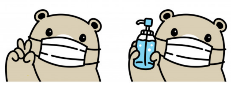
ECE 2 - Année 2020-2021
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
`http://frederic.gaunard.com`



Devoir Maison n°4

Cahier de vacances d'Automne
À rendre le 09/11

Exercice 1

Une urne contient des boules, numérotées de 1 à n ($n \geq 3$), indiscernables au toucher. On tire successivement et **sans remise** trois boules de l'urne. On note X la variable aléatoire correspondant au numéro de la première boule tirée, et Y celle au numéro de la deuxième boule et Z celui de la troisième.

(1) (a) Quelle est la loi de X? Préciser la valeur de son espérance et de sa variance.
(b) Écrire une fonction `SciLab` d'en-tête `function y=X(n)` qui simule la variable X. On pourra utiliser la commande `grand( )`.

(2) (a) L'objectif des questions suivantes est d'arriver à l'écriture d'une fonction permettant de simuler les variables Y et Z.
(i) Écrire une fonction d'en-tête `function [k, L]=selection(U)` qui prend en argument une liste de valeurs `U`, choisit aléatoirement (et uniformément) un élément `k` de `U` qu'elle renvoie ainsi que la nouvelle liste `L` composée des valeurs de `U` sauf `k`.
On rappelle que la commande `length(U)` permet d'obtenir le nombre de composantes de la liste `U`.
(ii) En déduire alors l'écriture d'une fonction d'entête `function [X, Y, Z]=tirages(n)` qui renvoie des simulations de X, Y et Z.

(b) Écrire une suite d'instructions permettant de générer des échantillons de taille 10000 de X, Y et Z. Représenter les diagrammes à bâtons des fréquences d'apparition des valeurs obtenues (pour $n = 5$ et pour $n = 10$). Que peut-on conjecturer quant aux lois de Y et Z?
(*On pourra essayer de représenter tous les bâtons sur un même graphique, en les espaçant de* ± 0.25 *et en utilisant des couleurs différentes.*)

(3) Pour $(i, j) \in [\![1; n]\!]^2$, déterminer, en distinguant $i = j$ et $i \neq j$, $P_{[X=i]}(Y = j)$.

(4) À l'aide de la formule des probabilités totales, déterminer la loi de Y.

Exercice 2

(1) Soit X une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre p. Déterminer la probabilité, en fonction de p, que X prenne une valeur paire.

(2) On veut répondre à la même question avec une variable Z suivant une loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$. On note alors a la valeur de la probabilité cherchée.

(a) Rappeler les formules définissant Z.
(b) On note Y la variable aléatoire qui vaut -1 si Z est impaire et 1 si Z est paire. Déterminer, en fonction de a la loi de Y. Préciser son espérance.
(c) En écrivant Y en fonction de Z et en utilisant le théorème de transfert puis la formule du binôme, trouver une autre formule pour $E(Y)$.
(d) En déduire la valeur, en fonction de n et p, de a.

Exercice 3

Dans cet exercice, on note ${}^tM$ la transposée de la matrice M et on rappelle la formule

$$ {}^t(MN) = {}^tN\,{}^tM. $$

Partie I

On note $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées réelles d'ordre 3 et on considère l'ensemble $\mathcal{F}$ défini par :

$$ \mathcal{F} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ -\alpha & 0 & 2\gamma \\ \alpha & -\beta & \gamma \end{pmatrix},\ (\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^3 \right\}. $$

(1) Montrer que $\mathcal{F}$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et en donner une base ainsi que sa dimension.

(2) Soit $P = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ -\alpha & 0 & 2\gamma \\ \alpha & -\beta & \gamma \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathcal{F}$. Montrer que

$$ P \text{ est inversible } \iff (\alpha \neq 0 \text{ et } \beta \neq 0 \text{ et } \gamma \neq 0)\,. $$

Partie II

On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à 2 et on note $(P_0,P_1,P_2) = (1,X,X^2)$ sa base canonique. On définit alors l'application φ de $\mathbb{R}_2[X]$ suivante.

$$ \begin{array}{rccl} \varphi\ : & \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ & P(X) & \longmapsto & (1+X)P(X) + (1+X)P'(X) - \dfrac{1}{2}X(1+X)^2P''(X) \end{array} $$

(3) Montrer que φ est une application linéaire de $\mathbb{R}_2[X]$.
On admet que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.

(4) Calculer les images des polynômes P_0, P_1 et P_2 par φ puis en déduire la matrice A de φ dans la base (P_0,P_1,P_2).

