ECE 2 - Année 2020-2021
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Devoir Maison n°6

Cahier de travail des vacances de Noël
À rendre le 11/01

Amuse-bouches

(1) Déterminer la nature de l'intégrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{e^{1/x}-1}{\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}\mathrm{d}x.$$

(2) Soit Z une variable aléatoire telle que, $Z(\Omega)=\mathbb{N}^*$ et,

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad P(Z=k)=\frac{4}{k(k+1)(k+2)}$$

(a) Déterminer deux réels a et b, tels que;

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad \frac{4}{(k+1)(k+2)}=\frac{a}{k+1}+\frac{b}{k+2}.$$

(b) En déduire que Z admet une espérance et la déterminer.

(3) Soit $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$. Montrer que $Y=(-1)^X$ admet une espérance et déterminer sa valeur.

(4) Soient $a \in \mathbb{R}$ et Z une v.a. certaine, égale à a.

(a) Déterminer et représenter graphiquement la fonction de répartition de Z.

(b) Soient $X_1, X_2, ..., X_n$ des v.a. mutuellement indépendantes de même loi $\mathcal{U}([0:1])$ et $Y_n = \max(X_1, X_2, ...X_n)$. Déterminer la fonction de répartition F_n de Y_n.

(c) Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. Montrer que, lorsque $n \to +\infty$, $F_n(x)$ tend vers $G(x)$, où G est la fonction de répartition d'une certaine variable aléatoire, que l'on précisera.

(5) Soient E un espace vectoriel de dimension 3 et f un endomorphisme de E. On suppose qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de f est diagonale. Montrer qu'il existe une base dans laquelle la matrice de f^2 est diagonale.

Exercice 1

Partie I : Étude d'une variable aléatoire

(1) Soit h la fonction définie sur l'intervalle $[0;1]$ par :

$$\forall x \in [0;1], \quad h(x) = \frac{x}{2-x}.$$

(a) Montrer que h est une bijection de $[0;1]$ sur $[0;1]$ et, pour tout $y \in [0;1]$, exprimer $h^{-1}(y)$.
(b) Déterminer deux réels α et β vérifiant : $\forall x \in [0;1], \quad h(x) = \alpha + \frac{\beta}{2-x}$.
(c) Calculer

$$\int_0^1 h(x)\,\mathrm{d}x.$$

(2) Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur l'intervalle $[0;1]$.

(a) Donner l'espérance et la variance de la variable aléatoire X.
(b) Pour tout réel y de $[0;1]$ déterminer la probabilité de l'événement $\left(\frac{X}{2-X} \leq y\right)$.
(c) Montrer que la variable aléatoire $Y = \frac{X}{2-X}$ admet une densité et déterminer une densité de Y.
(d) Montrer que Y admet une espérance $E(Y)$ et déterminer.

Partie II : Étude d'un temps d'attente

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Une réunion est prévue entre n invités que l'on note $I_1,\ I_2 \cdots, I_n$.

Chaque invité arrivera entre l'instant 0 et l'instant 1.

Pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq n$, on modélise l'instant d'arrivée de l'invité I_k par une variable aléatoire T_k de loi uniforme sur l'intervalle $[0;1]$. On suppose de plus que, pour tout réel t, les n événements $(T_1 \leq t)$, $(T_2 \leq t)$, $\cdots (T_n \leq t)$, sont indépendants.

(1) Soit un réel t appartenant à $[0;1]$. Pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq n$, on note B_k la variable aléatoire de Bernoulli prenant la valeur 1 si l'événement $(T_k \leq t)$ est réalisé et la valeur 0 sinon.

On note $S_t = B_1 + B_2 + \cdots + B_n$.

(a) Que modélise la variable aléatoire S_t ?
(b) Déterminer la loi de la variable aléatoire S_t.

(2) Soit R_1 la variable aléatoire égale à l'instant de la première arrivée.
(a) Soit un réel t appartenant à $[0;1]$. Comparer l'événement $(R_1 > t)$ et l'événement $(S_t = 0)$
(b) Montrer que la variable aléatoire R_1 admet une densité et en déterminer une.

