ECE 2 - Année 2020-2021
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Devoir Maison n°4

Cahier de vacances d'Automne

Solution

Exercice 1

Une urne contient des boules, numérotées de 1 à n ($n \geq 3$), indiscernables au toucher. On tire successivement et **sans remise** trois boules de l'urne. On note X la variable aléatoire correspondant au numéro de la première boule tirée, et Y celle au numéro de la deuxième boule et Z celui de la troisième.

(1) (a) La description de l'expérience permet de reconnaître pour X une loi uniforme $\mathcal{U}(\llbracket 1; n \rrbracket)$. Le cours nous donne tout de suite

$$E(X) = \frac{n+1}{2}, \qquad V(X) = \frac{n^2-1}{12}.$$

(b) Sans difficulté,

```
function y=X(n)
    y=grand(1,1, 'uin', 1, n)
endfunction
```

(2) (a) (i)

```
function [k, L]=selection(U)
    N=length(U) //nombre de termes liste U
    j=grand(1,1,'uin', 1, N) //choix d'un rang au hasard unif.
    k=U(j) //terme de la liste correspondant
    L=[U(1:j-1), U(j+1:N)] //concaténation nouvelle liste
endfunction
```

(ii) On se sert du programme précédent

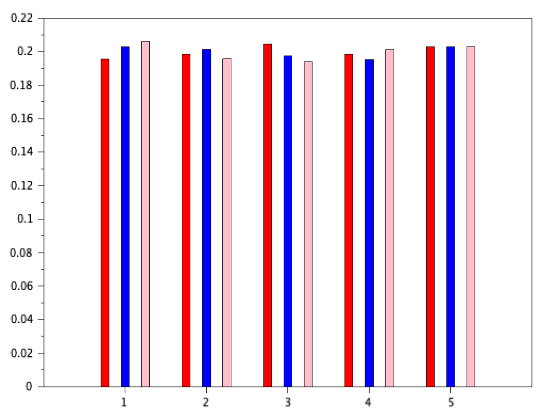
```
function [X,Y,Z]=tirages(n)
    U=[1:n] //liste initiale des boules dispo
    [X,U]=selection(U)
    [Y,U]=selection(U)
    [Z,U]=selection(U)
endfunction
```

(b) On propose les instructions suivantes permettant de générer des échantillons `A`, `B`, `C` de taille 10000 de X, Y et Z.

```
n=5 //on fait ensuite n=10
A=[ ]
B=[ ]
C=[ ]
for k=1:10000
    [X,Y,Z]=tirages(n)
    A=[A, X]
    B=[B, Y]
    C=[C, Z]
end
S=tabul(A, 'i')
T=tabul(B, 'i')
V=tabul(C, 'i')
bar(S(:,1)-0.25, S(:, 2)/10000, 0.1, 'red') //X en rouge
bar(T(:,1)+0.25, T(:, 2)/10000, 0.1, 'pink')//Y en rose
bar(V(:,1), V(:, 2)/10000, 0.1, 'blue')//Z en bleu
```

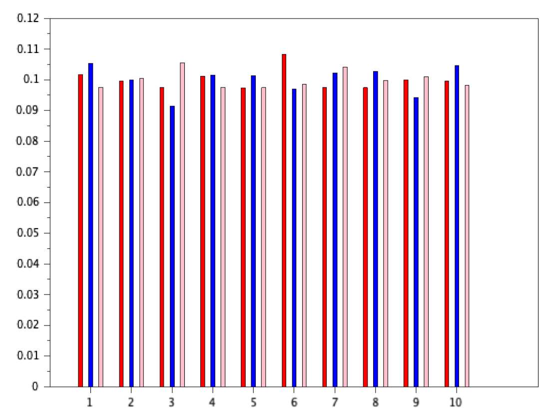
Le résultat affiché est alors le suivant

Pour $n = 5$



Tous les bâtons ont (presque) la même hauteur (environ $0.2 = 1/5$). On peut conjecturer que X, Y et Z suivent toutes trois une loi uniforme $\mathcal{U}([\![1;5]\!])$.

Pour $n = 10$



Tous les bâtons ont (presque) la même hauteur (environ $0.1 = 1/10$). On peut conjecturer que X, Y et Z suivent toutes trois une loi uniforme $\mathcal{U}([\![1;10]\!])$.

On peut alors conjecturer que, pour tout $n \geq 3$, X, Y et Z suivent toutes trois la loi uniforme $\mathcal{U}([\![1;n]\!])$ (ce qu'on sait déjà pour X mais pas pour les deux autres et qu'on va montrer pour Y ci-après).

(3) Les tirages étant sans remise, on ne peut pas piocher deux fois la même boule. Si les numéros des boules sont différents, sachant $[X = i]$, il reste donc $n - 1$ boules dans l'urne et il suit que

$$P_{[X=i]}(Y = j) = \begin{cases} \dfrac{1}{n-1}, & \text{si } i \neq j \\ 0, & \text{si } i = j \end{cases}$$

