ECE 2 - Année 2020-2021
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Devoir Maison n°6

Cahier de travail des vacances de Noël
Solution

Amuse-bouches

(1) L'intégrale est impropre en $+\infty$. Comme $1/x \to 0, x \to +\infty$ et même chose pour $1/\sqrt{x}$, les DL en 0 de e^u et $\ln(1+u)$ donnent

$$\frac{e^{1/x}-1}{\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)} \sim \frac{1/x}{1/\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

et, par critère de Riemann, l"intégrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$$

diverge. Par critère d'équivalence, on peut conclure à la divergence de l'intégrale étudiée.

(2) Soit Z une variable aléatoire telle que, $Z(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et,

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad P(Z=k) = \frac{4}{k(k+1)(k+2)}$$

(a) Par identification, on trouve $a = 4$ et $b = -4$.
(b) D'après le cours

$$Z \text{ admet une espérance} \quad \Longleftrightarrow \quad \sum kP(Z=k) \text{ converge}$$

Or, ici on va calculer la somme partielle de la série et voir qu'elle admet une limite. Plus précisément,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} kP(Z=k) &= \sum_{k=1}^{n} k \times \frac{4}{k(k+1)(k+2)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{4}{(k+1)(k+2)} \\ &= 4\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right) = 4\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}\right) \qquad \text{(par télescopage)} \\ &\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2.\end{aligned}$$

Ainsi, Z admet une espérance et $E(Z)=2$.

(3) Soit $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$. D'après le théorème de transfert,

$$Y=(-1)^X \text{ admet une espérance} \iff \sum (-1)^k P(X=k) \text{ converge absolument}$$

Or, bien sur cette série converge absolument car $|(-1)^k| = 1$ et $\sum P(X=k)$ converge (la somme vaut même 1). Donc Y admet une espérance et

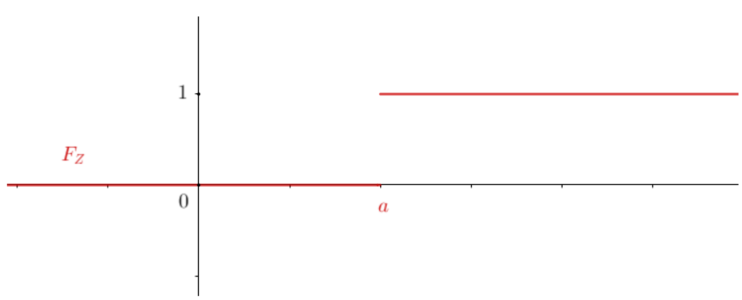
$$\begin{aligned}E(Y) &= \sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k P(X=k) = \sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k p(1-p)^{k-1} \\ &= -p\sum_{k=1}^{+\infty}(p-1)^{k-1} = -p\sum_{j=0}^{+\infty}(p-1)^j \\ &= -p \times \frac{1}{1-(p-1)} \\ &= \frac{-p}{2-p}\end{aligned}$$

(4) Soient $a \in \mathbb{R}$ et Z une v.a. certaine, égale à a.

(a) Si $x < a$, $P(Z \le x) = 0$ car $Z = a$. Si $x \ge a$, $P(Z \le x) = 1$. Ainsi,

$$F_Z(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < a \\ 1, & \text{si } x \ge a \end{cases}$$

On la représente sans difficulté



(b) On a déjà fait cet exercice.

$$\begin{aligned}F_n(x) &= P(Z_n \le x) = P(\max(X_1, ..., X_n) \le x) \\ &= P((X_1 \le x) \cap (X_2 \le x) \cap ... \cap (X_n \le x)) \\ &= P(X_1 \le x) \times P(X_2 \le x) \times ... \times P(X_n \le x) \qquad \text{(par indépendance des } X_i\text{)} \\ &= F_{X_1}(x)^n \qquad \text{(car elles ont toutes les même loi)} \\ &= \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0 \\ x^n, & \text{si } 0 \le x < 1 \\ 1, & \text{si } x \ge 1. \end{cases}\end{aligned}$$

(c) Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. Si $0 \leq x < 1$, alors $x^n \to 0$, si $n \to +\infty$. Ainsi, on a,

$$F_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} 0, & \text{si } x < 1 \\ 1, & \text{si } x \geq 1 \end{cases} = F_Y(x), \qquad \text{où} \qquad Y \text{ v.a. constante égale à 1.}$$

Ainsi, la fonction de répartition de Y_n, c'est à dire du *max* de n variables uniformes (continues) sur $[0:1]$, tend vers la fonction de répartition d'une variable Y constante égale à 1. On dira qu'il y a *convergence en loi*

$$Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} Y.$$

Intuitivement, le résultat n'est pas très surprenant.

