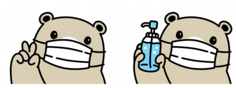
ECE 2 - Année 2020-2021
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
`http://frederic.gaunard.com`



Devoir Maison n°3

À rendre le 20/10

Problème 1 - Truel au soleil

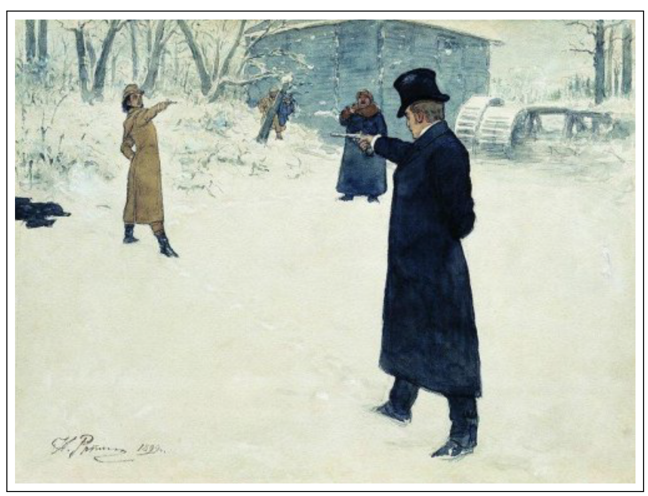
[1]

Ce premier problème comporte une part importante de programmation sous `SciLab`. *Si on attend évidemment que les programmes soient recopiés sur la copie rendue, il reste indispensable de les écrire dans* `SciNotes` *et de les faire tourner sur son ordinateur personnel et de ne pas se contenter d'une approche exclusivement sur papier.*

Trois gentlemen, Mr. White, Mr. Grey et Mr. Black se retrouvent opposés dans un *truel*, où chaque adversaire tire à son tour jusqu'à ce qu'il n'en reste qu'un.

Les trois hommes n'ont pas les mêmes niveaux de tir; Mr. Black fait mouche à chaque tir alors que Mr. Grey ne touche que deux fois sur trois. Quant à Mr. White, il ne réussit son tir qu'une fois sur trois. Les hommes sont des gentlemen, ils laissent donc Mr. White tirer en premier, puis Mr. Grey et enfin Mr. Black.

Mr. Black visera toujours, tant que celui-ci est vivant, Mr. Grey, et Mr. Grey essaiera également toujours de toucher Mr. Black. Mr. White en revanche se demande s'il doit, commencer par faire tomber Mr. Black ou Mr. Grey voire tirer en l'air et les laisser s'entretuer, donnant ainsi lieu à trois stratégies, numérotées 1, 2 et 3.



Duel between Onegin and Lenski, Ilya Repin, 1899. Pushkin Museum, Moscou. Domaine public.

[1] L'horizon s'éclaircit sublime le soleil s'est levé

Partie 1 : Duel entre Mr. White et Mr. Grey

Commençons pour simplifier par oublier Mr. Black. Il s'agit alors d'un **duel** entre Mr. White et Mr. Grey.
Ce duel propose deux alternatives; Mr. White peut tirer le premier, ou bien ce sera Mr. Grey.

(1) Dans cette question, on considère l'alternative ou Mr. White tire le premier.
Compléter la fonction `SciLab` suivant afin qu'elle renvoie 1 ou 0 selon que Mr. White sort victorieux ou mort de l'affrontement.

```
function Y=duel( )
    Y=2 //ni vainqueur ni vaincu
    while Y<>0 & Y<>1
    if ........................ then
        Y=1
    else
        if ................................ then
            Y=0
        end
    end
    end
endfunction
```

(2) Écrire une fonction analogue `Y=duel2( )` qui renvoit 1 ou 0 selon que Mr. White sort victorieux ou mort du duel mais cette fois dans le cas où Mr. Grey tire le premier.

(3) On **admet**[2] que la fréquence des valeurs observées sur des échantillons de taille 1000 donne des estimations des probabilités de victoire de Mr. White dans chacune des deux alternatives du duel.
Écrire une suite d'instruction permettant d'afficher le diagramme à bâtons des fréquences observées, et estimer alors empiriquement les probabilités de victoire de White dans les deux cas. On représentera le diagramme obtenu.

(4) (a) On se place à nouveau dans l'alternative où Mr. White tire le premier. On introduit la variable aléatoire X qui prend la valeur k si Mr. White est encore vivant pour sa $k-$ième tentative de tir et qu'il s'agit de sa première réussite, et qui vaut 0 qui Mr. White décède au cours du duel. On a donc $X(\Omega) = \mathbb{N}$.

(i) À l'aide des évènements W_k (resp. G_k) "Mr. White (resp. Mr Grey) réussit son $k-$ième tir", déterminer $P(X = k)$ pour $k \in \mathbb{N}^*$.

(ii) En déduire $P(X = 0)$ puis la probabilité p_1 que Mr. White sorte victorieux du duel. Comparer avec la valeur obtenue par simulation.

(b) On se place dans l'alternative où Mr. Grey tire le premier et on introduit la variable aléatoire Y qui vaut 0 si Mr. Grey meurt dans le duel et sinon, qui vaut k si son premier tir réussit est le $k-$ième. Déterminer la loi de Y et la probabilité p_2 que Mr. White sorte victorieux du duel dans cette alternative.

Partie 2: Trois stratégies pour Mr. White

On revient au problème initial du duel avec trois participants et donc les trois stratégies décrites précédemment pour Mr. White.

