ECE 2 - Année 2020-2021
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Devoir Maison n°7

À rendre le 27/01

Exercice 1

On note Id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$ et on considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(1) (a) Déterminer un polynôme annulateur de A qui soit de degré 2.
  (b) En déduire les deux valeurs propres possibles λ_1 et λ_2 de A (avec $\lambda_1 < \lambda_2$).
  (c) En `SciLab`, la commande `rank(M)` renvoie le rang de la matrice M. On a saisi :

```
A=[1,0,0;-2,3,-2;-1,1,0]
r1=rank(A-eye(3,3))
r2=rank(A-2*eye(3,3))
disp(r1,'r1=')
disp(r2,'r2=')
```

  `SciLab` a renvoyé :

```
r1 =
      1.
r2 =
      2.
```

  Que peut-on conjecturer quant aux valeurs propres de f et à la dimension des sous-espaces propres associés?
  (d) Donner une base de chacun des sous-espaces propres $E_{\lambda_1} = \text{Ker}(f - \lambda_1 Id)$ et $E_{\lambda_2} = \text{Ker}(f - \lambda_2 Id)$.

(2) (a) Déterminer, **en justifiant**, une base (u_1, u_2, u_2) de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de f. On choisira ces vecteurs de façon que leurs composantes soient des entiers naturels les plus petits possible, la dernière composante de u_1 et la première de u_3 étant nulles.

Exercice 2

Dans tout l'exercice N désigne un entier naturel fixé supérieur ou égal à 2, et p un réel fixé de l'intervalle $]0,1[$ et $q = 1-p$. Soit n un entier naturel quelconque.

Dans une population de N individus, on s'intéresse à la propagation d'un certain virus.

Chaque jour, on distingue dans cette population trois catégories d'individus : en premier lieu, les individus sains, c'est-à-dire ceux qui ne sont pas porteurs du virus, ensuite les individus qui viennent d'être contaminés et qui sont inoffensifs pour les autres, et enfin, les individus contaminés par le virus et qui sont contagieux.

Ces trois catégories évoluent jour après jour selon le modèle suivant :

- chaque jour n, chaque individu sain peut être contaminé par n'importe lequel des individus contagieux ce jour avec la même probabilité p, ces contaminations éventuelles étant indépendantes les unes des autres;
- un individu contaminé le jour n devient contagieux le jour $n+1$;
- chaque individu contagieux le jour n redevient sain le jour $n+1$.

On note alors X_n le nombre aléatoire d'individus contagieux le jour n. On remarquera que si, pour un certain entier naturel i, on a $X_i = 0$, alors on a aussi $X_{i+1} = 0$.

On va dans cet exercice[1] ne traiter que le cas $N = 3$ et $p = 1/3$.

On considère les matrices S et R suivantes :

$$S = \begin{pmatrix} 9 & 4 & 4 & 9 \\ 0 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -6 & 1 \\ 1 & 0 & 5 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(1) Montrer que la matrice R est inversible et calculer son inverse R^{-1}.

(2) (a) Montrer que les réels -1, 0, 5 et 9 sont des valeurs propres de S.
(b) Calculer le produit matriciel $R^{-1}SR$.
(c) En déduire, pour tout n de $\mathbb{N}$ l'expression de la matrice S^n.

(3) Soit n un entier fixé de $\mathbb{N}$.
(a) Déterminer la loi de probabilité conditionnelle de X_{n+1} sachant l'événement $[X_n = 0]$.
(b) Déterminer la loi de probabilité conditionnelle de X_{n+1} sachant l'événement $[X_n = 3]$.
(c) Vérifier que la loi de probabilité conditionnelle de X_{n+1} sachant l'événement $[X_n = 1]$. (resp $[X_n = 2]$) est la loi binomiale de paramètres $\left(2, \frac{1}{3}\right)$ (resp. $\left(1, \frac{5}{9}\right)$).
(d) Représenter le diagramme de transition de la chaîne de Markov (X_n).
(e) On introduit l'*espérance conditionnelle*, notée $E\left(X_{n+1} | X_n = i\right)$, qui correspond à l'espérance de la loi de probabilité conditionnelle de X_{n+1} sachant l'événement $[X_n = i]$.

[1] Dans le sujet original dont cet exercice est extrait, on traitait également le cas général

Déterminer les valeurs respectives de $E\left(X_{n+1}|X_n=1\right)$ et $E\left(X_{n+1}|X_n=2\right)$.

(4) On suppose, **uniquement dans cette question**, que X_0 suit la loi binomiale de paramètres $\left(3,\frac{1}{3}\right)$.
  (a) Déterminer la loi de X_1 et calculer $E\left(X_1\right)$.
  (b) Vérifier la formule suivante :

$$E\left(X_1\right)=\sum_{i=0}^{3} E\left(X_1|X_0=i\right) P\left(\left[X_0=i\right]\right).$$

(5) On introduit alors le vecteur U_n défini par

$$U_n=\begin{pmatrix} u_n\\ v_n\\ w_n\\ t_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \mathrm{P}\left(\left[X_n=0\right]\right)\\ \mathrm{P}\left(\left[X_n=1\right]\right)\\ \mathrm{P}\left(\left[X_n=2\right]\right)\\ \mathrm{P}\left(\left[X_n=3\right]\right)\end{pmatrix}$$

  (a) Déterminer une relation entre u_n, v_n, w_n et t_n.
  (b) A l'aide de la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements $\{[X_n=i] : 0\leq i\leq 3\}$, déterminer une matrice M indépendante de n, telle que

$$U_{n+1}=M\ U_n.$$

  (c) Exprimer M en fonction de S. En déduire les valeurs propres de M.
  (d) Quel est l'état stable de la chaîne de Markov (X_n)?
  (e) Donner l'expression des réels u_n, et v_n en fonction de n, v_0 et w_0.