(5) En notant D la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$, on a donc une matrice D diagonale. Mais, dans cette même base, la matrice de f est alors D^2 qui reste une matrice diagonale. Ainsi, la base $\mathcal{B}$ convient.
Cette question est la première d'un exercice du sujet **EDHEC 2012** qui vise à montrer, *via* un contre-exemple, que la réciproque est fausse.

Exercice 1

Cet exercice provient du sujet **EML 2008**.

Partie I : Étude d'une variable aléatoire

(1) Soit h la fonction définie sur l'intervalle $[0;1]$ par :

$$\forall x \in [0;1], \quad h(x) = \frac{x}{2-x}.$$

(a) h est (définie et) dérivable sur $[0;1]$ et $h'(x) = \frac{2-x+x}{(2-x)^2} = \frac{2}{(2-x)^2} > 0$.
Donc h est continue et strictement croissante sur $[0;1]$ donc bijective de $[0;1]$ dans $[h(0);h(1)] = [0;1]$. Par ailleurs, pour tous x et y de $[0;1]$:

$$\begin{aligned} h(x) = y &\iff \frac{x}{2-x} = y \\ &\iff x = y(2-x) \\ &\iff x(1+y) = 2y \\ &\iff x = \frac{2y}{1+y} \text{ car } 1+2y \neq 0 \end{aligned}$$

Donc

$$h^{-1}(y) = \frac{2y}{1+y}.$$

(b) On met au même dénominateur et on procède par identification.

$$\alpha + \frac{\beta}{2-x} = \frac{2\alpha+\beta-\alpha x}{2-x}.$$

Il est donc nécessaire (et suffisant) que $2\alpha+\beta = 0$ et $-\alpha = 1$ ou encore $\alpha = -1$ et $\beta = 2$.

(c) Comme h est continue sur $[0;1]$, l'intégrale est bien définie. On utilise l'écriture précédente:

$$\begin{aligned} \int_0^1 h(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 \left(-1 + \frac{2}{2-x}\right)\mathrm{d}x \\ &= \left[-x - 2\ln(2-x)\right]_0^1 \\ &= -1 + 2\ln(2). \end{aligned}$$

(2) Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur l'intervalle $[0;1]$.

(a) Le cours nous permet d'affirmer, sans avoir à refaire les calculs, que

$$E(X)=\frac{1}{2},\quad \text{et}\quad V(X)=\frac{1}{12}.$$

(b) Soit $y\in[0,1]$. On a $\left(\frac{X}{2-X}\leq y\right)=\left(h\left(X\right)\leq y\right)=\left(X\leq h^{-1}\left(y\right)\right)$ car $h^{\ -1}$ est strictement croissante sur $[0;1]$ et que X et y en sont éléments.

Donc

$$\mathrm{P}\left(\frac{X}{2-X}\leq y\right)=\mathrm{P}\left(X\leq h^{-1}\left(y\right)\right)=F\left(h^{-1}(y)\right),$$

où F est la fonction de répartition de X. Or on sait que $F(t)=t$ si $t\in[0;1]$ et $h^{-1}(y)$ est bien un élément de $[0;1]$. On en conclut que

$$\mathrm{P}\left(\frac{X}{2-X}\leq y\right)=h^{-1}(y)=\frac{2y}{1+y}.$$

(c) Il est nécessaire de déterminer la fonction de répartition de Y, que l'on note F_Y. Par définition,

$$F_Y(t)=P(Y\leq t)=P\left(\frac{X}{2-X}\leq t\right)$$

On commence par constater que, comme $X\in[0;1]$, $Y=h(X)\in[0;1]$ et donc la probabilité précédente est nulle si $t<0$ et vaut 1 si $t\geq 0$. Si t est dans $[0;1]$, on conclut avec la question précédente. Au final,

$$F_Y(t)=\left\{\begin{array}{cl}0, & \text{si } t<0\\ \frac{2t}{1+t}, & \text{si } t\in[0;1]\\ 1, & \text{si } t>1\end{array}\right..$$

