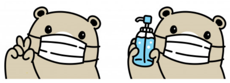
ECE 2 - Année 2020-2021
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com



Devoir Maison n°5

Solution

Exercice 1

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{(\ln(1+x))^n}{(1+x)^2} \mathrm{d}x.$$

(1) Pour $n = 0$, l'intégrale I_0 que l'on doit calculer est

$$I_0 = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x)^2}.$$

Soit donc $A > 0$.

$$\begin{aligned} \int_0^A \frac{\mathrm{d}x}{(1+x)^2} &= \left[-\frac{1}{1+x}\right]_0^A = 1 - \frac{1}{1+A} \\ &\underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} 1. \end{aligned}$$

Ainsi, I_0 est bien convergente et

$$I_0 = 1.$$

(2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction $x \mapsto ((\ln(1+x))^n/(1+x)^2$ est continue sur $[0:1]$, donc

$$\int_0^1 \frac{(\ln(1+x))^n}{(1+x)^2} \mathrm{d}x$$

est bien définie. Il reste à vérifier la convergence de l'intégrale à l'infini. Comme la fonction $x \mapsto (\ln(1+x))^n/(1+x)^2$ est positive sur $[0; +\infty[$, que

$$\frac{(\ln(1+x))^n}{(1+x)^2} = o\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right),$$

et que (par critère de Riemann) l'intégrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^{3/2}}$$

converge, le critère d'équivalence pour les fonctions positives permet d'affirmer que

$$\int_1^{+\infty} \frac{(\ln(1+x))^n}{(1+x)^2} \mathrm{d}x$$

est également convergente et ainsi I_n est bien définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(3) On fait bien attention à faire l'intégration par partie sur $[0; A]$ après avoir fixé $A > 0$. Soit donc $A > 0$. Les fonctions $u(x) = (\ln(1+x))^{n+1}$ et $v'(x) = 1/(1+x)^2$ sont bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0; A]$ rendant licite l'intégration par parties. Ainsi, on a

$$u'(x) = \frac{(n+1)(\ln(1+x))^n}{1+x}, \qquad v(x) = -\frac{1}{1+x}$$

et la formule d'IPP donne

$$\begin{aligned}\int_0^A \frac{(\ln(1+x))^n}{(1+x)^2}\mathrm{d}x &= \left[-\frac{(\ln(1+x))^{n+1}}{1+x}\right]_0^A + (n+1)\int_0^A \frac{(\ln(1+x))^n}{(1+x)^2}\mathrm{d}x \\ &= -\frac{(\ln(1+A))^{n+1}}{1+A} + (n+1)\int_0^A \frac{(\ln(1+x))^n}{(1+x)^2}\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Or, par croissance comparée

$$\lim_{A\to+\infty} \frac{(\ln(1+A))^n}{1+A} = 0$$

et, comme on a prouvé la convergence de I_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\lim_{A\to+\infty} \int_0^A \frac{(\ln(1+x))^n}{(1+x)^2}\mathrm{d}x = I_n.$$

On a donc bien $I_{n+1} = (n+1)I_n$.

(4) On procède par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

- initialisation: Pour $n = 0$, on a $I_0 = 1 = 0!$ et la relation est bien vérifiée.
- hérédité: Supposons que, pour un certain $n \in \mathbb{N}$, on ait $I_n = n!$. D'après la question précédente, on a alors

  $$I_{n+1} = (n+1)I_n \underset{\text{HR}}{=} (n+1)n! = (n+1)!,$$

  et la relation est bien vérifiée au rang $(n+1)$ ce qui termine la récurrence.

Exercice 2

On note, pour $t > 0$, $f(t) = -\ln(t)$.

(1) L'intégrale est impropre en 0. Soit donc $\varepsilon \in]0; 1[$. En posant,

$$\left\{\begin{array}{rcl} u'(t) &=& 1 \\ v(t) &=& \ln(t)\end{array}\right. \rightsquigarrow \left\{\begin{array}{rcl} u(t) &=& t \\ v'(t) &=& 1/t\end{array}\right.,$$

on définit deux fonctions u et v de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\varepsilon; 1]$. Par la formule d'intégration par parties, on a donc

$$\begin{aligned}\int_\varepsilon^1 \ln(t)\mathrm{d}t &= [t\ln(t)]_\varepsilon^1 - \int_\varepsilon^1 \mathrm{d}t \\ &= -\varepsilon\ln(\varepsilon) - (1-\varepsilon) \\ &\underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} -1,\end{aligned}$$

par croissance comparée. Ainsi, l'intégrale étudiée est convergente et vaut -1. En multipliant par -1, on a

$$\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = 1.$$

(2) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $I_n = \displaystyle\int_0^1 t^n \ln(t) \mathrm{d}t$.