(4) Soit $j \in [\![1;n]\!]$.
D'après la formule des probabilités totales appliquée au s.c.e $\{[X = i] :\ i \in [\![1;n]\!]\}$, on a

$$
\begin{aligned}
P(Y=j) &= \sum_{i=1}^{n} P_{[X=i]}(Y=j)P(X=i) \\
&= \sum_{i=1}^{j-1} P_{[X=i]}(Y=j)P(X=i) + \sum_{i=j+1}^{n} P_{[X=i]}(Y=j)P(X=i) \qquad (\text{car } P_{[X=j]}(Y=j)=0) \\
&= \sum_{i=1}^{j-1} \frac{1}{n-1} \times \frac{1}{n} + \sum_{i=j+1}^{n} \frac{1}{n-1} \times \frac{1}{n} \\
&= \frac{1}{n-1} \times \frac{1}{n} \times (j-1+n-j) \\
&= \frac{1}{n}
\end{aligned}
$$

Ainsi, on peut bien conclure que

$$Y \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1;n]\!]).$$

Exercice 2

(1) Notons A l'évènement "X prend une valeur paire". Alors, on voit que

$$A = \bigcup_{k=1}^{+\infty} [X=2k].$$

Les évènements étant incompatibles, on a

$$
\begin{aligned}
P(A) &= \sum_{k=1}^{+\infty} P(X=2k) = \sum_{k=1}^{+\infty} (1-p)^{2k-1} p \\
&= p(1-p) \sum_{k=1}^{+\infty} p(1-p)^{2(k-1)} = p(1-p) \sum_{k=1}^{+\infty} \left(p(1-p)^2\right)^{k-1} \\
&= p(1-p) \times \frac{1}{1-(1-p)^2} = p(1-p) \times \frac{1}{(2-p)p} \\
&= \frac{1-p}{2-p}.
\end{aligned}
$$

On remarque notamment que $P(A) < 1/2$, il est donc plus probable d'obtenir une valeur impaire que paire pour une loi géométrique...

(2) On note $a = P(A)$ avec cette fois $Z \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$.

(a) Le cours nous dit que $Z(\Omega) = [\![0;n]\!]$ et que

$$\forall k \in [\![0;n]\!], \qquad P(Z=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

(b) On observe que

$$Y = \begin{cases} -1, & \text{si } Z \text{ impair} \\ 1, & \text{si } Z \text{ pair} \end{cases}$$

Ainsi, $P(Y=1) = P(Z \text{ pair}) = a$ et $P(Y=-1) = 1-a$. En particulier,

$$E(Z) = a + (-1) \times (1-a) = 2a - 1.$$

(c) D'après les règles de calcul sur les puissances de (-1), on peut écrire

$$Y = (-1)^Z.$$

Mais alors, le théorème de transfert permet d'écrire

$$\begin{aligned} E(Y) &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k P(Z=k) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-p)^k (1-p)^{n-k} \\ &= (-p+1-p)^n \\ &= (1-2p)^n \end{aligned}$$

par la formule du binôme.

(d) En combinant les questions précédentes

$$E(Y) = 2a - 1 = (1-2p)^n \Longleftrightarrow a = \frac{1+(1-2p)^n}{2}.$$

Ces questions apparaissaient dans le sujet **ECRICOME 2018**.

Exercice 3

Dans cet exercice, on note ${}^tM$ la transposée de la matrice M et on rappelle la formule

$${}^t(MN) = {}^tN\, {}^tM.$$

Partie I

On note $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées réelles d'ordre 3 et on considère l'ensemble $\mathcal{F}$ défini par :

$$\mathcal{F} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ -\alpha & 0 & 2\gamma \\ \alpha & -\beta & \gamma \end{pmatrix},\ (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3 \right\}.$$

(1) D'après la définition de $\mathcal{F}$,

$$M \in \mathcal{F} \iff M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ -\alpha & 0 & 2\gamma \\ \alpha & -\beta & \gamma \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi,

$$\mathcal{F} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

et $\mathcal{F}$ est bien un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
La famille formée es trois matrices ci-dessus (appelons-les J, K et L) est génératrice de $\mathcal{F}$. Pour qu'elle forme une base de $\mathcal{F}$, il reste à montrer (ou au moins à justifier) qu'elle est libre. Mais, c'est immédiat

$$\alpha J + \beta K + \gamma L = 0 \Longleftrightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$$

et (J, K, L) forme bien une base de $\mathcal{F}$ qui est alors de dimension 3.

(2) L'inversibilité d'une matrice étant préservée par opérations sur les lignes, on a

$$\begin{aligned} P = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ -\alpha & 0 & 2\gamma \\ \alpha & -\beta & \gamma \end{pmatrix} \text{ inversible } & \iff \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ 0 & \beta & 3\gamma \\ 0 & 2\beta & 0 \end{pmatrix} \text{ inversible} \\ & \iff \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ 0 & \beta & 3\gamma \\ 0 & 0 & 6\gamma \end{pmatrix} \text{ inversible} \\ & \iff [\alpha \neq 0 \text{ et } \beta \neq 0 \text{ et } \gamma \neq 0] \end{aligned}$$

car la dernière matrice est triangulaire supérieure et son inversibilité est caractérisée par l'absence de zéro sur sa diagonale.