La fonction de répartition F_Y étant continue sur $\mathbb{R}$ (il est facile de vérifier la continuité aux points de raccordement) et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty;0[$, sur $]0;1[$ et sur $]1;+\infty[$, c'est bien la fonction de répartition d'une variable à densité. On obtient une densité f en dérivant F_Y là où c'est possible et en prenant des valeurs arbitraires ailleurs. On obtient

$$f(t)=\left\{\begin{array}{cl}\frac{2}{(1+t)^2}, & \text{si } t\in[0;1]\\ 0, & \text{ailleurs}\end{array}\right..$$

(d) On pourrait utiliser le théorème de transfert mais on se propose ici d'utiliser la fonction de densité obtenue à la question précédente. Y admet une espérance si et seulement si on a convergence de l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|x|f(x)\mathrm{d}x.$$

D'après l'expression de f ci-dessus, il suffit donc de montrer la convergence (et calculer la valeur) de l'intégrale

$$\begin{aligned}\int_0^1\frac{2x}{(1+x)^2}\mathrm{d}x &= \int_0^1\frac{2x+2}{(1+x)^2}\mathrm{d}x-\int_0^1\frac{2\mathrm{d}x}{(1+x)^2}\\ &= \left[\ln\left((1+x)^2\right)\right]_0^1+\left[\frac{2}{1+x}\right]_0^1\\ &= 2\ln(2)-1=E(Y).\end{aligned}$$

Partie II : Étude d'un temps d'attente

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Une réunion est prévue entre n invités que l'on note $I_1,\ I_2 \cdots, I_n$.

Chaque invité arrivera entre l'instant 0 et l'instant 1.

Pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq n$, on modélise l'instant d'arrivée de l'invité I_k par une variable aléatoire T_k de loi uniforme sur l'intervalle $[0;1]$. On suppose de plus que, pour tout réel t, les n événements $(T_1 \leq t)$, $(T_2 \leq t)$, $\cdots (T_n \leq t)$, sont indépendants.

(1) Soit un réel t appartenant à $[0;1]$. Pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq n$, on note B_k la variable aléatoire de Bernoulli prenant la valeur 1 si l'événement $(T_k \leq t)$ est réalisé et la valeur 0 sinon.

On note $S_t = B_1 + B_2 + \cdots + B_n$.

(a) Pour tout entier$k$, $B_k = 1$ si l'invité numéro k est présent à l'instant t (et 0 sinon). B_k est donc une variable de Bernoulli de paramètre $P(T_k \leq t) = t$ (car $t \in [0;1]$ et on connait la fonction de répartition de la loi uniforme qui est bien celle de chacun des T_k). Il est alors clair que S_t correspond au nombre d'invités présents à l'instant t.

(b) S_t une somme de n variables de Bernouilli indépendantes de m ême paramètre t, donc c'est une loi binomiale:
$$S_t \hookrightarrow \mathcal{B}(n,t).$$

(2) (a) $(R_1 > t)$ signifie que la première arrivée est après t, c'est à dire qu'à l'instant t personne n'est encore arrivé. Donc $(R_1 > t) = (S_t = 0)$.

(b) La fonction de répartition H de R_1 est déterminée par

- $H(t) = 0$ si $t < 0$;
- $H(t) = \mathrm{P}(R_1 > t) = 1 - \mathrm{P}(S_t = 0) = 1 - (1-t)^n$ si $t \in [0,1]$;
- $H(t) = 1$ si $t > 1$.

H est continue sur $]-\infty, 0[$ sur $[0,1]$ et sur $]1, +\infty[$. De plus,

- en 0^- : $H(t) = 0 \to 0 = 1 - (1-0)^n = H(0)$;
- en 1^+ : $H(t) = 1 \to 1 = 1 - (1-1)^n = H(1)$;

Donc H est continue sur $\mathbb{R}$ et $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$ et donc R_1 est bien une variable à densité. Une densité est alors donnée par
$$h(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t < 0 \\ n(1-t)^{n-1}, & \text{si } x \in [0,1] \\ 0, & \text{si } t > 1 \end{cases}.$$