(a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par croissance comparée,

$$\lim_{t \to 0^+} t^n \ln(t) = 0,$$

ainsi la fonction $t \mapsto t^n \ln(t)$ se prolonge par continuité en 0 et l'intégrale I_n est *faussement* impropre et donc convergente.

(b) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\varepsilon \in]0;1[$. En posant,

$$\left\{ \begin{array}{rcl} u'(t) & = & t^n \\ v(t) & = & \ln(t) \end{array} \right. \rightsquigarrow \left\{ \begin{array}{rcl} u(t) & = & \frac{t^{n+1}}{n+1} \\ v'(t) & = & 1/t \end{array} \right. ,$$

on définit deux fonctions u et v de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\varepsilon; 1]$. Par la formule d'intégration par parties, on a donc

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\int_\varepsilon^1 t^n \ln(t) \mathrm{d}t & = & \displaystyle\left[\frac{t^{n+1}\ln(t)}{n+1}\right]_\varepsilon^1 - \frac{1}{n+1}\int_\varepsilon^1 t^n \mathrm{d}t \\ & = & \displaystyle -\frac{\varepsilon^{n+1}\ln(\varepsilon)}{n+1} - \frac{1}{n+1}\left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_\varepsilon^1 \\ & = & \displaystyle -\frac{\varepsilon^{n+1}\ln(\varepsilon)}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{\varepsilon^{n+1}}{(n+1)^2} \\ & \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} & \displaystyle -\frac{1}{(n+1)^2}, \end{array}$$

par croissance comparée. Ainsi, comme I_n est une intégrale convergente, l'intégrale de gauche dans la relation précédente tend aussi vers I_n et on a bien

$$I_n = -\frac{1}{(n+1)^2}.$$

(3) Soient $n \in \mathbb{N}$, avec $n \geq 2$ et $k \in [\![1; n+1]\!]$. La fonction f étant clairement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, on a en particulier,

$$\forall t \in \left[\frac{k}{n}; \frac{k+1}{n}\right], \qquad f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq f(t) \leq f\left(\frac{k}{n}\right).$$

Ainsi, par positivité de l'intégrale,

$$\int_{k/n}^{(k+1)/n} f\left(\frac{k+1}{n}\right) \mathrm{d}t \leq \int_{k/n}^{(k+1)/n} f(t)\mathrm{d}t \leq \int_{k/n}^{(k+1)/n} f\left(\frac{k}{n}\right) \mathrm{d}t.$$

Mais, sous les deux intégrales qui encadrent, il y a des constantes, et observant que

$$\int_{k/n}^{(k+1)/n} \mathrm{d}t = \frac{1}{n},$$

on a bien, par linéarité de l'intégrale,

$$\frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq \int_{k/n}^{(k+1)/n} f(t)\mathrm{d}t \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right).$$

On obtient ensuite l'encadrement demandé en deux étapes.

- Commençons par sommer l'inégalité de droite pour k allant de 1 à $n-1$. On obtient, par Chasles,

$$\int_{1/n}^1 f(t)\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n-1} \int_{k/n}^{(k+1)/n} f(t)\mathrm{d}t \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right),$$

car $f\left(\frac{n}{n}\right) = f(1) = 0$. On a bien l'inégalité de gauche de l'encadrement désiré.

