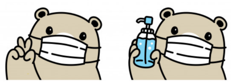
ECE 2 - Année 2020-2021
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com



Devoir Maison n°3

Solution

Problème 1 - Truel au soleil

Partie 1 : Duel entre Mr. White et Mr. Grey

(1) Dans cette question, on considère l'alternative ou Mr. White tire le premier.

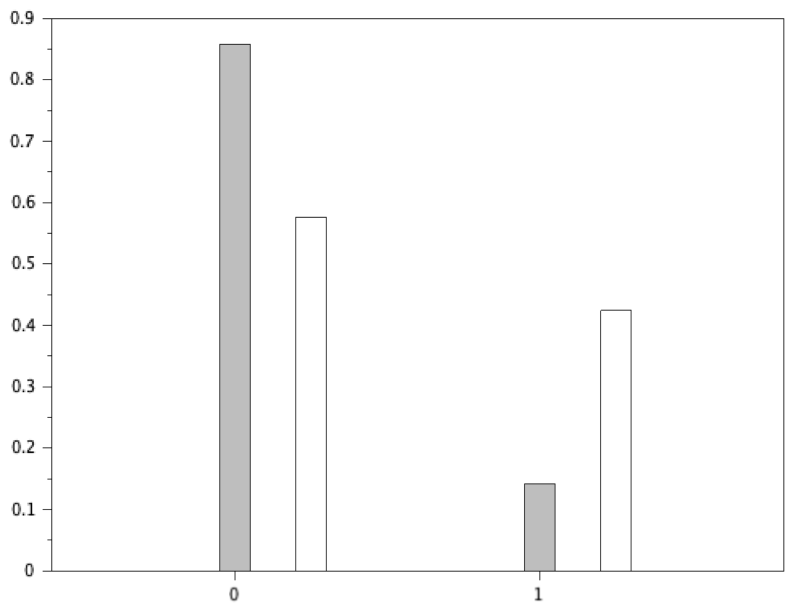
```
function Y=duel( )
    Y=2                                  //ni vainqueur ni vaincu
    while Y<>0 & Y<>1           //Tant que Y n'est égal ni à 0 ni à 1
    if rand( ) <= 1/3 then          //si White touche
        Y=1                              //White est victorieux
    else                                  //sinon
        if rand( ) <= 2/3 then      //si Grey touche
            Y=0                          //White décède
        end
    end
    end
endfunction
```

(2) On reprend le programme précédent, sauf que Grey tire en premier et, et cas de succès White ne s'en sort pas.

```
function Y=duel2( )
    Y=2                                  //ni vainqueur ni vaincu
    while Y<>0 & Y<>1           //Tant que Y n'est égal ni à 0 ni à 1
    if rand( ) <= 2/3 then          //si Grey touche
        Y=0                              //White est mort
    else                                  //sinon
        if rand( ) <= 1/3 then      //si White touche
            Y=1                           //White est victorieux
        end
    end
    end
endfunction
```

(3) Il s'agit de créer des *échantillons* des variables implicitement définies par les programmes précédents (des Bernoulli de paramètres p_1 et p_2 correspondant respectivement aux probabilités que White soit victorieux dans l'alternative où il tire le premier ou en deuxième). Pour pouvoir représenter sur la même figure, on décale les bâtons du premier échantillon et on modifie la largeur.

```
A=zeros(1,1000)
B=A
for k=1:1000
    A(k)=duel( )
    B(k)=duel2( )
end
S=tabul(A, 'i'); T=tabul(B, 'i')
bar(S(:, 1)+0.25, S(:, 2)/1000, 0.1, 'white') //largeur 0.1, blanc pour White
en premier
bar(T(:, 1), T(:, 2)/1000, 0.1, 'grey') //gris pour Grey en premier
```



On peut alors conjecturer que

$$p_1 \simeq 0.42, \qquad p_2 \simeq 0.14.$$

(4) (a) On se place à nouveau dans l'alternative où Mr. White tire le premier.

