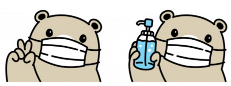
ECE 2 - Année 2020-2021
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com



Devoir Maison n°5bis

Premier entraînement à l'épreuve de Maths 2
À rendre le 03/12

Problème

Dans certaines situations (paris sportifs, investissements financiers...), on est amené à miser de l'argent de façon répétée sur des paris à espérance favorable.
On se propose de mettre en place une stratégie afin d'optimiser les gains à long terme.

On adopte ici le cadre simplifié suivant : on considère une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ indépendantes et suivant toutes la même loi de Bernoulli de paramètre p.

À chaque instant $n \geq 1$, un joueur mise une partie M_n de son capital sur la réalisation de l'événement $(X_n = 1)$.
La variable M_n est supposée indépendante des variables X_k, $k \in \mathbb{N}^*$.

En cas de victoire, il double sa mise (son capital est donc augmenté de M_n), en cas de défaite il perd sa mise (son capital diminue de M_n).

Initialement, le joueur dispose du capital $C_0 > 0$, puis on note C_n la variable aléatoire égale au capital détenu à l'issue du $n-$ème pari. On a ainsi l'encadrement , pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq M_{n+1} \leq C_n.$$

Le jeu est supposé favorable, on considérera dans tout le problème $\dfrac{1}{2} < p < 1$.

Partie 1 - Quitte ou double

(1) Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$C_{n+1} - C_n = (2X_{n+1} - 1)M_{n+1}.$$

(2) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$E(C_n) = C_0 + (2p-1)\sum_{k=1}^{n} E(M_k).$$

(3) Vérifier que

$$E(C_n) \leq C_0 + (2p-1)\sum_{k=0}^{n-1} E(C_k).$$

Que faut-il donc miser à chacun des $n-1$ premiers paris (*i.e* que faut-il prendre pour M_{n+1} en fonction de C_n) pour optimiser la valeur de $E(C_n)$?

(4) Montrer que

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty}[X_n=1]\right)=0.$$

En déduire qu'en prenant, à chaque pari, la valeur optimale de mise trouvée à la question précédente, la ruine est quasi-certaine. Quel est le temps moyen d'attente avant la ruine ?

Partie 2 - Stratégie à mises proportionnelles

La stratégie précédente étant risquée, le joueur décide d'engager dans chaque pari une fraction du capital dont il dispose : on a ainsi $M_{n+1}=\alpha C_n$, avec $\alpha\in]0;1[$ (indépendant de n).

(5) Établir que, pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$C_{n+1}=(1+\alpha)^{X_{n+1}}(1-\alpha)^{1-X_{n+1}}C_n.$$

(6) On pose $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}X_k$.

Que représente la variable aléatoire S_n ? Déterminer la loi de S_n et son espérance.

(7) Établir que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$,

$$C_n=(1+\alpha)^{S_n}(1-\alpha)^{n-S_n}C_0.$$

(8) Montrer que

$$E\left[\frac{1}{n}\ln\left(\frac{C_n}{C_0}\right)\right]=p\ln(1+\alpha)+(1-p)\ln(1-\alpha).$$

Par la suite, on cherche à maximiser cette quantité, ce qui équivaut à maximiser l'espérance du *taux moyen de croissance* du capital.

Partie 3 - Optimisation: le critère de Kelly

Soit p un paramètre, élément de $\left]\frac{1}{2};1\right[$. On pose, pour tout $x\in[0,1[$

$$f(x)=p\ln(1+x)+(1-p)\ln(1-x).$$

(9) **Étude de f.**

(a) Étudier les variations de f sur $]0,1[$, et montrer que f est concave.
Montrer que f admet un maximum sur $]0,1[$, atteint en un unique réel α_K que l'on exprimera en fonction de p.

(b) Déterminer la limite de f en 1.

(c) Montrer que f s'annule deux fois exactement sur $[0,1[$: en 0 et en un réel α_c vérifiant $\alpha_K<\alpha_c$.

(d) Donner l'allure de la courbe représentative de f sur $[0,1[$.

Ainsi, le choix $\alpha=\alpha_K$ est celui qui optimise la croissance de gain à long terme.

(10) Que donnerait l'expression de α_K dans les cas limites $p=\frac{1}{2}$ et $p=1$?
Interpréter ces deux résultats.

Les choix de α au-delà de la valeur critique α_c conduisent à une perte de capital. On cherche dans cette partie un équivalent de α_c lorsque p est proche de $\frac{1}{2}$. On considèrera dans ce qui suit que α_c, est une fonction de p (on écrira ainsi $\alpha_c(p)$).

(11) On définit la fonction φ sur $]0,1[$ par $\varphi(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{\ln(1-x)}$.

(a) Montrer que φ est prolongeable par continuité sur l'intervalle $[0,1]$ On notera encore φ ce prolongement.

(b) Justifier que φ est dérivable sur $]0,1[$, et mettre l'expression de sa dérivée sous la forme

$$\varphi'(x) = \frac{h(x)}{(1-x^2)[\ln(1-x)]^2}.$$

(c) Déterminer les variations de h sur $]0,1[$.

(d) Montrer que φ réalise une bijection de $[0,1]$ sur un intervalle à préciser.

(12) À l'aide du développement limité en 0 à l'ordre 2 de $\ln(1+u)$, montrer que φ est dérivable en 0 et que $\varphi'(0) = 1$.

(13) (a) Établir que

$$\forall p \in \left]\frac{1}{2}, 1\right[, \quad \alpha_c(p) = \varphi^{-1}\left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

(b) En déduire que α_c, est prolongeable par continuité en $\frac{1}{2}$, que ce prolongement est dérivable en $\frac{1}{2}$ et que :

$$\alpha_c'\left(\frac{1}{2}\right) = 4.$$

(c) Établir l'équivalence,

$$\alpha_c \sim 2\alpha_K, \qquad p \to \frac{1}{2}.$$

En conclusion, pour des valeurs de p proches de $\frac{1}{2}$ (c'est-à-dire des paris "légèrement" favorables, un cas très fréquent), il faut prendre $\alpha < 2\alpha_K$.

Par sécurité (p n'est en pratique connu qu'approximativement), les parieurs choisissent souvent

$$\alpha = \frac{\alpha_K}{2},$$

la moitié de la valeur de Kelly.

Partie 4 - Simulation informatique

(14) Compléter la fonction `SciLab` ci-dessous, qui prend en argument p, la valeur de α, le capital initial C_0 et le capital à atteindre `C_obj` et renvoie le nombre de paris avant d'atteindre (ou de dépasser) l'objectif.

```
function n=paris(p, alpha, C0, C_obj)
    C=C0
    n=1
    while C< C_obj
        X=grand(1,1, 'bin', 1, p)
        C=...............................
        n=................................
    end
endfunction
```

(15) On veut vérifier que la stratégie de Kelly est optimale. Écrire ensuite une fonction d'en-tête `function [C, n]=kelly(p, alpha, C0, C_obj)` qui, par rapport à la fonction précédente, renvoie également le capital `C` que l'on aurait obtenu en choisissant $\alpha = \alpha_K$.