(3) Soit R_2 la variable aléatoire égale à l'instant de la deuxième arrivée.
Montrer que la variable aléatoire R_2 admet une densité et en déterminer une.

Exercice 2

Soient λ un réel strictement supérieur à 2 et X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ.

(1) Donner l'expression de la fonction de répartition de X et préciser son espérance et sa variance.

(2) Montrer que $E\left(e^X\right)$ et $E\left(e^{2X}\right)$ existent et valent respectivement $\dfrac{\lambda}{\lambda-1}$ et $\dfrac{\lambda}{\lambda-2}$.

On pose $Y = e^X$ et on admet que Y est une variable aléatoire et on note F_Y sa fonction de répartition.

(3) (a) Justifier que $Y(\Omega) = [1; +\infty[$.
(b) Déterminer $F_Y(t)$ pour $t < 1$ puis montrer que $F_Y(t) = 1 - t^{-\lambda}$ pour $t \geq 1$.
(c) En déduire que Y est une variable aléatoire à densité et déterminer une densité de Y.

(4) (a) Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer que $E\left(Y^k\right)$ existe si et seulement si $k < \lambda$.
Justifier alors que Y admet une espérance et une variance.
(b) Calculer, à l'aide de la question 2, les valeurs de l'espérance et de la variance de Y.

Exercice 3

On rappelle que la commande `grand(1, N, 'exp', 1/lambda)` permet de générer un échantillon de taille N dont les composantes représentent des réalisations de variables aléatoires indépendantes de même loi exponentielle $\mathcal{E}$(`lambda`).

On considère une variable aléatoire $X \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$ et la variable $y = \lfloor X \rfloor$.

(1) Recopier, compléter et exécuter les commandes

```
X=grand(1, 1000, 'exp', 1);
Y=................................;
```

(2) Donner une valeur approchée de l'espérance `m` et de la variance de Y.

(3) Compléter les lignes suivantes afin de classer les valeurs de la série statistique `Y` dans une matrice à deux colonnes dont la première représente les modalités (par ordre croissant) et la seconde les effectifs correspondants et représenter le diagramme à bâtons des *fréquences* de la série statistique `Y`.

```
U=tabul(...... , .......) ;
bar(.........,  ............, 0.3, 'black')
```

(4) Recopier, exécuter et interpréter les instructions suivantes

```
x=0:length(U(:,1));
p=1-exp(-1);
G=p*(1-p)^x;
bar(x+.5, G, 0.3, 'yellow')
```

Exercice 4

Dans tout l'exercice, on considère un réel $a \in \mathbb{R}_+^*$ et pour $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^n \exp\left(-\frac{x^2}{2a^2}\right) \mathrm{d}x$.

(1) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale I_n est convergente.

(2) (a) Donner une densité d'une variable aléatoire suivant la loi normale d'espérance nulle et de variance a^2. En déduire que
$$I_0 = a\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$
(b) À l'aide du changement de variable $u = x^2/2$, montrer que $I_1 = a^2$.

(3) (a) Montrer, à l'aide d'une intégration par parties que, pour tout $n \geq 2$ et tout $t \in \mathbb{R}_+$
$$\int_0^t x^n \exp\left(-\frac{x^2}{2a^2}\right) \mathrm{d}x = -a^2 t^{n-1} \exp\left(-\frac{t^2}{2a^2}\right) + (n-1)\, a^2 \int_0^t x^{n-2} \exp\left(-\frac{x^2}{2a^2}\right) \mathrm{d}x.$$
(b) En déduire, pour tout entier $n \geq 2$ la relation
$$I_n = (n-1)\, a^2 I_{n-2}.$$
(c) Calculer I_2 et I_3.

Exercice 5

(1) On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$
(a) Vérifier que l'on a $A^2 \neq 0$ et calculer A^3.
(b) Déterminer une base (u) de $\mathrm{Ker}\,(f)$ ainsi qu'une base (v, w) de $\mathrm{Im}\,(f)$.
(c) Montrer que $\mathrm{Im}\,(f^2) = \mathrm{Ker}\,(f)$.

