ECE 2 - Année 2020-2021
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Devoir Maison n°7

Solution

Exercice 1

On note Id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$ et on considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(1) (a) On cherche un polynôme annulateur de A de degré 2, c'est à dire qu'on cherche deux coefficients réels α et β tels que

$$A^2 + \alpha A + \beta I = 0.$$

En effet, quitte à diviser l'expression par celui-ci s'il nétait pas égal à 1, on peut choisir un polynôme *unitaire*, c'est à dire avec un coefficient sur le monôme de degré 2 égal à 1.

Commençons par observer que

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -6 & 7 & -6 \\ -3 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

On pourrait résoudre le système correspondant à $A^2 = -\alpha A - \beta I$. Mais on peut aussi raisonner comme suit. En ajoutant βI, on ne *joue* que sur les coefficients diagonaux. Ainsi, pour *tuer* les autres coefficients de A^2, c'est avec αA uniquement qu'il faut agir. Regardons alors le coefficient de A^2 de la deuxième ligne, première colonne par exemple, il est égal à -6 soit 3 fois celui de A à la même position. On observe ensuite que $A^2 - 3A = -2I$, ou encore

$$A^2 - 3A + 2I = 0$$

Il suffit de prendre $P(X) = X^2 - 3X + 2$ (dont les racines sont 1 et 2).

(b) D'après la remarque précédente, comme on sait que les valeurs propres de A sont à chercher parmi les racines d'un polynôme annulateur, les seules valeurs propres possibles de A sont $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 2$.

(c) Les instructions `SciLab` nous permettent de voir que $\mathrm{rg}(A-2I) = 1$ et $\mathrm{rg}(A-I) = 2$ ou encore, par le théorème du rang que

$$\dim\left(\mathrm{Ker}(A-I)\right) = 2 \quad \text{et} \quad \dim\left(\mathrm{Ker}(A-2I)\right) = 1.$$

Ainsi, 1 et 2 sont bien valeurs propres de f et les sous-espaces propres associés sont respectivements de dimension 2 et 1.

(d) Pour donner une base de chacun des sous-espaces propres $E_1 = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$ et $E_2 = \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id})$, on résout les équations correspondantes. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

- Pour $\lambda_1 = 1$,

$$\begin{aligned}
X \in E_1 &\iff AX = X \\
&\iff (A-I)X = 0 \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rcl} -2x+2y-2z &=& 0 \\ -x+y-z &=& 0 \end{array} \right. \\
&\iff X = y\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

et on peut écrire

$$u_1 = (1,1,0), \quad u_2 = (-1,0,1), \qquad E_1 = \mathrm{Vect}(u_1,u_2).$$

- Pour $\lambda_2 = 2$,

$$\begin{aligned}
X \in E_2 &\iff AX = 2X \\
&\iff (A-2I)X = 0 \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rcl} -x &=& 0 \\ -2x+y-2z &=& 0 \\ -x+y-2z &=& 0 \end{array} \right. \\
&\iff X = z\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

et on peut écrire

$$u_3 = (0,2,1), \qquad E_2 = \mathrm{Vect}(u_3).$$

(2) (a) Par principe de concaténation, la famille (u_1, u_2, u_2) est une famille de vecteurs propres de f qui est **libre**. Comme elle est composée de 3 vecteurs de $\mathbb{R}^3$, elle en forme une base.
Ce n'était pas demandé, mais on poursuit; dans cette base, la matrice de f est alors donnée par

$$D = \mathrm{Mat}(f, (u_1,u_2,u_3)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

et en notant P la matrice de passage de la base canonique vers la base (u_1, u_2, u_3), c'est à dire

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

la formule de changement de base permet d'écrire que

$$A = PDP^{-1}.$$

Exercice 2

Cet exercice reprend la première partie, avec $N = 3$ et $p = 1/3$ du sujet **HEC 2008**.

Dans une population de N individus, on s'intéresse à la propagation d'un certain virus.

