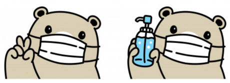
ECE 2 - Année 2020-2021
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com



Devoir Maison n°5

À rendre le 18/11

Exercice 1

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{(\ln(1+x))^n}{(1+x)^2} \mathrm{d}x.$$

(1) Montrer que l'intégrale I_0 est convergente et la calculer.
(2) Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, l'intégrale I_n est convergente.
(3) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ I_{n+1} = (n+1) I_n$$

(4) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = n!.$$

Exercice 2

On note, pour $t > 0$, $f(t) = -\ln(t)$.

(1) Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, la convergence, puis préciser la valeur, de l'intégrale $\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$.

(2) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $I_n = \displaystyle\int_0^1 t^n \ln(t)\mathrm{d}t$.
   (a) Justifier de la convergence de I_n, pour tout $n \in \mathbb{N}*$.
   (b) Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = -\dfrac{1}{(n+1)^2}$.

(3) Soit $n \in \mathbb{N}$, avec $n \geq 2$. Montrer que, pour tout $k \in [\![1; n+1]\!]$,

$$\frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq \int_{k/n}^{(k+1)/n} f(t)\mathrm{d}t \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

puis que

$$\int_{1/n}^1 f(t)\mathrm{d}t \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \leq \int_{1/n}^1 f(t)\mathrm{d}t + \frac{\ln(n)}{n}.$$

(4) En déduire que

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{k}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -1,$$

puis que

$$(n!)^{\frac{1}{n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{e}.$$