(i) Si White réussit son premier tir lors de sa $k-$ième tentative, les $k-1$ premières de tentatives de White **et** de Grey furent des échecs. Ainsi, par définition de X et par indépendance des tirs successifs (et donc des évènements W_i et G_j pour tous $i, j \in \mathbb{N}^*$), on peut écrire, pour $k \geq 1$,

$$\begin{aligned} P(X=k) &= P\left((\overline{W}_1 \cap \overline{G}_1) \cap (\overline{W}_2 \cap \overline{G}_2) \cap \cdots \cap (\overline{W}_{k-1} \cap \overline{G}_{k-1}) \cap W_k\right) \\ &= \left(\frac{2}{3} \times \frac{1}{3}\right) \times \left(\frac{2}{3} \times \frac{1}{3}\right) \times \cdots \times \left(\frac{2}{3} \times \frac{1}{3}\right) \times \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{2}{9}\right)^{k-1} \end{aligned}$$

(ii) Comme $X(\Omega)=\mathbb{N}$, il suit que

$$\begin{aligned} P(X=0) &= 1-\sum_{k=1}^{+\infty}P(X=k)=1-\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{2}{9}\right)^{k-1} \\ &= 1-\frac{1}{3}\sum_{j=0}^{+\infty}\left(\frac{2}{9}\right)^{j} \\ &= 1-\frac{1}{3}\times\frac{1}{1-2/9} \\ &= \frac{4}{7}. \end{aligned}$$

Il suit que

$$p_1=1-P(X=0)=1-\frac{4}{7}=\frac{3}{7}=0.4285714$$

ce qui est bien cohérent avec l'approximation faite précédemment.

(b) On définit Y de manière analogue à X dans le cas où Grey tire en premier. Ainsi ici, $p_2=P(Y=0)$. Il suit que

$$\begin{aligned} P(Y=k) &= P\left((\overline{G}_1\cap\overline{W}_1)\cap(\overline{G}_2\cap\overline{W}_2)\cap\cdots\cap(\overline{G}_{k-1}\cap\overline{W}_{k-1})\cap G_k\right) \\ &= \left(\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\right)\times\left(\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\right)\times\cdots\times\left(\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\right)\times\frac{2}{3} \\ &= \frac{2}{3}\left(\frac{2}{9}\right)^{k-1} \end{aligned}$$

ce qui donne

$$p_2 \;=\; P(Y=0)=1-\sum_{k=1}^{+\infty}P(Y=k)=1-\frac{2}{3}\sum_{j=0}^{+\infty}\left(\frac{2}{9}\right)^{j}=1-\frac{2}{3}\times\frac{1}{1-2/9}=\frac{1}{7}=0.1428571,$$

résultat encore cohérent avec la simulation précédente.

Partie 2: Trois stratégies pour Mr. White

On revient au problème initial du duel avec trois participants et donc les trois stratégies décrites précédemment pour Mr. White.

(1) On va décrire chacune des instructions pour expliquer ce à quoi va correspondre l'exécution de l'ensemble.

```
if rand()<1/3 then // si White réussit son tir (contre Black qu'il tue)
    Y=duel2()  // un duel s'engage entre White et Grey, Grey tire en premier
else           //sinon
    if rand()<2/3 then  //si Grey réussit son tir (contre Black qu'il tue)
        Y=duel()    // un duel s'engage entre White et Grey, White tire en
premier
    else   //sinon c'est à Black de tirer, il tue Grey, il reste White et Grey
        if rand()<1/3 then // c'est à White de tirer, s'il réussit
            Y=1;  //il tue Black et est victorieux du truel
        else  //sinon
            Y=0;  //Black le tue
        end
    end
end
```

Ainsi ce programme correspond à la simulation du truel dans la stratégie numéro 1; White décide de tirer sur Black. Y prend donc la valeur 0 ou 1 selon que White sort mort ou victorieux du truel.