Partie II

On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à 2 et on note $(P_0, P_1, P_2) = (1, X, X^2)$ sa base canonique. On définit alors l'application φ de $\mathbb{R}_2[X]$ suivante.

$$\begin{aligned} \varphi \ : \ \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow \mathbb{R}_2[X] \\ P(X) & \longmapsto (1+X)P(X) + (1+X)P'(X) - \frac{1}{2}X(1+X)^2P''(X) \end{aligned}$$

(3) Soient $P, Q \in \mathbb{R}_2[X]$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \varphi(\alpha P + \beta Q) &= (1+X)(\alpha P + \beta Q)(X) + (1+X)(\alpha P + \beta Q)'(X) - \frac{1}{2}X(1+X)^2(\alpha P + \beta Q)''(X) \\ &= (1+X)(\alpha P(X) + \beta Q(X)) + (1+X)(\alpha P'(X) + \beta Q'(X)) \\ & \qquad - \frac{1}{2}X(1+X)^2(\alpha P''(X) + \beta Q''(X)) \\ &= \alpha\left((1+X)P(X) + (1+X)P'(X) - \frac{1}{2}X(1+X)^2P''(X)\right) \\ & \qquad + \beta\left((1+X)Q(X) + (1+X)Q'(X) - \frac{1}{2}X(1+X)^2Q''(X)\right) \\ &= \alpha\varphi(P) + \beta\varphi(Q) \end{aligned}$$

et φ est bien une application linéaire.
On admet que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.

(4) Commençons par observer que $P_0'(X) = P_0''(X) = 0$, $P_1'(X) = P_0(X)$, $P_1''(X) = 0$, $P_2'(X) = 2P_1(X)$ et $P_2''(X) = 2P_0(X)$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \varphi(P_0) &= (1+X)P_0(X) + (1+X)P_0'(X) - \frac{1}{2}X(1+X)^2P_0''(X) \\ &= (1+X) \\ &= P_0 + P_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi(P_1) &= (1+X)P_1(X) + (1+X)P_1'(X) - \frac{1}{2}X(1+X)^2P_1''(X) \\ &= (1+X)X + (1+X) = X + X^2 + 1 + X = 1 + 2X + X^2 \\ &= P_0 + 2P_1 + P_2 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\varphi(P_2) &= (1+X)P_2(X)+(1+X)P_2'(X)-\frac{1}{2}X(1+X)^2P_2''(X)\\ &= (1+X)X^2+(1+X)2X-\frac{1}{2}X(1+X)^2 2\\ &= X^2+X^3+2X+2X^2-X-2X^2-X^3 = X+X^2\\ &= P_1+P_2\end{aligned}$$

Ainsi, on peut former la matrice de φ dans la base (P_0, P_1, P_2), que l'on note A,

$$A=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&2&1\\0&1&1\end{pmatrix}.$$

(5) On résout:

$$\begin{aligned}U=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in \mathrm{Ker}(A) &\iff AU=0\\ &\iff \left\{\begin{array}{rcl}x+y&=&0\\x+2y+z&=&0\\y+z&=&0\end{array}\right.\\ &\iff \left\{\begin{array}{rcl}x+y&=&0\\y+z&=&0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl}x&=&-y=z\\y&=&-z\end{array}\right.\\ &\iff U=\begin{pmatrix}z\\-z\\z\end{pmatrix}=z\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

et on peut écrire

$$\mathrm{Ker}(A)=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\right)$$

(En particulier, $U=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ forme une base du noyau de A.) De même,

$$\begin{aligned}V=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in \mathrm{Ker}(A-I) &\iff AV=V\\ &\iff \left\{\begin{array}{rcl}x+y&=&x\\x+2y+z&=&y\\y+z&=&z\end{array}\right.\\ &\iff \left\{\begin{array}{rcl}y&=&0\\x&=&-z\end{array}\right.\\ &\iff V=\begin{pmatrix}-z\\0\\z\end{pmatrix}=z\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

et on peut écrire

$$\mathrm{Ker}(A-I)=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$$

(En particulier, $V = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ forme une base du noyau de $A - I$.) Enfin,

$$\begin{aligned}
W = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(A-3I) &\iff AW = 3W \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl} x+y &=& 3x \\ x+2y+z &=& 3y \\ y+z &=& 3z \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} 2x-y &=& 0 \\ x-y+z &=& 0 \\ -y+2z &=& 0 \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& z \\ y &=& 2z \end{array}\right. \\
&\iff W = \begin{pmatrix} z \\ 2z \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

et on peut écrire

$$\mathrm{Ker}(A-3I) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

(En particulier, $W = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ forme une base du noyau de $A - 3I$.)

(6) La famille (U, V, W) étant composée de 3 vecteurs de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ (espace de dimension 3), on montre qu'elle en forme une base en vérifiant qu'elle est libre:

$$\alpha U + \beta V + \gamma W = 0 \iff \left\{\begin{array}{rcl} \alpha - \beta + \gamma &=& 0 \\ -\alpha + 2\gamma &=& 0 \\ \alpha + \beta + \gamma &=& 0 \end{array}\right. \iff \alpha = \beta = \gamma = 0$$

C'est donc une base, et la matrice Q est la matrice de passage de la base canonique vers cette base; elle est donc inversible.

(7) On note (R_0, R_1, R_2) la famille de polynômes de $\mathbb{R}_2[X]$ ayant respectivement pour coordonnées U, V et W dans la base (P_0, P_1, P_2).

