
     if c^n+c-1 >0 then
          ................
     else
          ................
     end
     u= ...............
  end
 endfunction
```

(b) On représente alors les premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et on obtient le graphe suivant. Quelles conjectures peut-on faire sur la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ concernant sa monotonie, sa convergence et son éventuelle limite ?



(10) (a) Montrer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $f(u_n) = n$.
(b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.
(c) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et préciser sa limite.

Exercice 2

On note $\mathcal{A}_n$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dites *antisymétriques*, c'est à dire que

$$\mathcal{A}_n = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : \ {}^tM = -M\},$$

où ${}^tM$ désigne la transposée de M. On rappelle à ce propos que si A et B sont deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors

$${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB, \qquad \text{et} \qquad {}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA.$$

(1) Montrer que $\mathcal{A}_n$ est un espace vectoriel.
(2) Monter que, pour toute matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et toute matrice $M \in \mathcal{A}_n$, on a ${}^tBMB \in \mathcal{A}_n$.
(3) Dans le cas $n = 3$, déterminer une base, puis la dimension, de $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$.
(4) Soit $M \in \mathcal{A}_3$. Montrer qu'il existe un réel α à préciser, qui dépend des coordonnées de M dans la base explicitée ci-avant, tel que $M^3 = \alpha M$. En déduire, par l'absurde, que M n'est pas inversible.