(2) On s'inspire des lignes précédentes pour proposer le programme complet ci-dessous, prenant en compte chaque stratégie possible.

```
function Y=truel(n) //n=strategie 1,2 ou 3
    if n==1 then
        if rand()<1/3 then //si White tue Black
            Y=duel2() //duel White Grey, Grey commence
        else
            if rand()<2/3 then //si Grey tue Black
                Y=duel() //duel White Grey, White commence
            else
                if rand()<1/3 then //si White tue Black
                    Y=1;
                else
                    Y=0;
                end
            end
         end
    end
    if n==2 then
        if rand()<1/3 then //si White tue Grey
            Y=0 //Black tue White
        else
            if rand()<2/3 then //si Grey tue Black
                Y=duel() // duel White Grey, White commence
            else
                if rand()<1/3 then //si White tue Black
                    Y=1;
                else
                    Y=0;
                end
            end
        end
    end
    if n==3 then
        if rand()<2/3 then //si Grey tue Black
                Y=duel() // duel White Grey, White commence
            else
                if rand()<1/3 then //si White tue Black
                    Y=1;
                else
                    Y=0;
                end
            end
    end
endfunction
```

(3) Commentons les instructions:

```
T=[0,0,0]; //liste avec trois composantes nulles
for k=1:3
    S=zeros(1,10000)
    for j=1:10000
        S(j)=truel(k)
    end   //S est alors un 10000-echantillon de simulation du truel, stratégie
k
    T(k)=mean(S) // la moyenne de S renvoie exactement la fréquence d'
apparition du 1 (victoire de White)
end
bar(1:3, T, width=0.1, 'red')
```

On associe au truel implicitement une variable aléatoire de Bernoulli qui renvoie 0 ou 1 selon que White sort mort ou victorieux du truel.
Ainsi, chaque bâton correspond à la fréquence (obtenue comme moyenne des valeurs de la simulation) de victoire de White (sur 10000 simulations du truel), pour chacune des 3 stratégies. On observe que la meilleure stratégie (celle avec la fréquence de victoire la plus élevée) semble être la troisième (avec une estimation de la probabilité de succès autour de 0.39), celle où White laisse les deux autres participants s'entre-tuer. Pas méga *fairplay* mais bon.

Pour le plaisir, vérifions par le calcul la valeur obtenue. Pour cela, on introduit les B "lors d'un duel entre Black et Grey, où Grey tire en premier, Black sort victorieux et W "White sort victorieux du truel en tirant en l'air tant qu'il y a 3 participants mais en essayant de faire mouche dès lors qu'ils ne sont plus que deux".

Si dans le duel Grey-Black, Grey sort victorieux, c'est White qui commence à tirer et par conséquent, d'après la Partie 1

$$P_{\overline{B}}(W) = \frac{3}{7}.$$

D'autre part, si Black sort victorieux du duel Grey-Black, c'est White qui commence à tirer mais sa probabilité de succès n'est alors que de $1/3$ (il faut qu'il touche dès son premier tir, sinon Black le tue à la première tentative) donc

$$P_B(W) = \frac{1}{3}.$$

Concernant le duel Black-Grey, selon le même principe, Grey doit faire mouche au premier coup sinon qu'il repose en paix.

$$P(B) = \frac{1}{3}, \quad P(\overline{B}) = \frac{2}{3}.$$

Alors, par la formule des probabilités totales appliquée au s.c.e $\{B, \overline{B}\}$,

$$\begin{aligned} P(W) &= P_B(W)P(B) + P_{\overline{B}}(W)P(\overline{B}) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{3}{7} \times \frac{2}{3} \\ &= \frac{25}{53} = 0.3968254. \end{aligned}$$

Blabla d'anticipation à propos de l'estimation du paramètre p d'une variable de Bernoulli

Dans ce problème, on a, à plusieurs reprises, utilisé pour estimer un paramètre $p \in]0;1[$ la valeur de la fréquence d'apparition de la valeur 1 qui est aussi égale à la *moyenne* des valeurs renvoyées par la variable simulant l'issue du duel (ou truel).