[2] On pourra lire les quelques explications dans la solution de ce devoir mais le détail sera développé dans le Chapitre 12

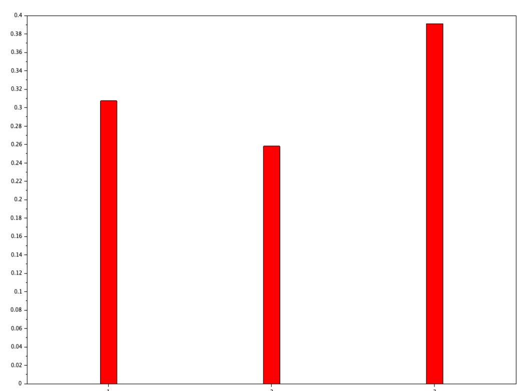
(1) Que font les instructions suivantes?

```
if rand()<1/3 then
    Y=duel2()
else
    if rand()<2/3 then
        Y=duel()
    else
        if rand()<1/3 then
            Y=1;
        else
            Y=0;
        end
   end
end
```

(2) Utiliser ces commandes et les compléter pour écrire une fonction `function Y=truel(n)` qui prend en argument n égal à 1, 2 ou 3, simule le truel avec la stratégie en argument, et renvoie 0 ou 1 selon que Mr. White en sort mort ou vainqueur.

(3) On complète le programme avec les instructions suivantes, qui permettent d'afficher la figure ci-contre.

```
T=[0,0,0];
for k=1:3
    S=zeros(1,10000)
    for j=1:10000
        S(j)=truel(k)
    end
    T(k)=mean(S)
end
bar(1:3, T, width=0.1, 'red')
```



(4) Quelle semble être la meilleure stratégie? On **justifiera de manière détaillée** le raisonnement en expliquant notamment le programme et la figure obtenue ci-dessus.

Problème 2

On convient que, pour tout réel x, on a $x^0 = 1$

(1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, justifier l'existence des intégrales:

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{(1+x)^2}\mathrm{d}x \text{ et } J_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\mathrm{d}x$$

(2) Calculer I_0 et I_1.

(3) (a) Pour tout n de $\mathbb{N}$, calculer $I_{n+2} + 2I_{n+1} + I_n$

(b) En déduire I_2.

(c) Compléter le script `SciLab` suivant pour qu'il permette le calcul de I_n (dans la variable b) et son affichage pour une valeur de n entrée par l'utilisateur.

```
n=input('n=?')
a=1/2
b= log(2) - 1/2
for k=2: n
   aux = a
   a=..................
   b=..................
end
disp (b)
```

(4) (a) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad 0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}.$$

(b) En déduire que la suite (I_n) est convergente et donner sa limite.

(5) Établir, à l'aide d'une intégration par parties, que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad I_n = n \cdot J_{n-1} - \frac{1}{2}.$$

(6) (a) Calculer J_0 puis exprimer, pour tout entier naturel n, $J_n + J_{n+1}$ en fonction de n.
(b) En déduire la valeur de J_1.

(7) En utilisant les questions 5) et 6), compléter le script `SciLab` suivant afin qu'il permette le calcul et l'affichage de I_n pour une valeur de n entrée par l'utilisateur.

```
n=input('n=?')
J=log (2)
for k=1: n-1
    J=................
end
I=......................
disp(I)
```

(8) Établir que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad J_n = (-1)^n \left(\ln(2) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right).$$

(9) (a) Utiliser les questions (4) et (5) pour déterminer la valeur de $\lim_{n \to +\infty} J_n$.

(b) En déduire la nature de la série de terme général $\dfrac{(-1)^{k-1}}{k}$ ainsi que la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$.

(c) Utiliser la question (5) pour déterminer un équivalent de J_n, du type $\frac{1}{\alpha n}$, avec $\alpha > 0$, lorsque n est au voisinage de $+\infty$.

(10) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\quad u_n = \ln(2) - \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{(-1)^{j-1}}{j}$.

(a) Déduire des questions précédentes un équivalent de u_n lorsque n est au voisinage de $+\infty$.
(b) Montrer que la série de terme général $\frac{(-1)^n}{2n}$ est convergente. Peut-on en déduire la nature de la série de terme général u_n?

(11) On se propose, malgré l'impasse précédente, de montrer que la série de terme général u_n est convergente. Pour ce faire, on admet le résultat suivant : si une suite (x_n) est telle que les suites (x_{2n}) et (x_{2n+1}) sont convergentes et de même limite ℓ, alors la suite (x_n) converge vers ℓ.

Pour tout entier naturel n non nul, on pose $\quad S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k.$

(a) Justifier que, pour tout entier naturel k non nul, on a $u_k = (k+1)u_{k+1} - ku_k + (-1)^k$.

(b) En déduire l'égalité suivante:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = (n+1)u_{n+1} - u_1 - \frac{1}{2}\left(1 - (-1)^n\right).$$

(c) Montrer alors que

$$\lim_{n\to+\infty} S_{2n} = \lim_{n\to+\infty} S_{2n+1} = \frac{1}{2} - \ln(2).$$

Conclure.

(12) Des trois résultats suivants, expliquer lequel on vient de démontrer?

$$(a)\ \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{j=1}^{k}\frac{(-1)^{j-1}}{j} = \frac{1}{2} - \ln(2), \quad (b)\ \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{j=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{j-1}}{j} = \frac{1}{2} - \ln(2), \quad (c)\ \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{j=k+1}^{+\infty}\frac{(-1)^{j-1}}{j} = \frac{1}{2} - \ln(2).$$