(6) On pose

$$F=\bigcup_{n=0}^{+\infty}\left[X_n=0\right].$$

  (a) Que signifie l'événement F ?
  (b) Montrer la convergence de la chaîne vers l'état stable, peu importe la loi suivie par X_0. Interpréter.

Problème

Ce problème s'adresse aux étudiant.e.s inscrit.e.s dans une école du Top 7.

Le but de ce problème est l'étude des matrices dont les coefficients diagonaux **sont** les valeurs propres.

Dans tout ce problème, on note n un entier supérieur ou égal à 2 et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées possédant n lignes et n colonnes dont les coefficients sont réels. On note I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On note $\mathcal{D}_n$ l'ensemble des matrices $M=(m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui vérifient les propriétés suivantes:
  (Δ_1) **:** les coefficients diagonaux $m_{1,1}$, ..., $m_{n,n}$ de la matrice M sont des valeurs propres de M;
  (Δ_2) **:** la matrice M n'a pas d'autres valeurs propres que les nombres $m_{1,1}$, ..., $m_{n,n}$.

Partie I - Généralités et exemples

(1) Montrer que toutes les matrices triangulaires supérieures et toutes les matrices triangulaires inférieures de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ appartiennent à $\mathcal{D}_n$.

(2) Si M est une matrice de $\mathcal{D}_n$, établir que pour tout α réel, la matrice $M + \alpha I_n$ est encore un élément de $\mathcal{D}_n$.

(3) On note K_n la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1.

(a) Montrer que la matrice K_n n'appartient pas à $\mathcal{D}_n$.
(b) L'ensemble $\mathcal{D}_n$ est-il un sous espace-vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

(4) (a) Soit (x, y, z) un élément de $\mathbb{R}^3$. Montrer que

$$\left(\begin{pmatrix} 0 & x \\ y & z \end{pmatrix} \text{ inversible}\right) \iff (x \neq 0 \text{ et } y \neq 0)$$

(b) En déduire que l'ensemble $\mathcal{D}_2$ ne contient pas d'autre élément que les matrices triangulaires de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

(5) Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ appartient à $\mathcal{D}_3$. Cette matrice est-elle diagonalisable?

(6) Pour tout t réel, on considère la matrice

$$M(t) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1+t \\ 0 & 2 & -1-t \\ 1 & 1 & 4+2t \end{pmatrix}.$$

(a) Déterminer l'ensemble des valeurs propres de la matrice $M(t)$ selon la valeur de t. En déduire les valeurs de t pour lesquelles la matrice $M(t)$ appartient à $\mathcal{D}_3$.
(b) Déterminer les valeurs de t pour lesquelles la matrice $M(t)$ est diagonalisable.

Partie II - Matrices nilpotentes

Une matrice M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est *nilpotente* si, et seulement si, il existe un entier naturel p non nul tel que la matrice M^p soit la matrice nulle.

(1) Soit M une matrice nilpotente de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Montrer que 0 est une valeur propre de M et que c'est la seule valeur propre de M.

(2) Soit M une matrice nilpotente de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On va prouver par l'absurde que M^3 est la matrice nulle. Pour cela, on suppose que M^3 n'est pas la matrice nulle.

Notons $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et u l'endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ représenté par la matrice M dans la base $\mathcal{B}$.

(a) Montrer les inclusions $\ker(u) \subset \ker(u^2)$ et $\ker(u^2) \subset \ker(u^3)$.
(b) Montrer que les noyaux $\ker(u^2)$ et $\ker(u^3)$ ne peuvent pas être égaux. Pour cela, montrer que dans le cas contraire, le noyau de u^2 est égal à celui de u^i pour tout entier i supérieur ou égal à 2, et en tirer une contradiction.
(c) Montrer que les noyaux $\ker(u)$ et $\ker(u^2)$ ne peuvent pas être égaux non plus.
(d) Conclure en considérant la dimension des noyaux mentionnés ci-dessus.

(3) Soit (a, b, c, d, e, f) un élément de $\mathbb{R}^6$. On considère la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ c & 0 & d \\ e & f & 0 \end{pmatrix}$$

On définit les réels $\gamma(M) = ac + df + be$ et $\delta(M) = bcf + ade$.

(a) Établir l'égalité $M^3 = \gamma(M)M + \delta(M)I_3$.
(b) Montrer que la matrice M est nilpotente si et seulement si $\gamma(M)$ et $\delta(M)$ sont nuls.
(c) On suppose que a, b et d sont égaux à 1. Justifier qu'il existe une infinité de choix pour le triplet (c, e, f) de $\mathbb{R}^3$ pour lesquels la matrice M est nilpotente.
(d) En déduire que l'ensemble $\mathcal{D}_3$ contient une infinité de matrices nilpotentes qui ne sont pas triangulaires.
(e) Exhiber une matrice de $\mathcal{D}_3$ dont tous les coefficients sont non nuls.