Ceci repose sur des notions introduites et discutées au cours du *Chapitre 12* (Estimation); si $(X_1, ..., X_n)$ est un $n-$échantillon d'une même variable X (c'est à dire n copies indépendantes de cette variable, ici $\mathcal{B}(p)$), la moyenne (empirique)

$$\overline{X}_n = \frac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n}$$

est un *estimateur* sans biais et convergent de $E(X)$. C'est à dire que $E(\overline{X}_n) = E(X)$ et

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \lim_{n \to +\infty} P\left(\left|\overline{X}_n - E(X)\right| > \varepsilon\right) = 0.$$

Comme ici $E(X) = p$, la probabilité que la moyenne empirique s'éloigne de p tend vers 0 et "en moyenne", celle-ci renvoie la valeur de p, ce justifie qu'on sen serve pour estimer p.

Problème 2

Cet exercice correspond au problème du sujet **EDHEC 2020**.

(1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, les fonctions

$$x \longmapsto \frac{x^n}{(1+x)^2} \qquad \text{et} \qquad x \longmapsto \frac{x^n}{1+x}$$

sont continues sur $[0; 1]$, ainsi les intégrales correspondantes (I_n et J_n) sont bien définies.

(2) On trouve sans difficulté une primitive pour le calcul de I_0

$$I_0 = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(1+x)^2} = \left[-\frac{1}{1+x}\right]_0^1 = \frac{1}{2},$$

et, par exemple avec le changement de variable affine $u = 1 + x$ (donnant $\mathrm{d}u = \mathrm{d}x$)

$$I_1 = \int_0^1 \frac{x}{(1+x)^2}\mathrm{d}x = \int_1^2 \frac{u-1}{u^2}\mathrm{d}u = \int_1^2 \frac{\mathrm{d}u}{u} - \int_1^2 \frac{\mathrm{d}u}{u^2} = [\ln(u)]_1^2 - \left[-\frac{1}{u}\right]_1^2 = \ln(2) - \frac{1}{2}.$$

(3) (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Par linéarité de l'intégrale, on a

$$\begin{aligned} I_{n+2} + 2I_{n+1} + I_n &= \int_0^1 \frac{x^{n+2} + 2x^{n+1} + x^n}{(1+x)^2}\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \frac{x^n(x^2 + 2x + 1)}{(1+x)^2}\mathrm{d}x = \int_0^1 x^n \mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

(b) La relation précédente donne

$$I_2 = I_{0+2} = \frac{1}{0+1} - 2I_{0+1} - I_0 = 1 - 2\left(\ln(2) - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} - 2\ln(2).$$

(c) C'est la même idée que lorsqu'on veut calculer le terme d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2. Il faut une variable auxiliaire (ici notée `aux`) pour ne pas perdre l'information lorsqu'on *écrase*). À noter qu'on veut calculer I_k en fonction de I_{k-1} et I_{k-2}, il est donc bon de reformuler la relation de récurrence précédemment trouvée

$$I_k = \frac{1}{k-1} - 2I_{k-1} - I_{k-2}.$$

Plus précisément, on doit écrire le programme suivant

```
n=input('n=?')
a=1/2            //a correspond à I_0 et plus généralement I_{k-2}
b= log(2) - 1/2   //b correspond à I_1 et plus généralement I_{k-1}
for k=2: n
   aux = a         //on stocke temporairement la valeur de I_{k-2}
   a=b         //le dernier terme devient l'avant-dernier terme
   b=1/(k-1)-2*b-aux      //relation de récurrence
end
disp (b)
```

(4) (a) C'est un encadrement classiquement obtenu en majorant sous le signe intégral et par positivité de l'intégrale. Plus précisément, pour tout $x \in [0;1]$, on a $(1+x)^2 \geq 1$ et donc

$$0 \leq \frac{x^n}{(1+x)^2} \leq x^n.$$

Par positivité (ou croissance) de l'intégrale,

$$0 \leq \int_0^1 \frac{x^n}{(1+x)^2}\mathrm{d}x \leq \int_0^1 x^n \mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}$$

et on a bien l'encadrement voulu.

