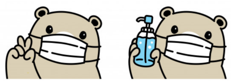
ECE 2 - Année 2020-2021
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com



Devoir Maison n°2

Solution

Exercice 1

Cet exercice est extrait du sujet **EML 2020**.

On considère la fonction f définie sur $]0,1[$ par :

$$f : x \mapsto \frac{\ln(1-x)}{\ln(x)}$$

Partie A : Étude de la fonction f

(1) Sur $]0;1[$, f est quotient de deux fonctions usuelles (logarithmes) dérivables, dont le dénominateur ne s'annule pas, donc f y est également dérivable. Pour $x \in]0;1[$, on a

$$f'(x) = \frac{\frac{-1}{1-x} \times \ln(x) - \ln(1-x) \times \frac{1}{x}}{(\ln(x))^2} = \frac{\frac{-x\ln(x)-(1-x)\ln(1-x)}{x(1-x)}}{(\ln(x))^2} = \frac{-x\ln(x) - (1-x)\ln(1-x)\ln(1-x)}{x(1-x)(\ln(x))^2}.$$

(2) (a) Pour tout $t \in]0;1[$, $\ln(t) < 0$ donc, par produit, $t\ln(t) < 0$.

(b) Si $x \in]0;1[$, par la question précédente, $x\ln(x) < 0$. Mais comme $(1-x) \in]0;1[$n la question précédente donne également $(1-x)\ln(1-x) < 0$. Il suit que le numérateur de $f'(x)$ est strictement positif et comme son dénominateur l'est clairement aussi (c'est un carré), on a $f'(x) > 0$ ce qui permet d'affirmer que f est strictement croissante sur $]0;1[$.

(3) (a) En 0, $\ln(1-x) \to 0$ et $\ln(x) \to -\infty$. Par algèbre des limites, on a donc $f(x) \to 0, \ x \to 0$. Ainsi, en posant $f(0) = 0$ on prolonge f par continuité en 0.

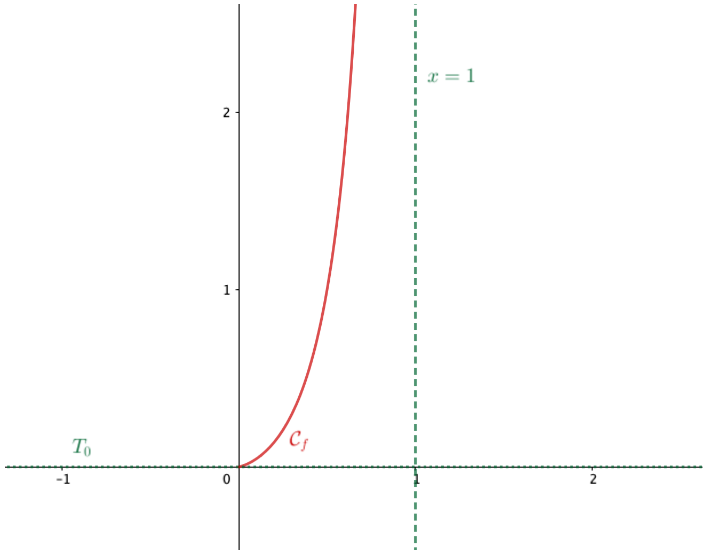
(b) Il s'agit maintenant de regarder la limite du taux d'accroissement en 0.

$$\frac{f(x)-f(0)}{x} = \frac{f(x)}{x} = \frac{\ln(1-x)}{x} \times \frac{1}{\ln(x)} = \frac{-x+o(x)}{x} \times \frac{1}{\ln(x)} = \frac{-1+o(1)}{\ln(x)} \to 0,$$

ainsi f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

(4) En 1^-, on a $\ln(x) \to 0^-$ donc $1/\ln(x) \to -\infty$. De plus, $\ln(1-x) \to \infty$. Par produit, $f(x) \to +\infty$. Il suit que la courbe représentative de f admet une asymptote verticale.

(5) La tangente en 0 a pour équation $y = 0$ (c'est l'axe des abscisses).



Partie B : Étude d'une suite

On note, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, (E_n) l'équation : $x^n + x - 1 = 0$.