(a) Par définition des coordonnées

$$\begin{aligned}
R_0 &= P_0 - P_1 + P_2 = 1 - X + X^2 \\
R_1 &= -P_0 + P_2 = -1 + X^2 \\
R_2 &= P_0 + 2P_1 + P_2 = 1 + 2X + X^2
\end{aligned}$$

La famille (U, V, W) des coordonnées de R_0, R_1, R_2 forme une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ donc (R_0, R_1, R_2) forme une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

(b) Soit P la matrice dont les colonnes sont les coordonnées de $\alpha R_0, \beta R_1, \gamma R_2$ dans (P_0, P_1, P_2);

$$P = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ -\alpha & 0 & 2\gamma \\ \alpha & -\beta & \gamma \end{pmatrix}$$

est une matrice de $\mathcal{F}$ pour laquelle une condition nécessaire et suffisante pour l'inversibilité est connue. D'après la Question (2) de la Partie 1, cette matrice est inversible (car $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$ et $\gamma \neq 0$) et est donc la matrice de passage de (P_0, P_1, P_2) vers $(\alpha R_0, \beta R_1, \gamma R_2)$ qui est donc une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

(c) R_0 est choisi dans $\text{Ker}(\varphi)$ donc αR_0 en est aussi un élément et vérifie $\varphi(\alpha R_0) = 0$. Pour des raisons analogues, $\varphi(\beta R_1) = \beta R_1$ et $\varphi(\gamma R_2) = 3\gamma R_2$, ce qui permet d'écrire

$$D = \text{Mat}\left(\varphi, (\alpha R_0, \beta R_1, \gamma R_2)\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

La formule de changement de base permet d'écrire que

$$A = PDP^{-1}.$$

On cherche maintenant à montrer qu'on peut trouver des valeurs de α, β et γ pour lesquelles :

$$A = PD\,{}^tP \quad \text{où } {}^tP \text{ désigne la matrice transposée de la matrice } P.$$

(8) (a) C'est un calcul.

$$P\,{}^tP = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ -\alpha & 0 & 2\gamma \\ \alpha & -\beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & -\alpha & \alpha \\ \beta & 0 & -\beta \\ \gamma & 2\gamma & \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^2+\beta^2+\gamma^2 & -\alpha^2+2\gamma^2 & \alpha^2-\beta^2+\gamma^2 \\ -\alpha^2+2\gamma^2 & \alpha^2+4\gamma^2 & -\alpha^2+2\gamma^2 \\ \alpha^2-\beta^2+\gamma^2 & -\alpha^2+2\gamma^2 & \alpha^2+\beta^2+\gamma^2 \end{pmatrix}$$

(b) Il suffit de montrer qu'il existe (et pas forcément de toutes les déterminer) des solutions à l'équation $P\,{}^tP = I$.

$$\begin{aligned} P\,{}^tP = I \quad &\Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} \alpha^2+\beta^2+\gamma^2 & -\alpha^2+2\gamma^2 & \alpha^2-\beta^2+\gamma^2 \\ -\alpha^2+2\gamma^2 & \alpha^2+4\gamma^2 & -\alpha^2+2\gamma^2 \\ \alpha^2-\beta^2+\gamma^2 & -\alpha^2+2\gamma^2 & \alpha^2+\beta^2+\gamma^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} \alpha^2+\beta^2+\gamma^2 & = & 1 \\ -\alpha^2+2\gamma^2 & = & 0 \\ \alpha^2-\beta^2+\gamma^2 & = & 1 \\ \alpha^2+4\gamma^2 & = & 1 \end{array} \right. \\ &\Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} \alpha^2 & = & 2\gamma^2 \\ \beta^2 & = & 3\gamma^2 \\ 6\gamma^2 & = & 1 \end{array} \right. \end{aligned}$$

En prenant par exemple $\gamma = 1/\sqrt{6}$, $\beta = 1/\sqrt{2}$ et $\alpha = 1\sqrt{3}$, on a une solution. Ainsi, il existe une matrice P qui satisfait l'équation voulue.

(c) D'après la formule de changement de base et le fait que $P^{-1} = {}^tP$, on a bien

$$A = PD\,{}^tP.$$

Problème

Ce problème provient du sujet **EML 2019**. La solution est proposé par un(e) collègue.

On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$\forall t \in]0, +\infty[, \; f(t) = t + \frac{1}{t}.$$

Partie 1 : Étude d'une fonction

(1) f est dérivable sur $]0,+\infty[$ comme somme de fonctions usuelles dérivables et pour tout $t>0$,

$$f'(t) = 1 - \frac{1}{t^2} > 0 \iff t^2 > 1 \iff t > 1$$

car $t > 0$.
Ainsi $\boxed{f \text{ est strictement décroissante sur }]0,1] \text{ et strictement croissante sur } [1,+\infty[}$.
On a $\boxed{\lim_{t\to 0^+} f(t) = +\infty}$, et $\boxed{\lim_{t\to+\infty} f(t) = +\infty}$.

(2) D'après la question précédente, f est continue (car dérivable) et strictement croissante sur $[1,+\infty[$. D'après le théorème de la bijection, $\boxed{f \text{ réalise donc une bijection}}$ de $[1,+\infty[$ sur

$$f\big([1,+\infty[\big) = \Big[f(1), \lim_{t\to+\infty} f(t)\Big[= [2,+\infty[.$$

(3) (a) g possède les mêmes variations que f, donc $\boxed{g \text{ est strictement croissante sur } [2,+\infty[}$.

(b) f est dérivable sur $[1,+\infty[$ et sa dérivée ne s'annule par sur $[1,+\infty[$, donc $\boxed{g \text{ est dérivable sur } [2,+\infty[}$.