(b) Comme $1/(n+1) \to 0$, lorsque $n \to +\infty$, le théorème des gendarmes permet d'affirmer que I_n tend vers 0 lorsque $n \to +\infty$:

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = 0.$$

(5) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si l'on veut obtenir de la puissance $n-1$ à partir de x^n, il faut dériver. Ainsi, en posant

$$\begin{array}{rcl} u'(x) & = & \frac{1}{(1+x)^2} \\ v(x) & = & x^n \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{rcl} u(x) & = & -\frac{1}{1+x} \\ v('x) & = & nx^{n-1} \end{array}$$

on a deux fonctions u et v de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;1]$ rendant licite l'intégration par parties qui donne

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{(1+x)^2}\mathrm{d}x = \left[-\frac{x^n}{1+x}\right]_0^1 + n\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\mathrm{d}x = nJ_{n-1} - \frac{1}{2},$$

comme attendu.

(6) (a) Le calcul direct et rapide donne

$$J_0 = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x} = [\ln(1+x)]_0^1 = \ln(2).$$

Comme précédemment, par linéarité de l'intégrale

$$J_n + J_{n+1} = \int_0^1 \frac{x^n + x^{n+1}}{1+x}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x^n(1+x)}{1+x}\mathrm{d}x = \int_0^1 x^n\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}.$$

(b) La relation précédente permet de calculer J_1:

$$J_1 = J_{0+1} = \frac{1}{0+1} - J_0 = 1 - \ln(2).$$

(7) Le programme commence par nous faire calculer J_{n-1} à l'aide d'une boucle `for` permettant à chaque tour de calculer J_k grâce à la relation obtenue en ($6a$) à partir de J_{k-1}

$$J_k = \frac{1}{k} - J_{k-1}$$

Puis, d'utiliser la relation obtenue en (5) entre I_n et J_{n-1}. Cela donne le programme suivant

```
 n=input('n=?')
 J=log (2)       //On initialise avec la valeur de J_0
 for k=1: n-1
     J=1/k-J
 end
I=n*J-1/2
disp(I)
```

(8) C'est une récurrence.

- initialisation. Pour $n = 1$, on a d'une part $J_1 = 1 - \ln(2)$ et d'autre part
$$(-1)^1 \left(\ln(2) - \sum_{k=1}^{1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right) = -(\ln(2) - \frac{1}{1}) = 1 - \ln(2)$$
et la relation est vérifiée.

- hérédité. Supposons que pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$, la relation soit vraie. Mais alors, comme
$$(-1)^n(-1)^n = \left[(-1)^2\right]^n = 1,$$
on a
$$\begin{aligned}(-1)^{n+1} \left(\ln(2) - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right) &= -(-1)^n \left(\ln(2) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right) + (-1)^n \frac{(-1)^n}{n+1} \\ &= -J_n + \frac{1}{n+1} \qquad \text{(par HR)} \\ &= J_{n+1} \qquad \text{(par la Question (6))}\end{aligned}$$
ce qui termine la récurrence.

(9) (a) D'après ce qui précède, on a
$$J_n = \frac{I_{n+1} + 1/2}{n+1}$$
Mais comme $I_{n+1} \to 0$, l'algèbre des limites permet d'affirmer que $J_n \to 0$, $n \to +\infty$.

(b) La formule obtenue précédemment par récurrence se réécrit comme
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln(2) - (-1)^n J_n.$$
Mais alors, comme
$$-J_n \leq (-1)^n J_n \leq J_n,$$
le théorème des gendarmes et le fait que $J_n \to 0$ (et donc que $-J_n \to 0$ également) permet d'affirmer que $(-1)^n J_n \to 0$. Il suit que
$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln(2),$$
ce qui donne bien la convergence de la série considérée et la valeur de sa somme.

(c) On a déjà écrit ci-avant que
$$J_n = \frac{I_{n+1} + 1/2}{n+1}.$$
Or,
$$n+1 \sim n \qquad \text{et} \qquad I_{n+1} + \frac{1}{2} \sim \frac{1}{2} \qquad \text{car} \quad I_{n+1} \to 0,$$

et on peut donc conclure que

$$J_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n}.$$

(10) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\quad u_n = \ln(2) - \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{(-1)^{j-1}}{j}.$

(a) D'après ce qui précède, on observe que

$$u_n = (-1)^n J_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(-1)^n}{2n}.$$

(b) On sait déjà que la série de terme général $\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ est convergente. Mais comme on peut écrire

$$\frac{(-1)^n}{2n} = -\frac{1}{2} \times \frac{(-1)^{n-1}}{n},$$

et la série considérée a pour terme général le multiple d'une série convergente et est donc convergente. En revanche, malgré l'équivalence

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(-1)^n}{2n},$$

on ne peut pas (encore) conclure à la convergence de la série $\sum u_n$; pour appliquer le critère d'équivalence, il est nécessaire que les termes généraux équivalents soient tous deux de signe constant, ce qui n'est pas le cas ici.