(5) Déterminer une base (U) de $\text{Ker}(A)$, une base (V) de $\text{Ker}(A-I)$ et une base (W) de $\text{Ker}(A-3I)$.

(6) Vérifier que (U, V, W) forme une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Que peut-on en conclure à propos de la matrice Q donc les colonnes sont respectivement U, V et W?

(7) On note (R_0, R_1, R_2) la famille de polynômes de $\mathbb{R}_2[X]$ ayant respectivement pour coordonnées U, V et W dans la base (P_0, P_1, P_2).
   (a) Expliciter R_0, R_1, R_2. Justifier que (R_0, R_1, R_2) forme une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
   (b) Montrer que si $\alpha \neq 0$ et $\beta \neq 0$ et $\gamma \neq 0$, alors la famille $(\alpha R_0, \beta R_1, \gamma R_2)$ forme une base de $\mathbb{R}_2[X]$. Quelle est la matrice de passage de (P_0, P_1, P_2) vers cette base? On la notera P.
   (c) Quelle est matrice D de φ dans cette base? Écrire la formule de changement de base correspondante pour expliciter un lien entre A, D et P.

On cherche maintenant à montrer qu'on peut trouver des valeurs de α, β et γ pour lesquelles :

$$A = PD\,{}^tP \quad \text{où } {}^tP \text{ désigne la matrice transposée de la matrice } P.$$

(8) (a) Calculer le produit $P\,{}^tP$ en fonction de α, β et γ.
   (b) En déduire l'existence de valeurs de α, β et γ telles que ${}^tP = P^{-1}$.
   (c) Conclure qu'il existe un matrice P de $\mathcal{F}$ telle que $A = P\,D\,{}^tP$.

Problème

On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$\forall t \in]0, +\infty[,\ f(t) = t + \frac{1}{t}.$$

Partie 1 : Étude d'une fonction

(1) Étudier les variations de la fonction f sur $]0, +\infty[$.
   Dresser le tableau des variations de f en précisant les limites en 0 et en $+\infty$.
   Préciser la nature d'éventuelles branches infinies de $\mathcal{C}_f$.

(2) Montrer que f réalise une bijection de $[1, +\infty[$ vers $[2, +\infty[$. Dresser le tableau de variations de la bijection réciproque de la restriction de f à $[1, +\infty[$ que l'on notera g.

(3) (a) Dresser le tableau de variations de g.
   (b) Justifier que la fonction g est dérivable sur $]2, +\infty[$.
   (c) Soit $y \in [2, +\infty[$.
   En se ramenant à une équation du second degré, résoudre l'équation $f(t) = y$ d'inconnue $t \in]0, +\infty[$. En déduire une expression de $g(y)$ en fonction de y.

Partie 2 : Étude d'une suite

On introduit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$u_1 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n^2 u_n} = \frac{1}{n} f(nu_n).$$

(4) Montrer, que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, u_n existe et $u_n \geqslant 1$.

(5) Recopier et compléter les lignes 3 et 4 de la fonction `SciLab` suivante afin que, prenant en argument un entier n de $\mathbb{N}^*$, elle renvoie la valeur de u_n.

```
function u = suite(n)
    u  = 1
    for k = ..............
        u = ..............
    end
endfunction
```

(6) On pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $v_n = u_{n+1} - u_n$.

(a) Montrer

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \, 0 \leqslant v_n \leqslant \frac{1}{n^2}.$$

(b) En déduire la nature de la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} v_n$.

(c) Calculer, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, $\sum\limits_{k=1}^{n-1} v_k$.

En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers un réel ℓ, que l'on ne cherchera pas à déterminer.

(7) (a) Montrer que, pour tout entier k supérieur ou égal à 2, on a

$$\frac{1}{k^2} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^2} \mathrm{d}t.$$

(b) Pour tous entiers n et p tels que $2 \leqslant p < n$, calculer $\sum\limits_{k=p}^{n-1} v_k$ et en déduire :

$$0 \leqslant u_n - u_p \leqslant \int_{p-1}^{n-1} \frac{1}{t^2} \mathrm{d}t.$$

(c) En déduire, pour tout entier n supérieur ou égal à 3 : $u_2 \leqslant u_n \leqslant 1 + u_2$.
Montrer alors que ℓ appartient à l'intervalle $[2; 3]$.