(c) Soient $y \in [2,+\infty[$ et $t \in]0,+\infty[$.

$$y = f(t) \iff y = t + \frac{1}{t} \iff ty = t^2 + 1 \iff t^2 - ty + 1 = 0.$$

Le discriminant de l'équation polyomiale obtenue est $\Delta = y^2 - 4 \geq 0$ car $y \geq 2$. Ainsi

$$y = f(t) \iff t = \frac{y - \sqrt{y^2-4}}{2} \quad \text{ou} \quad t = \frac{y + \sqrt{y^2-4}}{2}.$$

Les deux solutions obtenues sont bien strictement positives. $g(y)$ est égal à l'unique solution $t \geq 1$ de $y = f(t)$, or

$$\frac{y + \sqrt{y^2-4}}{2} \geq \frac{y}{2} \geq 1,$$

ainsi :

$$\boxed{g(y) = \frac{y + \sqrt{y^2-4}}{2}}.$$

Partie 2 : Étude d'une suite

On introduit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$u_1 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n^2 u_n} = \frac{1}{n} f(nu_n).$$

(4) On procède par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$:
- pour $n = 1$, u_1 est bien défini d'après l'énoncé et $u_1 = 1 \geq 1$.
- supposons u_n bien défini et $u_n \geq 1$ pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$.

On a $n \geq 1$ et $u_n \geq 1$ donc $nu_n \geq 1$ et f est bien défini sur $[1,+\infty[$, donc $f(nu_n)$ est bien défini, par conséquent $u_{n+1} = \dfrac{1}{n} f(nu_n)$ est bien défini.
Par ailleurs $\dfrac{1}{n^2 u_n} \geq 0$ donc

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n^2 u_n} \geq u_n \geq 1$$

par hypothèse de récurrence. La propriété est donc démontrée au rang $n+1$.
- Finalement on a montré par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\boxed{u_n \text{ existe et } u_n \geq 1}$.

(5)
```
function u = suite(n)
    u  = 1
    for k = 2:n
        u = u + 1/((k-1)^2*u)
    end
endfunction
```

(6) (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \dfrac{1}{n^2 u_n} \geq 0$ car $u_n \geq 0$. Par ailleurs, $u_n \geq 1$ d'après la question 4), donc $v_n = \dfrac{1}{n^2 u_n} \leq \dfrac{1}{n^2}$.
Finalement on a bien

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \boxed{0 \leq v_n \leq \frac{1}{n^2}}.$$

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $v_n \geq 0$ et $v_n \leq \dfrac{1}{n^2}$, or $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente, donc par comparaison des séries à termes positifs, $\boxed{\displaystyle\sum_{n\geq 1} v_n \text{ converge}}$.

(c) Soit $n \geq 2$ un entier.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n-1} v_k &= \sum_{k=1}^{n-1}(u_{k+1} - u_k) = \sum_{k=1}^{n-1} u_{k+1} - \sum_{k=1}^{n-1} u_k \\ &= \sum_{k=2}^{n} u_k - \sum_{k=1}^{n-1} u_k = u_n - u_1 = \boxed{u_n - 1},\end{aligned}$$

où l'on a effectué un changement d'indice et reconnu une somme télescopique.
On a ainsi $u_n = 1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} v_k$, or la série $\displaystyle\sum_{n\geq 2} v_n$ converge donc la suite de ses sommes partielles converge, par conséquent $\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge}}$ vers un réel ℓ.

(7) (a) Soit $k \geq 2$ un entier. La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ est décroissante sur $[k-1, k]$, donc pour tout $t \in [k-1, k]$, $\dfrac{1}{t^2} \geq \dfrac{1}{k^2}$. Ainsi par croissance de l'intégrale,

$$\boxed{\int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^2}\, dt \geq \int_{k-1}^{k} \frac{1}{k^2} dt = \frac{1}{k^2}}.$$

(b) Soient n et p des entiers tels que $2 \leq p < n$. A l'aide d'un changement d'indice et en reconnaissant une somme télescopique :

$$\begin{aligned}\sum_{k=p}^{n-1} v_k &= \sum_{k=p}^{n-1} u_{k+1} - \sum_{k=p}^{n-1} u_k = \sum_{k=p+1}^{n} u_k - \sum_{k=p}^{n-1} u_k \\ &= \boxed{u_n - u_p}.\end{aligned}$$

D'autre part en combinant les inégalités des questions 6a) et 7a), pour tout entier $k \geq 2$,

$$0 \leq v_k \leq \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^2}\, dt.$$

En sommant ces encadrements pour $k \in [\![p, n-1]\!]$:

$$0 \leq \sum_{k=p}^{n-1} v_k \leq \sum_{k=p}^{n-1} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^2}\, dt\,,$$

autrement dit

$$\boxed{0 \leq u_n - u_p \leq \int_{p-1}^{n-1} \frac{1}{t^2}\, dt},$$

où l'on a utilisé la relation de Chasles dans le membre de droite de l'encadrement.

(c) En particulier pour $p = 2$ et $n \geq 3$, l'encadrement précédent donne :

$$0 \leq u_n - u_2 \leq \int_{1}^{n-1} \frac{1}{t^2}\, dt = \Big[-\frac{1}{t}\Big]_1^{n-1} = -\frac{1}{n-1} + 1 \leq 1\,,$$

ainsi

$$\boxed{u_2 \leq u_n \leq 1 + u_2}.$$

Par définition on a $u_2 = u_1 + \dfrac{1}{1.u_1} = 2$, donc on a $u_n \in [2, 3]$, ceci pour tout $n \geq 3$. Par passage à la limite quand $n \to +\infty$, on en déduit $\boxed{\ell \in [2, 3]}$.