(11) On se propose, malgré l'impasse précédente, de montrer que la série de terme général u_n est convergente. Pour ce faire, on admet le résultat suivant : si une suite (x_n) est telle que les suites (x_{2n}) et (x_{2n+1}) sont convergentes et de même limite ℓ, alors la suite (x_n) converge vers ℓ.

Pour tout entier naturel n non nul, on pose $\quad S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k.$

(a) Observons la relation souhaitée:

$$\begin{aligned} u_k = (k+1)u_{k+1} - ku_k + (-1)^k &\iff u_k + ku_k = (k+1)u_{k+1} + (-1)^k \\ &\iff u_k(k+1) = u_{k+1}(k+1) + (-1)^k \\ &\iff u_k = u_{k+1} + \frac{(-1)^k}{k+1} \\ &\iff u_{k+1} = u_k - \frac{(-1)^k}{k+1}. \end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= \ln(2) - \sum_{j=1}^{k+1} \frac{(-1)^{j-1}}{j} = \ln(2) - \sum_{j=1}^{k} \frac{(-1)^{j-1}}{j} - \frac{(-1)^k}{k+1} \\ &= u_k - \frac{(-1)^k}{k+1}, \end{aligned}$$

ce qui est bien équivalent à l'égalité demandée ce qui prouve donc que celle-ci est vérifiée.

(b) On somme la relation précédente entre 1 et n pour faire apparaître une somme télescopique (et utiliser la formule de la somme partielle d'une série géométrique - ici de raison (-1))

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} \left((k+1)u_{k+1} - ku_k + (-1)^k\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} (u_k = (k+1)u_{k+1} - ku_k) + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \\ &= (n+1)u_{n+1} - u_1 + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \qquad \text{(par télescopage)} \\ &= (n+1)u_{n+1} - u_1 + (-1)\frac{1-(-1)^n}{1-(-1)} \\ &= (n+1)u_{n+1} - u_1 - \frac{1-(-1)^n}{2}, \end{aligned}$$

ce qu'on voulait.

(c) Observons d'abord que $u_1 = \ln(2) - 1$. Ensuite, d'après la question précédente,

$$S_{2n} = (2n+1)u_{2n+1} - u_1$$

car $(-1)^{2n} = 1$. Or,

$$(2n+1)u_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} (2n+1)\frac{(-1)^{2n+1}}{2(2n+1)} = -\frac{1}{2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\frac{1}{2}$$

et donc

$$S_{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\frac{1}{2} - u_1 = \frac{1}{2} - \ln(2).$$

De la même manière,

$$S_{2n+1} = (2n+2)u_{2n+2} - u_1 - \frac{2}{2} = (2n+2)u_{2n+2} - \ln(2).$$

Et comme,

$$(2n+2)u_{2n+2} \underset{n\to+\infty}{\sim} (2n+2)\frac{(-1)^{2n+2}}{2(2n+2)} = \frac{1}{2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2},$$

on a

$$S_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2} - \ln(2).$$

En utilisant la remarque qui précède cette question (à savoir qu'une suite ayant à la fois sa sous-suite composée des termes de rang pair et celle composée des termes de rang impair convergeant vers une même limite converge vers cette limite), on conclut que

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{1}{2} - \ln(2).$$

et donc la série $\sum u_n$ converge.

(12) Comme

$$u_n = \ln(2) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{j=k+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}, \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{+\infty} u_k = \frac{1}{2} - \ln(2),$$

on vient finalement d'obtenir la formule (c):

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{j=k+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{j} = \frac{1}{2} - \ln(2).$$