Dans la suite, on considère un endomorphisme g de R^3 tel que
$$g^2 \neq 0, \qquad \text{et} \qquad g^3 = 0,$$
ce qui signifie que $g \circ g$ n'est pas l'endomorphisme nul, mais que $g \circ g \circ g$ est l'endomorphisme nul. En désignant par M la matrice de g dans la base canonique $\mathbb{R}^3$ de $\mathbb{R}^3$ on a donc : $M^2 \neq 0$ et $M^3 = 0$.
On se propose de montrer, dans ce cas plus général, que $\mathrm{Im}\,(g^2) = \mathrm{Ker}\,(g)$.

(2) (a) Justifier qu'il existe un vecteur u de $\mathbb{R}^3$ tel que $g^2\,(u) \neq 0$.
(b) Montrer que $(u, g\,(u), g^2\,(u))$ est une base de $\mathbb{R}^3$, que l'on notera $\mathcal{B}'$.
(c) Donner la matrice N de g dans la base $\mathcal{B}'$.
(d) Déterminer $\mathrm{Im}\,(g)$ et donner sa dimension. En déduire une base de $\mathrm{Ker}\,(g)$. Pour finir, déterminer $\mathrm{Im}\,(g^2)$ puis conclure.

Problème

Pour toutes suites numérique $u = (u_n)$ et $v = (v_n)$, on définit[1] la suite $u \star v = w$ par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k \, v_{n-k}.$$

Partie I: Exemples et premiers résultats

(1) Pour tout entier naturel n, calculer w_n en fonction de n dans chacun des cas suivants :

$$(i)\ u_n = 2 \text{ et } v_n = 3, \qquad (ii)\ u_n = 2^n \text{ et } v_n = 3^n,, \qquad (iii)\ u_n = \frac{2^n}{n!} \text{ et } v_n = \frac{3^n}{n!}.$$

(2) Écrire un programme en `SciLab` qui demande à l'utilisateur une valeur de l'entier naturel n, qui calcule et affiche les valeurs $w_0,\ w_1,\ \ldots,\ w_n$, où les suites u et v sont définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = \ln(n+1) \quad \text{et} \quad v_n = \frac{1}{n+1}.$$

(3) Dans cette question, la suite u est définie par:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

et v est une suite de réels positifs, décroissante à partir du rang 1 et de limite nulle.

(a) Établir, pour tout couple d'entiers naturels (n, m) vérifiant $n < m$, l'inégalité:

$$\sum_{k=n+1}^{m} u_k \leqslant u_n.$$

(b) Soit n un entier strictement supérieur à 1. Prouver les inégalités:

$$w_{2n} \leqslant v_0 \, u_{2n} + 2v_n + v_1 \, u_n \quad \text{et} \quad w_{2n+1} \leqslant v_0 \, u_{2n+1} + 2v_{n+1} + v_1 \, u_n$$

(c) En déduire que les deux suites (w_{2n}) et (w_{2n+1}) convergent vers 0 ainsi que la suite (w_n).

(d) Soit u' la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u'_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n.$$

À l'aide de la question précédente, montrer que la suite $u' \star v$ est convergente et de limite nulle.

Partie II : Application à l'étude d'un ensemble de suites

Dans cette partie, A désigne l'ensemble des suites $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de réels positifs vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}(a_n + a_{n-1}).$$

(1) Montrer que toute suite décroissante de réels positifs est élément de A et qu'une suite strictement croissante ne peut appartenir à A.

(2) Soit $z = (z_n)$ une suite réelle vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad z_{n+1} = \frac{1}{2}(z_n + z_{n-1}).$$

[1]Cette opération, à titre purement informatif, s'appelle le *produit de convolution (discret)* des suites u et v

(a) Montrer qu'il existe deux constantes réelles α et β telles que l'on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad z_n = \alpha + \beta \left(-\frac{1}{2}\right)^n.$$

(b) En déduire qu'il existe des suites appartenant à A et non monotones.