(d) Soit $p \geq 2$ fixé et $n > p$ un entier. On reprend l'encadrement de la question 7b) :

$$0 \leq u_n - u_p \leq \int_{p-1}^{n-1} \frac{1}{t^2}\, dt\,.$$

On a par ailleurs

$$\int_{p-1}^{n-1} \frac{1}{t^2}\, dt = \Big[-\frac{1}{t}\Big]_{p-1}^{n-1} = -\frac{1}{n-1} + \frac{1}{p-1} \leq \frac{1}{p-1}\,,$$

ainsi

$$0 \leq u_n - u_p \leq \frac{1}{p-1}\,.$$

Finalement en faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient

$$\boxed{0 \leq \ell - u_p \leq \frac{1}{p-1}}.$$

(e) Si on choisit p tel que $\dfrac{1}{p-1} \leq 10^{-4}$, c'est-à-dire $p \geq 10001$, alors d'après l'encadrement de la question précédente, $0 \leq \ell - u_p \leq 10^{-4}$ et u_p constitue une valeur approchée de ℓ à 10^{-4} près.

Ainsi la fonction suivante convient :

```
function u = approx()
    u = suite(10001)
endfunction
```

Variante sans calculer explicitement le rang p à partir duquel u_p constitue une bonne approximation de ℓ :

```
function u = approx()
    u = 2
    p = 2
    while 1/(p-1) >= 0.0001
        u = u + 1/(p^2*u)
        p = p+1
    end
endfunction
```

Approfondissement***

Ce problème provient du sujet **ECRICOME 2020**, série **S**. Une solution proposée par Bastien Marmeth (Claude Fauriel, St Etienne).

(1) (a) $\boxed{\text{La série de Riemann } \sum_{n\geqslant 1} u_n \text{ converge si et seulement si } \alpha > 1.}$

(b) Soit $k \geqslant 2$,
Pour tout $t \in [k, k+1]$ on a $t \geqslant k$, d'où, puisque $\alpha > 0$, $\frac{1}{t^\alpha} \leqslant \frac{1}{k^\alpha}$
Par croissance de l'intégrale on en déduit que

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{k^\alpha}\,\mathrm{d}t$$

C'est-à-dire

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{k^\alpha}(k+1-k)$$

ou encore

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{k^\alpha}$$

De même, pour $t \in [k-1, k]$ on a $t \leqslant k$, d'où, puisque $\alpha > 0$, $\frac{1}{t^\alpha} \geqslant \frac{1}{k^\alpha}$
Par croissance de l'intégrale on en déduit que

$$\int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \geqslant \int_{k-1}^{k} \frac{1}{k^\alpha}\,\mathrm{d}t$$

C'est-à-dire

$$\int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \geqslant \frac{1}{k^\alpha}$$

Finalement on a bien

$$\boxed{\int_k^{k+1} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t}$$

(c) Soit $n \geqslant 1$, on sait que les intégrales $\int_n^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ et $\int_{n+1}^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ sont des intégrale de Riemann convergentes.
D'après la relation de Chasles, on en déduit que les série $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ et $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \int_{k}^{k+1} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ convergent et que

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t = \int_n^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}}$$

et

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t = \int_n^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{n^{\alpha-1}}$$

En sommant les relations obtenues à la question précédente, on a alors

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$$

C'est-à-dire

$$\boxed{\frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} \leqslant R_{1,n} \leqslant \frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{n^{\alpha-1}}}$$

(d) D'après la relation précédente, on a, pour tout $n \geqslant 1$

$$\frac{n^{\alpha-1}}{(n+1)^{\alpha-1}} \leqslant \frac{R_{1,n}}{\frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}} \leqslant 1$$

C'est-à-dire

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^{\alpha-1} \leqslant \frac{R_{1,n}}{\frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}} \leqslant 1$$

Or $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{\alpha-1} = 1$, ainsi, d'après le théorème des gendarmes

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{R_{1,n}}{\frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}} = 1$$

C'est-à-dire

$$\boxed{R_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}}$$

(e) Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on a $R_{1,n} > 0$ en tant que somme de réels strictement positifs.
D'après le théorème de comparaison pour les séries à termes positifs, les séries de terme général respectifs $R_{1,n}$ et $\frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$ sont de même nature.
La série de terme général $\frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$ est une série de Riemann qui converge si et seulement si $\alpha - 1 > 1$, i.e. $\alpha > 2$.
Ainsi
$\boxed{\text{La série } \sum_{n\geqslant 1} u_n \text{ converge à l'ordre 2 si et seulement si } \alpha > 2}$

(f) On a vu que la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge à l'ordre 1 si et seulement si $\alpha > 1$ et qu'elle à l'ordre 2 si et seulement si $\alpha > 2$.
On conjecture alors qu'elle converge à l'ordre $p \in \mathbb{N}^*$ si et seulement si $\alpha > p$.
En d'autres termes, on conjecture que
$\boxed{\text{La série } \sum_{n\geqslant 1} u_n \text{ converge à tous les ordres } p \text{ tels que } p < \alpha.}$

(2) On considère, dans cette question seulement, que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{1}{n^n}$

(a) Pour $n \geqslant 2$ on a $n^n \geqslant n^2$ et donc

$$\forall n \geqslant 2, \qquad 0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n^2}$$

La série de terme général $\frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente, ainsi, d'après le théorème de comparaison pour les séries à termes positifs,
$\boxed{\text{La série } \sum_{n\geqslant 1} u_n \text{ converge.}}$