(d) Montrer, pour tout entier p supérieur ou égal à 2 :

$$0 \leqslant \ell - u_p \leqslant \frac{1}{p-1}$$

(e) En déduire une fonction `SciLab` qui renvoie une valeur approchée de ℓ à 10^{-4} près.

Approfondissement***

Cet exercice est réservé aux étudiant.e.s suffisamment à l'aise et avancé.e.s dans la maîtrise des notions plus basiques. Si le moment n'est pas encore venu de les attaquer, on pourra y revenir plus tard dans l'année.

Soit $(u_n)_{n \geqslant 0}$ une suite de réels. Si la série numérique de terme général u_n converge, on dit qu'elle converge à l'ordre 1 et on note alors $(R_{1,n})_{n \geqslant 0}$ la suite des restes de cette série, autrement dit:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad R_{1,n} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k.$$

Si à nouveau la **série** de terme général $R_{1,n}$ converge, on dit que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge à l'ordre 2 et on note $(R_{2,n})_{n\geqslant 0}$ la suite des restes de cette série, autrement dit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad R_{2,n} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} R_{1,k}.$$

Plus généralement, pour tout entier $p \geqslant 2$, si la série de terme général $R_{p-1,n}$ converge, on dit que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge à l'ordre p et on note alors $(R_{p,n})_{n\geqslant 0}$ la suite des restes de cette série :

$$R_{p,n} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} R_{p-1,k}.$$

On peut noter:pour tout $n \in \mathbb{N}, R_{0,n} = u_n$.

Le but de cet exercice est d'étudier, sur certains exemples, l'ordre de la convergence de la série de terme général u_n.

(1) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On considère, **dans cette question uniquement**, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$.

  (a) Rappeler la condition nécessaire est suffisante sous laquelle $\sum u_n$ converge.
  On se place désormais sous cette condition.

  (b) Pour tout entier $k \geqslant 2$, justifier que :

$$\int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \leqslant \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}.$$

  (c) En déduire que, pour tout $n \geqslant 1$,

$$\frac{1}{\alpha-1} \cdot \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} \leqslant R_{1,n} \leqslant \frac{1}{\alpha-1} \cdot \frac{1}{n^{\alpha-1}}.$$

  (d) En déduire que :

$$R_{1,n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}.$$

  (e) Sous quelle condition nécessaire et suffisante sur α, la série $\sum u_n$ converge-t-elle à l'ordre 2?

  (f) Conjecturer à quel ordre la série $\sum u_n$ converge.

(2) On considère, **dans cette question uniquement**, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{1}{n^n}$.

  (a) Montrer que la série $\sum u_n$ converge.

  (b) Montrer que, pour tout $k \geqslant 3, u_k \leqslant \dfrac{1}{3^k}$, puis en déduire que, pour tout $n \geqslant 2$:

$$0 \leqslant R_{1,n} \leqslant \frac{1}{2.3^n}.$$

  (c) En déduire que la série $\sum u_n$ converge à l'ordre 2 , et que, pour tout $n \geqslant 1$:

$$0 \leqslant R_{2,n} \leqslant \frac{1}{4.3^n}.$$

  (d) Montrer que, pour tout $p \geqslant 1$, la série $\sum u_n$ converge à l'ordre p et que pour tout $n \geqslant 1$

$$0 \leqslant R_{p,n} \leqslant \frac{1}{2^p \cdot 3^n}$$

  (e) La série $\sum R_{n,n}$ converge-t-elle ?

(3) On considère, **dans cette question uniquement**, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n+1}$.

(a) Montrer que:

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\mathrm{d}t = 0.$$

(b) Soit $N \in \mathbb{N}$. En remarquant que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\frac{1}{k+1} = \int_0^1 t^k \mathrm{d}t,$$

montrer que :

$$\sum_{n=0}^{N} u_n = \int_0^1 \frac{dt}{1+t} - \int_0^1 \frac{(-t)^{N+1}}{1+t}\mathrm{d}t.$$

(c) En déduire que la série $\sum u_n$ converge et que, pour tout $n \geqslant 0$:

$$R_{1,n} = \int_0^1 \frac{(-t)^{n+1}}{1+t}\mathrm{d}t.$$

(d) Montrer par récurrence que, pour tout entier $p \geqslant 1$, la série $\sum u_n$ converge à l'ordre p et que pour tout $n \geqslant 0$:

$$R_{p,n} = \int_0^1 \frac{(-t)^{n+p}}{(1+t)^p}\mathrm{d}t.$$