(c) On s'inspire de la méthode précédente :
$(R_2 > t)$ signifie que le second arrive après t, c'est à dire qu'à l'instant t, il y a au plus un invité arrivé. Cela donne $(R_2 > t) = (S_t \leq 1)$. Il suit que, pour $t \in [0,1]$,
$$\begin{aligned} \mathrm{P}(S_t \leq 1) &= \mathrm{P}(S_t = 0) + \mathrm{P}(S_t = 1) \\ &= (1-t)^n + nt(1-t)^{n-1} \text{ car } S_t \hookrightarrow \mathcal{B}(n,t) \\ &= (1-t)^{n-1}(1 + (n-1)t) \end{aligned}$$

Donc la fonction de répartition K de R_2 est définie par
$$K(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t < 0 \\ 1 - (1-t)^{n-1}(1 + (n-1)t), & \text{si } t \in [0,1] \\ 1, & \text{si } t > 1 \end{cases}$$

Elle est comme précédemment continue sur $]-\infty, 0[$ sur $[0,1]$ et sur $]1,+\infty[$ ainsi qu'en 0^- et en 1^+. Donc K est continue sur $\mathbb{R}$ et $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}\backslash\{0,1\}$ donc R_2 est bien une variable à densité. Pour obtenir une densité, on commence par dériver K; sur $[0;1]$:

$$\begin{aligned}K'(t) &= (n-1)(1-t)^{n-2}(1+(n-1)t) - (1-t)^{n-1}(n-1)\\ &= (n-1)(1-t)^{n-2}nt\end{aligned}$$

Il suit qu'une densité k de R_2 est donnée par

$$k(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t<0 \\ n(n-1)t(1-t)^{n-2}, & \text{si } x \in [0,1] \\ 0, & \text{si } t>1 \end{cases}$$

Exercice 2

Les questions de cet exercice ne sont pas très différentes de certaines du sujet **EML 2020**.

Soient λ un réel strictement supérieur à 2 et X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ.

(1) On rappelle que

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x<0 \\ 1-e^{-\lambda x}, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

et que

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}, \qquad V(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

(2) D'après le théorème de transfert,

$$\begin{aligned} e^X \text{ existe} &\iff \int_0^{+\infty} e^t \lambda e^{-\lambda t}\mathrm{d}t \text{ converge}\\ &\iff \int_0^{+\infty} \lambda e^{(1-\lambda)t}\mathrm{d}t \text{ converge}\end{aligned}$$

Soit $A>0$.

$$\begin{aligned}\int_0^A \lambda e^{(1-\lambda)t}\mathrm{d}t &= \left[\frac{\lambda}{1-\lambda}e^{(1-\lambda)t}\right]_0^A\\ &= \frac{\lambda}{1-\lambda}\left(e^{(1-\lambda)A}-1\right)\\ &\underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\lambda}{\lambda-1}\end{aligned}$$

car $\lambda > 2 > 1$. Ainsi, e^X admet une espérance et

$$E(e^X) = \frac{\lambda}{\lambda-1}.$$

Exactement de la même manière, on trouve

$$E(e^{2X}) = \int_0^{+\infty} \lambda e^{(2-\lambda)t}\mathrm{d}t = \frac{\lambda}{\lambda-2}.$$

On pose $Y = e^X$ et on admet que Y est une variable aléatoire et on note F_Y sa fonction de répartition.

(3) (a) Comme $X(\Omega) = \mathbb{R}_+$, que $Y = e^X$ et que exp réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $[1;+\infty[$, on a bien $Y(\Omega) = [1;+\infty[$.

(b) Si $t < 1$, alors $F_Y(t) = P(Y \leq t) = P(e^X \leq 1) = P(X \leq 0) = 0$. Si $t \geq 1$, comme $\ln(t) \geq 0$, on a

$$\begin{aligned} F_Y(t) &= P(Y \leq t) = P(e^X \leq t) = P(X \leq \ln(t)) \\ &= 1 - e^{-\lambda \ln(t)} \\ &= 1 - t^{-\lambda}, \end{aligned}$$

ce qui est bien la formule attendue.