(b) Soit $k \geqslant 3$, on a alors $k\ln(k) \geqslant k\ln(3)$, d'où $k^k \geqslant k^3$ et ainsi

$$\boxed{\forall k \geqslant 3, \qquad 0 \leqslant u_k \leqslant \frac{1}{3^k}}$$

Les séries de terme général respectifs u_k et $\frac{1}{3^k}$ convergent. En sommant les inégalités obtenus on a alors, pour $n \in \mathbb{N}$

$$0 \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{3^k}$$

Or

$$\begin{aligned}
\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{3^k} &= \sum_{i=0} +\infty \frac{1}{3^{i+n+1}} && \textit{On pose le changement de variable } i = k-n-1 \\
&= \frac{1}{3^{n+1}} \sum_{i=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^i \\
&= \frac{1}{3^{n+1}} \frac{1}{1-\frac{1}{3}} \\
&= \frac{1}{3^{n+1}} \frac{3}{2} \\
&= \frac{1}{2.3^n}
\end{aligned}$$

On a donc bien

$$\boxed{0 \leqslant R_{1,n} \leqslant \frac{1}{2.3^n}}$$

(c) La série de terme général $\frac{1}{2}\frac{1}{3^n}$ est convergente en tant que série géométrique (multipliée par une constante) de raison $\frac{1}{3} \in]-1,1[$. Ainsi, d'après le théorème de comparaison pour les séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geqslant 1} R_{1,n}$ converge. En d'autres termes

$\boxed{\text{La série } \sum_{n\geqslant 1} u_n \text{ converge à l'ordre 2.}}$

De plus, en sommant les inégalités on a, pour $n \in \mathbb{N}$

$$0 \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} R_{1,k} \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2}\frac{1}{3^k}$$

Or $\sum_{k=n+1}^{+\infty} R_{1,k} = R_{2,n}$ et $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2}\frac{1}{3^k} = \frac{1}{4.3^n}$. Ainsi

$$\boxed{\forall n \geqslant 1, \qquad 0 \leqslant R_{2,n} \leqslant \frac{1}{4.3^n}}$$

(d) On va procéder par récurrence sur p.
Plus précisément notons $\mathcal{A}(p)$ l'assertion :

La série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge à l'ordre p et, pour tout $n \geqslant 1$, $0 \leqslant R_{p,n} \leqslant \frac{1}{2^p.3^n}$.

On a déjà montré que l'assertion est vraie pour $p=1$ et $p=2$.
Soit $p \in \mathbb{N}^*$, on suppose que l'assertion $\mathcal{A}(p)$ est vraie.
On a alors

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad 0 \leqslant R_{p,n} \leqslant \frac{1}{2^p.3^n}$$

La série de terme général $\frac{1}{2^p}\frac{1}{3^n}$ est convergente en tant que série géométrique (multipliée par une constante) de raison $\frac{1}{3} \in]-1,1[$. Ainsi, d'après le théorème de comparaison pour les séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geqslant 1} R_{p,n}$ converge. En d'autres termes la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge à l'ordre $p+1$.
De plus, en sommant les inégalités on a, pour $n \in \mathbb{N}$

$$0 \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} R_{p,k} \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2^p}\frac{1}{3^k}$$

Or $\sum_{k=n+1}^{+\infty} R_{p,k} = R_{p+1,n}$ et $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2^p}\frac{1}{3^k} = \frac{1}{2^p}\frac{1}{2.3^n} = \frac{1}{2^{p+1}3^n}$. Ainsi

$$\forall n \geqslant 1, \qquad 0 \leqslant R_{p+1,n} \leqslant \frac{1}{2^{p+1}3^n}$$

Ce qui prouve l'assertion au rang $n+1$ et achève la récurrence.

En conclusion
$\boxed{\text{Pour tout entier } p \geqslant 1, \text{ la série } \sum_{n\geqslant 1} u_n \text{ converge à l'ordre } p \text{ et}}$

$$\boxed{\forall n \geqslant 1, \qquad 0 \leqslant R_{p,n} \leqslant \frac{1}{2^p.3^n}}$$

(e) D'après la question précédente on a, pour tout $n \geqslant 1$, $0 \leqslant R_{n,n} \leqslant \frac{1}{2^n 3^n}$, c'est-à-dire

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad 0 \leqslant R_{n,n} \leqslant \frac{1}{6^n}$$

La série de terme général $\frac{1}{6^n}$ est convergente en tant que série géométrique de raison $\frac{1}{6} \in]-1,1[$. Ainsi, d'après le théorème de comparaison pour les séries à termes positifs, $\boxed{\text{la série } \sum_{n\geqslant 1} R_{n,n} \text{ converge.}}$

(3) (a) Pour $t \in [0,1]$ on a $1+t \geqslant 1$ ainsi

$$\forall t \in [0,1], \qquad 0 \leqslant \frac{t^n}{1+t} \leqslant t^n$$

D'où, par croissance de l'intégrale

$$0 \leqslant \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t$$

C'est-à-dire

$$0 \leqslant \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{n+1}$$

D'après le théorème des gendarmes, on a ainsi

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t}$$

(b) Soit $N \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{N} u_n &= \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{n+1} \\
&= \sum_{n=0}^{N} (-1)^n \int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \sum_{n=0}^{N} (-1)^n t^n\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \frac{1-(-t)^{N+1}}{1+t}\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t - \int_0^1 \frac{(-t)^{N+1}}{1+t}\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

On a donc bien

$$\boxed{\sum_{n=0}^{N} u_n = \int_0^1 \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t - \int_0^1 \frac{(-t)^{N+1}}{1+t}\,\mathrm{d}t}$$

(c) On sait, d'après la question 3.(a) que la suite $\left(\int_0^1 \frac{t^{N+1}}{1+t}\,\mathrm{d}t\right)_{N\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 ainsi, d'après la question 3.(b) la suite $\left(\sum_{n=0}^{N} u_n\right)_{N\in\mathbb{N}}$ converge vers $\int_0^1 \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t = \ln(2)$.