(6) On note, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $g_n(x) = x^n + x - 1$. La fonction g_n est polynomiale donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et *a fortiori* sur $\mathbb{R}_+$. On a, pour $x \in \mathbb{R}_+$, $g_n'(x) = nx^{n-1} + 1 \geq 1 > 0$. Donc g_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. Étant continue sur le même intervalle, elle réalise donc une bijection (par application du théorème de bijection) de $\mathbb{R}_+$ sur $[-1; +\infty[$. (En effet $g_n(0) = -1$ et $g_n(x) \sim x^n \to +\infty$, $x \to +\infty$). En particulier, comme $0 \in [-1; +\infty[$, il admet un unique antécédent par g_n ou encore l'équation $g_n(x) = 0$ admet une unique solution (dans $\mathbb{R}_+$) notée u_n.

x	0	u_n	$+\infty$
$g_n'(x)$		$+$	
g_n	-1	0	$+\infty$

(7) On a

$$g_n(0) = -1 < 0 = g_n(u_n) < 1 = g_n(1)$$

Par stricte croissante et bijectivité de g_n, on en conclut que

$$0 < u_n < 1$$

ou encore que $u_n \in]0; 1[$, comme demandé.

(8) Par définition, u_1 est la solution (positive) de $x^1 + x - 1 = 0$ c'est à dire de $2x - 1 = 0$. Il est alors clair que $u_1 = 1/2$. De même, u_2 est la solution positive de $x^2 + x - 1 = 0$. C'est un polynôme du second degré de discriminant égal à 5 admettant deux solutions mais une seule est positive, on peut donc conclure que

$$u_1 = \frac{1}{2}, \qquad u_2 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}.$$

(9) (a) On cherche donc sur l'intervalle $[0; 1]$ la solution de $g_n(x) = 0$ par dichotomie, tant que l'intervalle de recherche (dont les extémités a et b vont varier) a une longueur supérieure à la précision voulue. À chaque *tour de boucle*, on regarde si $g_n(c) > 0$ où c est le milieu de l'intervalle de recherche.
Si c'est le cas, on a déjà dépassé la solution, et on va donc chercher ensuite dans la moitié

gauche de l'intervalle donc on aura $b = c$, sinon on cherchera à droite, et $a = c$.

```
function u=valeur_approchee(n)
 a=0
 b=1
 while (b-a)>10^(-3)
     c = (a + b) / 2
     if c^n+c-1 >0 then
          b=c
     else
          a=c
     end
     u= c
  end
 endfunction
```

(b) L'observation de la figure permet de conjecturer que (u_n) est (strictement) croissante et semble converger vers 1.

(10) (a) Par définition, $u_n^n + u_n - 1 = 0$, ou encore
$$1 - u_n = u_n^n.$$
Comme $u_n \in]0;1[$, on peut calculer $f(u_n)$ et on a
$$f(u_n) = \frac{\ln(1-u_n)}{\ln(u_n)} = \frac{\ln(u_n^n)}{\ln(u_n)} = \frac{n\ln(u_n)}{\ln(u_n)} = n.$$

(b) D'après l'étude de f en début d'exercice, on sait que f est continue et strictement croissante sur $]0;1[$, elle réalise donc une bijection de $]0;1[$ sur $]0;+\infty[$ et admet une bijection réciproque f^{-1} elle aussi strictement croissante. En particulier,
$$f(u_n) = n \iff u_n = f^{-1}(n).$$
Comme $n < n+1$, la stricte croissante de f^{-1} donne alors
$$u_n < u_{n+1}$$
et (u_n) est bien (strictement) croissante.

x	0	n	$+\infty$
f^{-1}	0	u_n	1

(c) D'une part, comme (u_n) est croissante et majorée par 1, le théorème de convergence monotone assure qu'elle converge vers une certaine limite $\ell \in [0;1]$ (mais ce théorème ne donne pas la valeur de ℓ). En revanche, comme
$$u_n = f^{-1}(n),$$
on peut écrire (avec le tableau de variations de f^{-1}) que
$$\ell = \lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} f^{-1}(n) = 1.$$

Exercice 2

On note $\mathcal{A}_n$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dites *antisymétriques*, c'est à dire que

$$\mathcal{A}_n = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : \ {}^tM = -M\},$$

où ${}^tM$ désigne la transposée de M. On rappelle à ce propos que si A et B sont deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors

$${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB, \qquad \text{et} \qquad {}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA.$$

(1) On montre que $\mathcal{A}_n$ est un espace vectoriel en montrant que c'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. En effet

- La matrice nulle $0_n \in \mathcal{A}_n$. Sa transposée est encore la matrice nulle l'opposée de celle-ci est encore la matrice nulle. Ainsi, $\mathcal{A}_n$ est non vide.