(c) La fonction

$$F_Y : t \mapsto \begin{cases} 0, & \text{si } t < 1 \\ 1 - t^{-\lambda}, & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$$

est continue sur $\mathbb{R}$ (notamment en 1) et de classe $\mathcal{C}^1$ sur chacun de deux intervalles ci-avant. Ainsi, Y est bien une variable aléatoire à densité. Une densité s'obtient par dérivation là où c'est possible et on peut prendre

$$f_Y(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t < 1 \\ \lambda t^{-\lambda-1}, & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$$

(4) (a) Soit $k \in \mathbb{N}$. On peut procéder avec la densité obtenue à la question précédente ou en revenant à la définition de Y. D'après le théorème de transfert,

$$\begin{aligned} E\left(Y^k\right) \text{ existe } &\iff \int_1^{+\infty} t^k f_Y(t)\mathrm{d}t \text{ converge} \\ &\iff \int_1^{+\infty} \frac{\lambda}{t^{\lambda+1-k}}\mathrm{d}t \text{ converge} \\ &\iff \lambda + 1 - k > 1 \iff \lambda > k \end{aligned}$$

par critère de Riemann. Comme $\lambda > 2$, Y admet bien moments d'ordres 1 et 2 donc espérance et variance.

(b) D'après la question 2 (et la formule de König-Huygens)

$$E(Y) = E(e^X) = \frac{\lambda}{\lambda - 1},$$

et

$$V(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2 = E(e^{2X}) - E(Y)^2 = \frac{\lambda}{\lambda - 2} - \left(\frac{\lambda}{\lambda - 1}\right)^2 = \frac{\lambda}{(\lambda-1)^2(\lambda-2)}.$$

Exercice 3

On rappelle que la commande `grand(1, N, 'exp', 1/lambda)` permet de générer un échantillon de taille N dont les composantes représentent des réalisations de variables aléatoires indépendantes de même loi exponentielle $\mathcal{E}$(`lambda`).

On considère une variable aléatoire $X \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$ et la variable $y = \lfloor X \rfloor$.

(1) La partie entière, sous `SciLab` s'obtient à l'aide de l'instruction `floor`. Il suit qu'il fallait compléter:

```
X=grand(1, 1000, 'exp', 1);
Y=floor(X);
```

(2) On obtient une valeur approchée de la moyenne avec l'instruction `mean()` et de la variance soit avec le carrée de l'écart-type (obtenu avec l'instruction `stdev()`) soit encore avec l'instruction `mean()` et la définition de la variance, ce qu'on propose ici

```
m=mean(Y);
v=mean((Y-m).^2);
```

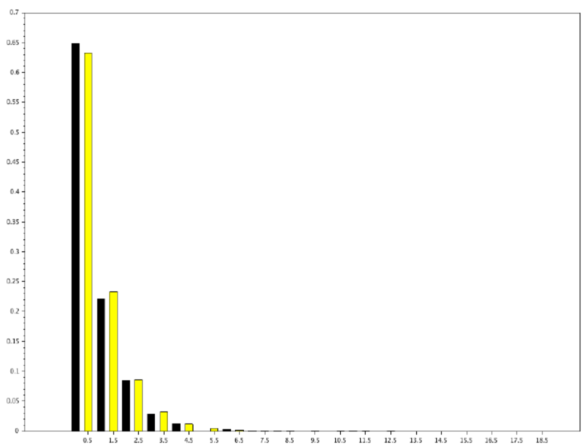
On constate que `SciLab` renvoie

```
--> m=
0.5865
--> v=
0.881775
```

(3) On complète:

```
U=tabul(Y , 'i') ;
bar(U(:, 1), U(:, 2)/1000, 0.3, 'black')
```

(4) On recopie dans la console `SciLab` et on exécute les instructions du texte. On obtient la figure ci-dessous



Il s'agit des diagrammes à bâtons des fréquences (empiriques) de la loi Y et des valeurs théoriques d'une variable G telle que $G+1$ est géométrique de paramètre $p = 1 - e^{-1}$. on retrouve donc un résultat vu dans un sujet de **EDHEC 2002**

$$Y + 1 \hookrightarrow \mathcal{G}(1 - e^{-1}).$$

En particulier, le cours donne l'espérance de la loi géométrique, ainsi

$$E(Y+1) = \frac{1}{(1-e^{-1}} \simeq 1.58$$

ce qui, par linéarité de l'espérance devrait conduire théoriquement à $E(Y) \simeq 0.58$, ce qu'on a obtenu de manière empirique précédemment.