En d'autres termes $\boxed{\text{la série } \sum_{n\geqslant 0} u_n \text{ converge et } \sum_{n=0}^{+\infty} = \int_0^1 \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t = \ln(2)}$

Pour $n \in \mathbb{N}$ on a alors

$$\begin{aligned}
R_{1,n} &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} u_k - \sum_{k=0}^{n} u_k \\
&= \int_0^1 \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t - \left(\int_0^1 \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t - \int_0^1 \frac{(-t)^{n+1}}{1+t}\,\mathrm{d}t\right) \\
&= \int_0^1 \frac{(-t)^{n+1}}{1+t}\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

On a donc bien

$$\boxed{\forall n \geqslant 0, \qquad R_{1,n} = \int_0^1 \frac{(-t)^{n+1}}{1+t}\,\mathrm{d}t}$$

(d) Pour $p \geqslant 1$, on définit l'assertion $\mathcal{A}(p)$:

La série $\sum_{n\geqslant 0} u_p$ converge à l'ordre p et, pour tout $n \geqslant 0$, $R_{p,n} = \int_0^1 \frac{(-t)^{n+p}}{(1+t)^p}\,\mathrm{d}t$

La question précédente nous assure que l'assertion $\mathcal{A}(1)$ est vérifiée.
Soit $p \geqslant 1$, on suppose que l'assertion $\mathcal{A}(p)$ est vérifiée.
Pour $n \in \mathbb{N}$ on a alors

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} R_{p,k} &= \sum_{k=0}^{n} \int_0^1 \frac{(-1)^{k+p}}{1+t)^p}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \sum_{k=0}^{n} \frac{(-t)^{k+p}}{(1+t)^p}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \frac{(-t)^p}{(1+t)^p} \sum_{k=0}^{n} (-t)^k\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \frac{(-t)^p}{(1+t)^p} \frac{1-(-t)^{n+1}}{1+t}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \frac{(-t)^p}{(1+t)^{p+1}} - \frac{(-t)^{n+1+p}}{1+t)^{p+1}}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \frac{(-t)^p}{(1+t)^{p+1}}\,\mathrm{d}t - \int_0^1 \frac{(-t)^{n+1+p}}{1+t)^{p+1}}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \frac{(-t)^p}{(1+t)^{p+1}}\,\mathrm{d}t + (-1)^{n+p} \int_0^1 \frac{t^{n+1+p}}{1+t)^{p+1}}\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Pour $t \in [0,1]$ on a $1+t \geqslant 1$ ainsi $(1+t)^p \geqslant 1$ et donc

$$\forall t \in [0,1], \qquad 0 \leqslant \frac{t^{n+1+p}}{1+t)^{p+1}} \leqslant t^{n+1+p}$$

Par croissance de l'intégrale on en déduit que

$$0 \leqslant \int_0^1 \frac{t^{n+1+p}}{(1+t)^{p+1}}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{n+p+2}$$

Le théorème des gendarmes nous assure alors que $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{t^{n+1+p}}{(1+t)^{p+1}}\,\mathrm{d}t = 0$

On en déduit donc que la série de terme général $R_{p,k}$ converge et que

$$\sum_{k=0}^{+\infty} R_{p,k} = \int_0^1 \frac{t^{n+1+p}}{(1+t)^{p+1}} \, \mathrm{d}t$$

Ainsi, pour $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} R_{p+1,n} &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} R_{p,k} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} R_{p,k} - \sum_{k=0}^{n} R_{p,k} \\ &= \int_0^1 \frac{t^{n+1+p}}{1+t)^{p+1}} \, \mathrm{d}t - \left(\int_0^1 \frac{(-t)^p}{1+t)^p+1} \, \mathrm{d}t - \int_0^1 \frac{(-t)^{n+1+p}}{1+t)^{p+1}} \, \mathrm{d}t \right) \\ &= \int_0^1 \frac{(-t)^{n+1+p}}{1+t)^{p+1}} \, \mathrm{d}t \end{aligned}$$

On a ainsi prouvé que la série $\sum_{n \geqslant 0} u_n$ converge à l'ordre $p+1$ et que, pour tout $n \geqslant 0$, $R_{p+1,n} = \int_0^1 \frac{(-t)^{n+1+p}}{1+t)^{p+1}} \, \mathrm{d}t$. En d'autres termes on a prouvé l'assertion $\mathcal{A}(p+1)$.
Par principe de récurrence, on en conclut alors que

$$\boxed{\text{Pour tout entier } p \text{, la série } \sum_{n \geqslant 0} u_n \text{ converge à l'ordre } p \text{ et, pour tout } n \geqslant 0, \ R_{p,n} = \int_0^1 \frac{(-t)^{n+p}}{1+t)^{p+1}} \, \mathrm{d}t}$$