(3) Soit $a = (a_n)$ un élément de A et b la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad b_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n.$$

On définit alors la suite c par $c_0 = a_0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad c_n = a_n + \frac{1}{2}a_{n-1}.$$

(a) Montrer que la suite c est décroissante à partir du rang 1 et qu'elle converge vers un nombre ℓ que l'on ne cherchera pas à calculer.

(b) Pour tout entier naturel n, établir l'égalité :

$$\sum_{k=0}^{n} \left(-\frac{1}{2}\right)^k c_{n-k} = a_n.$$

Que peut-on en déduire pour les suites $b \star c$ et a?

(c) Soit ε la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \varepsilon_n = c_n - \ell$$

et d la suite $b \star \varepsilon$.

En utilisant un résultat de la Partie I, montrer que la suite d converge vers 0.

(d) Pour tout entier naturel n, établir l'égalité

$$d_n = a_n - \frac{2}{3}\ell\left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right).$$

En déduire que la suite a converge et préciser sa limite.

Partie III : Application aux variables aléatoires

(1) **Résultats préliminaires**.

(a) On considère deux distributions de probabilités $u = (u_n)$ et $v = (v_n)$ (que l'on associe respectivement à deux variables aléatoires X et Y supposées **indépendantes**). Montrer que la loi de $X + Y$ est donnée par $u \star v$.

(b) Retrouver alors le résultat de la question $(1) - (iii)$ de la Partie I par un choix adéquat des lois de X et de Y.

(c) Soit Z une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. Montrer que la variable aléatoire 2^{-Z} admet une espérance et que celle-ci vaut

$$\mathrm{E}\left(2^{-Z}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} P([Z = n]) \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

On note $r(Z)$ cette espérance.

(d) Que peut-on dire des variables aléatoires 2^{-X} et 2^{-Y}?
En déduire l'égalité

$$r(X + Y) = r(X)r(Y).$$

(e) On considère une suite (X_n) de v.a.i.i.d[2], à valeurs dans $\mathbb{N}$.
Pour tout entier naturel non nul q, on désigne par S_q la variable aléatoire définie par

$$S_q = \sum_{i=1}^{q} X_i.$$

Établir l'égalité

$$r(S_q) = (r(X_1))^q.$$

(2) **Une formule sommatoire**.

(a) Montrer que la suite $u = (u_n)$ définie, pour $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 2^{-n-1}$, est une distribution de probabilité. On note Z une variable aléatoire telle que $P(Z = n) = u_n$. Calculer alors le nombre $r(Z)$.

(b) On suppose que (X_n) est une suite de v.a.i.i.d de même loi que Z et, pour tout entier naturel non nul q, on désigne encore par S_q la variable

$$S_q = \sum_{i=1}^{q} X_i.$$

En admettant[3], pour tout entier naturel non nul q, l'égalité

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{k+q}{q} = \binom{n+q+1}{q+1},$$

montrer par récurrence que la loi de S_q est donnée par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad P([S_q = n]) = \binom{n+q-1}{q-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+q}.$$

(c) Pour tout entier naturel non nul q, calculer le nombre $r(S_q)$ et en déduire la relation

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+q-1}{q-1} \left(\frac{1}{4}\right)^{n} = \left(\frac{4}{3}\right)^{q}.$$

(3) **Un exemple concret**.

On admet, dans cette question, que la variable aléatoire Z définie précédemment représente le nombre de petits devant naître en 2021 d'un couple de kangourous.

Chaque petit kangourou a la même probabilité 1/2 d'être mâle ou femelle, indépendamment des autres.

On note F la variable aléatoire égale au nombre de femelles devant naître en 2021.

(a) Préciser, pour tout entier naturel n, la loi conditionnelle de F sachant $[Z = n]$.

(b) À l'aide de la formule obtenue en 2c, montrer que la loi de F est donnée par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P([F = n]) = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^{n}.$$

(c) Justifier l'existence des espérances $E(Z)$ et $E(F)$ des variables aléatoires Z et F, puis vérifier l'égalité $E(Z) = 2\,\mathrm{E}(F)$.

[2]variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées

[3]Égalité classique que l'on rencontre dans pléthore de sujets et qu'il faut savoir démontrer