Exercice 4

Dans tout l'exercice, on considère un réel $a \in \mathbb{R}_+^*$ et pour $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^n \exp\left(-\frac{x^2}{2a^2}\right) \mathrm{d}x$.

(1) L'intégrale I_n est impropre en $+\infty$. Par croissance comparée, il est clair que

$$\lim_{x\to+\infty} x^{n+2}\exp\left(-\tfrac{x^2}{2a^2}\right)=0$$

ou encore

$$x^n\exp\left(-\tfrac{x^2}{2a^2}\right)=o\left(\frac{1}{x^2}\right),\quad x\to+\infty.$$

Par critère de comparaison par négligeabilité à une intégrale de Riemann convergente, on peut conclure que I_n est bien convergente.

(2) (a) Si $X\hookrightarrow N(0,a^2)$, alors X a pour densité

$$f(x)=\frac{1}{a\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\tfrac{x^2}{2a^2}\right),$$

qui est paire. En particulier, on a

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{a\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\tfrac{x^2}{2a^2}\right)\mathrm{d}x=\frac12\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{a\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\tfrac{x^2}{2a^2}\right)\mathrm{d}x=\frac12$$

ou encore

$$I_0=\int_0^{+\infty}\exp\left(-\tfrac{x^2}{2a^2}\right)\mathrm{d}x=a\sqrt{2\pi}\times\frac12=a\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

(b) Soit $A>0$. En posant $u=u(x)=x^2/2$, on définit une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;A]$ rendant le changement de variables licite. Comme $\mathrm{d}u=u'(x)\mathrm{d}x=x\mathrm{d}x$, on a

$$\begin{aligned}\int_0^A x\exp\left(-\tfrac{x^2}{2a^2}\right)\mathrm{d}x &= \int_0^{A^2/2}\exp\left(-\tfrac{u}{a^2}\right)\mathrm{d}u\\ &= \left[-a^2\exp\left(-\frac{u}{a^2}\right)\right]_0^{A^2/2}\\ &= -a^2\exp\left(-\frac{A^2}{2a^2}\right)+a^2\\ &\underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} a^2\end{aligned}$$

Ainsi, on trouve bien

$$I_1=a^2.$$

(3) (a) Soient $n\geq 2$ et $t\in\mathbb{R}_+$ fixés. On pose

$$\left\{\begin{array}{rcl}u(x)&=&x^{n-1}\\ v'(x)&=&x\exp(-x^2/2a^2)\end{array}\right.\rightsquigarrow\left\{\begin{array}{rcl}u'(x)&=&(n-1)x^{n-2}\\ v(x)&=&-a^2\exp(-x^2/2a^2)\end{array}\right.$$

Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,t]$ et donc, par intégration par parties

$$\begin{aligned}\int_0^t x^n\exp\left(-\frac{x^2}{2a^2}\right)\mathrm{d}x &= \int_0^t x^{n-1}\cdot x\exp\left(-\frac{x^2}{2a^2}\right)\mathrm{d}x\\ &= \left[-a^2x^{n-1}\exp\left(-\frac{t^2}{2a^2}\right)\right]_0^t+a^2(n-1)\int_0^t x^{n-2}\exp\left(-\frac{t^2}{2a^2}\right)\\ &= -a^2t^{n-1}\exp\left(-\frac{t^2}{2a^2}\right)+(n-1)\,a^2\int_0^t x^{n-2}\exp\left(-\frac{x^2}{2a^2}\right)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

(b) Par passage à la limite lorsque $t\to+\infty$ et croissance comparée, on obtient bien

$$I_n=(n-1)\,a^2I_{n-2}.$$

(c) On en déduit
$$I_2 = a^2 I_0 = a^2\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$
et
$$I_3 = 2a^2 I_1 = 2a^4.$$

Exercice 5

Cet exercice est extrait du sujet **EDHEC 2013**.

(1) On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Le calcul donne
$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \neq 0, \quad \text{et} \quad A^3 = 0$$

(b) On résout
$$\begin{aligned} X = (x, y, z) \in \operatorname{Ker}(f) &\iff A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \\ &\iff \begin{cases} 2x + y + 2z &= 0 \\ -x - y - z &= 0 \\ -x - z &= 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y &= 0 \\ z &= -x \end{cases} \\ &\iff X = (x, 0, -x) = x(1, 0, -1) \end{aligned}$$
Ainsi, posant $u = (1, 0, -1)$, on a $\operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Vect}(u)$ et u étant non nul, il forme bien une base du noyau de f qui est alors de dimension 1. Par le théorème du rang, l'image de f est alors de dimension 2. Il suffit de prendre deux colonnes de la matrice de f qui ne soient pas colinéaires, disons les deux premières, pour avoir une base de l'image. En posant
$$v = (2, -1, -1), \quad \text{et} \quad w = (1, -1, 0),$$
on a bien $\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Vect}(v, w)$ et (v, w) forme bien une base de l'image de f.