- Ensuite, on somme l'inégalité de gauche de l'encadrement obtenu précédemment pour k allant de 1 à $n-1$ et on obtient, toujours par Chasles et avec un changement d'indice
$$\frac{1}{n}\sum_{j=2}^{n} f\left(\frac{j}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq \int_{1/n}^{1} f(t)\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n-1}\int_{k/n}^{(k+1)/n} f(t)\mathrm{d}t.$$
Observant que
$$f\left(\frac{1}{n}\right) = -\ln\left(\frac{1}{n}\right) = \ln(n),$$
en ajoutant de chaque côté cette quantité, on a bien
$$\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \leq \int_{1/n}^{1} f(t)\mathrm{d}t + \frac{\ln(n)}{n},$$
ce qui donne bien l'autre inégalité de l'encadrement voulu.

$$\int_{1/n}^{1} f(t)\mathrm{d}t \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \leq \int_{1/n}^{1} f(t)\mathrm{d}t + \frac{\ln(n)}{n}.$$

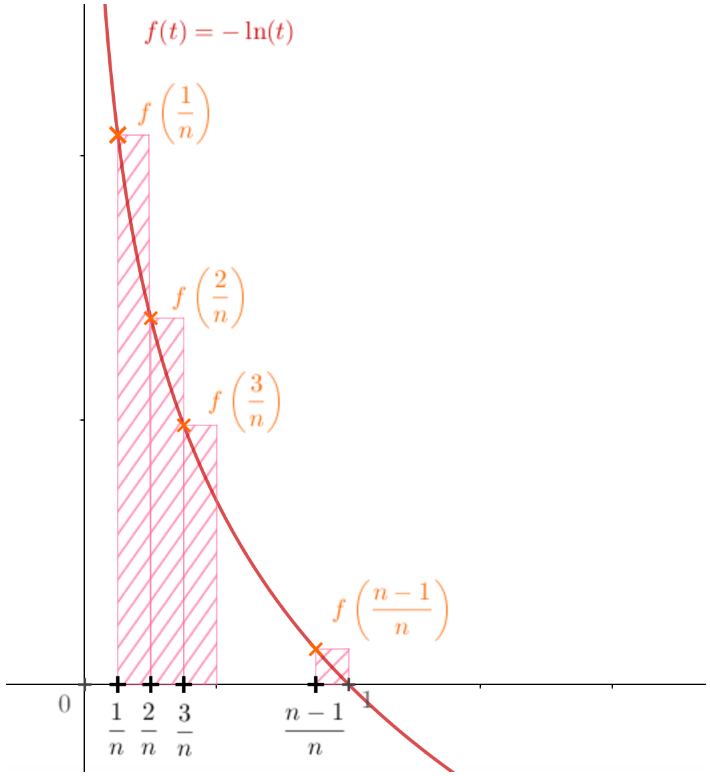
(4) Comme $1/n \to 0$ et que l'intégrale $\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$ est convergente on a
$$\lim_{n\to+\infty}\int_{1/n}^{1} f(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = 1.$$
De plus, $\frac{\ln(n)}{n}$ tend vers 0 (par croissance comparée) et il suit donc, par le théorème des gendarmes, que
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = 1,$$
ce qu'on peut réécrire, en multipliant par -1,
$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{k}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -1.$$
En composant par l'exponentielle (qui est continue), on a
$$\exp(-1) \underset{n\to+\infty}{\longleftarrow} \exp\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{k}{n}\right)\right) = \exp\left(\frac{1}{n}\ln\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\right)\right) = \exp\left(\frac{1}{n}\ln\left(\frac{n!}{n^n}\right)\right) = \frac{n!^{1/n}}{n}$$
ou encore
$$\frac{e}{n}\times n!^{1/n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1,$$
ce qui est bien équivalent au fait que
$$(n!)^{\frac{1}{n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{e}.$$

Remarque importante: Sommes de Riemann

Dans ce second exercice, on a entre autres démontré le résultat suivant:

Si f est une fonction continue décroissante sur $]0;1]$ et si $\displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$ converge, alors
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t.$$

Ce résultat étend donc (pour une certaine intégrale impropre) le résultat sur les *sommes de Riemann*[1] présent dans le cours (et dont la preuve est admise et l'énoncé rappelé ci-après) pour des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;1]$ (on pourra regarder la preuve de ce résultat, par exemple dans le problème **EDHEC 2008**). Lorsque le pas de $1/n$ tend vers 0, la somme des aires des rectangles tend vers l'intégrale.



Si le résultat du cours sur les sommes de Riemann peut paraître rarement utilisé, il est bien au programme; il apparait par exemple dans l'Exercice 2 (Partie 2, Question 4a) du sujet **ECRICOME 2018**. On le cite explicitement ici:

Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;1]$, alors

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t.$$

[1] À ne pas confondre avec les séries de Riemann ni même avec les intégrales de Riemann....