- Soient M et N deux matrices de $\mathcal{A}_n$ (vérifiant donc ${}^tM = -M$ et ${}^tN = -N$) et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. D'après la remarque ci-dessus, on peut écrire

$${}^t(\lambda M + \mu N) = {}^t(\lambda M) + {}^t(\mu N) = \lambda\,{}^tM + \mu\,{}^tN = \lambda(-M) + \mu(-N) = -(\lambda M + \mu N)$$

  et $\lambda M + \mu N$ est encore une matrice antisymétrique. Ainsi, $\mathcal{A}_n$ est stable par combinaison linéaire et c'est donc un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et donc un espace vectoriel.

(2) Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice quelconque et $M \in \mathcal{A}_n$. Alors, comme ${}^t({}^tM) = M$ et d'après le rappel de début d'exercice,

$${}^t\left({}^tBMB\right) = {}^tB \cdot {}^tM \cdot {}^t\left({}^tB\right) = {}^tB \cdot (-M) \cdot B = -\left({}^tBMB\right)$$

et donc $({}^tBMB) \in \mathcal{A}_n$, ce qu'on voulait.

(3) Ici $n = 3$, on peut donc écrire explicitement les composantes d'une matrice M de $\mathcal{A}_3$ et résoudre le système correspondant. Plus précisément,

$$\begin{aligned}
M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in \mathcal{A}_3 \quad &\Longleftrightarrow \quad {}^tM = -M \\
&\Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \\
&\Longleftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{rcl} a &=& -a \\ b &=& -d \\ g &=& -c \\ e &=& -e \\ h &=& -f \\ i &=& -i \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} a &=& 0 \\ b &=& -d \\ g &=& -c \\ e &=& 0 \\ h &=& -f \\ i &=& 0 \end{array}\right. \\
&\Longleftrightarrow \quad M = b\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\
&\Longleftrightarrow \quad M = bA_1 + cA_2 + fA_3
\end{aligned}$$

et on peut écrire

$$\mathcal{A}_3 = \mathrm{Vect}(A_1, A_2, A_3).$$

Il est alors clair que la famille (A_1, A_2, A_3) est génératrice de $\mathcal{A}_3$. Pour qu'elle en forme une base, il est **nécessaire** de vérifier qu'elle est libre, ce qu'on fait tout de suite

$$xA_1 + yA_2 + zA_3 = 0 \iff \begin{cases} x &= 0 \\ y &= 0 \\ z &= 0 \end{cases}$$

ainsi, la famille est libre et forme une base de $\mathcal{A}_3$. Celle-ci étant composée de 3 vecteurs, on peut conclure que

$$\dim(\mathcal{A}_3) = 3.$$

(4) Soit $M \in \mathcal{A}_3$ de coordonnées (x, y, z) dans la base (A_1, A_2, A_3), ce qui veut dire que

$$M = xA_1 + yA_2 + zA_3 = \begin{pmatrix} 0 & x & y \\ -x & 0 & z \\ -y & -z & 0 \end{pmatrix}.$$

Alors,

$$M^2 = \begin{pmatrix} -(x^2+y^2) & -yz & xz \\ -yz & -(x^2+z^2) & -xy \\ xz & -xy & -(y^2+z^2) \end{pmatrix},$$

et

$$M^3 = \begin{pmatrix} 0 & -(x^2+y^2+z^2)x & -(x^2+y^2+z^2)y \\ (x^2+y^2+z^2)x & 0 & -(x^2+y^2+z^2)z \\ (x^2+y^2+z^2)y & (x^2+y^2+z^2)z & 0 \end{pmatrix} = -(x^2+y^2+z^2)M.$$

Ainsi, en posant $\alpha = -(x^2+y^2+z^2)$, on a $M^3 = \alpha M$.

Si M était inversible, on aurait l'existence d'une matrice inverse M^{-1} telle que $M \cdot M^{-1} = I$. Mais alors, en multipliant par M^{-1} on a

$$M^2 = M^{-1} \cdot M^3 = M^{-1} \cdot \alpha M = \alpha I,$$

ce qui n'est possible que si $x = y = z = 0$, mais dans ce cas M est la matrice nulle et n'est pas inversible. Ainsi, on conclut que M n'est pas inversible ou encore qu'aucune matrice anti-symétrique n'est inversible.