(c) D'après le calcul de A^2 (qui est la matrice de f^2 dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, il est clair que (comme trois fois la même colonne qui correspond aux coordonnées de u dans la base canonique)
$$\operatorname{Im}(f^2) = \operatorname{Vect}(u) = \operatorname{Ker}(f).$$

Dans la suite, on considère un endomorphisme g de R^3 tel que
$$g^2 \neq 0, \qquad \text{et} \qquad g^3 = 0,$$
ce qui signifie que $g \circ g$ n'est pas l'endomorphisme nul, mais que $g \circ g \circ g$ est l'endomorphisme nul. En désignant par M la matrice de g dans la base canonique $\mathbb{R}^3$ de $\mathbb{R}^3$ on a donc : $M^2 \neq 0$ et $M^3 = 0$.

On se propose de montrer, dans ce cas plus général, que $\mathrm{Im}\,(g^2) = \mathrm{Ker}\,(g)$.

(2) (a) Comme $g^2 \neq 0$, il existe nécessairement $u \in \mathbb{R}^3$ tel que $g^2(u) \neq 0$ (sinon g^2 enverrait tout élément sur 0 et serait l'endomorphisme nul).

(b) Comme on est en dimension 3 et en présence de 3 vecteurs, il suffit de montrer que la famille est libre. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que

$$au + bg(u) + cg^2(u) = 0 \qquad (\star).$$

En appliquant g^2 à la relation $(\star)$, comme $g^3 = g^4 = 0$, on obtient

$$g^2\left(au + bg(u) + cg^2(u)\right) = ag^2(u) = 0.$$

Mais comme $g^2(u) \neq 0$, on a nécessairement $a = 0$. Ainsi, $(\star)$ devient

$$bg(u) + cg^2(u) = 0.$$

On applique alors maintenant g et on obtient

$$g(bg(u) + cg^2(u)) = bg^2(u) = 0$$

et comme précédemment $b = 0$. Il ne reste dans $(\star)$ que $cg^2(u) = 0$ qui donne $c = 0$. On a bien $a = b = bc = 0$ ce qui montre bien que la famille est libre et que celle-ci forme une base de $\mathbb{R}^3$.

(c) Par définition de la matrice d'une application dans une base, et comme $g(g^2(u)) = g^3(u) = 0$, on a

$$\mathrm{Mat}(g, \mathcal{B}') = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(d) On voit avec la matrice ci-dessus que le rang de g est alors 2 (la dimension de son noyau est 1). Attention, les colonnes ici donnent les coordonnées (et les coordonnées seulement) dans la base $\mathcal{B}'$ des vecteurs que l'on va prendre pour l'image et la noyau. On a clairement

$$\mathrm{Im}(g) = \mathrm{Vect}(g(u), g^2(u)), \qquad \mathrm{Ker}(g) = \mathrm{Vect}(g^2(u)).$$

La matrice de g^2 dans cette même base est alors

$$\mathrm{Mat}(g^2, \mathcal{B}') = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ce qui permet d'écrire (observant que $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est le vecteur colonne correspondant aux coordonnées de $g^2(u)$ dans $\mathcal{B}'$)

$$\mathrm{Im}(g^2) = \mathrm{Vect}(g^2(u)) = \mathrm{Ker}(g),$$

ce qui est bien la conclusion souhaitée.

Problème

Cet intéressant problème reprend un sujet **ESCP 2002**.
Une solution est disponible sur le site de Pierre Veuillez, et plus précisément ici.

Néanmoins, on propose une solution de la question `SciLab`:

(3) Comme $u_0 = \ln(1) = 0$, on a $w_0 = 0$.

```
n=input('n=?')
w=0
for k=1:n
   w=[w, log(k+1)/(n+1-k)]
end
w=cumsum(w)
disp(w)
```