Chaque jour, on distingue dans cette population trois catégories d'individus : en premier lieu, les individus sains, c'est-à-dire ceux qui ne sont pas porteurs du virus, ensuite les individus qui viennent d'être contaminés et qui sont inoffensifs pour les autres, et enfin, les individus contaminés par le virus et qui sont contagieux.

Ces trois catégories évoluent jour après jour selon le modèle suivant :

- chaque jour n, chaque individu sain peut être contaminé par n'importe lequel des individus contagieux ce jour avec la même probabilité p, ces contaminations éventuelles étant indépendantes les unes des autres;
- un individu contaminé le jour n devient contagieux le jour $n + 1$;
- chaque individu contagieux le jour n redevient sain le jour $n + 1$.

On note alors X_n le nombre aléatoire d'individus contagieux le jour n. On remarquera que si, pour un certain entier naturel i, on a $X_i = 0$, alors on a aussi $X_{i+1} = 0$.

On considère les matrices S et R suivantes :

$$S = \begin{pmatrix} 9 & 4 & 4 & 9 \\ 0 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -6 & 1 \\ 1 & 0 & 5 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(1) Par un pivot de Gauss simultané dont on omet ici les étapes, on trouve que R et bien inversible et

$$R^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/6 & -5/6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1/6 & 1/6 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(2) (a) On peut naturellement montrer que les réels donnés sont bien valeurs propres de S en résolvant $SX = \lambda X$ pour λ égal à ces quatre valeurs, mais on peut gagner un peu de temps en observant dans les questions qui suivent que R joue le rôle d'une matrice de passage vers

une base de vecteurs propres, ainsi, on peut *tester* les colonnes de R en leur appliquant S. Sans surprise, on a

$$S\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\\0\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\end{pmatrix},\quad S\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix}=0,\quad S\begin{pmatrix}-6\\5\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-30\\25\\5\\0\end{pmatrix}=5\begin{pmatrix}-6\\5\\1\\0\end{pmatrix},\quad S\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

donc $-1, 0, 5$ et 9 sont bien valeurs propres de S. Comme on a 4 distinctes et que S est de taille 4, on les a toutes et on peut même affirmer que S est diagonalisable.

(b) Au vu de notre approche, R est bien matrice de passage et par changement de base on a,

$$R^{-1}SR=\begin{pmatrix}-1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&5&0\\0&0&0&9\end{pmatrix}=D.$$

(c) La question précédente permet d'écrire

$$S=RDR^{-1}$$

et, par une récurrence immédiate, on a, pour tout $n\geq 1$,

$$S^n=RD^nR^{-1}=R\begin{pmatrix}(-1)^n&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&5^n&0\\0&0&0&9^n\end{pmatrix}R^{-1}$$

Il faut alors faire le calcul puisque c'est explicitement demandé. On se retrousse les manches et on y va.

$$\begin{aligned}S^n &= \frac{1}{6}\begin{pmatrix}0&1&-6&1\\1&0&5&0\\-1&0&1&0\\0&-1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(-1)^n&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&5^n&0\\0&0&0&9^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&-5&0\\0&0&0&-1\\0&1&1&0\\6&6&6&6\end{pmatrix}\\ &= \frac{1}{6}\begin{pmatrix}6\times 9^n&6(9^n-5^n)&6(9^n-5^n)&6\times 9^n\\0&(-1)^n+5^{n+1}&5^{n+1}-5\,(-1)^n&0\\0&5^n-(-1)^n&5\,(-1)^n+5^n&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\end{aligned}$$

(3) Soit n un entier fixé de $\mathbb{N}$.

(a) Ce cas de figure est précisé dans l'énoncé. S'il n'y a personne de contagieux au moment n, il n'y a pas de contamination et il n'y a toujours personne de contagieux au moment $n+1$. Donc, sachant $[X_n=0]$, X_{n+1} est certaine (ou constante) égale à 0;

(b) Si les trois personnes sont contagieuses au moment n, il n'y a personne à contaminer et toutes les trois redeviendront saines au moment $n+1$. Donc, sachant $[X_n=0]$, X_{n+1} est certaine (ou constante) égale à 0;

(c) Sachant $[X_n=1]$, il y a donc, au moment n une personne contagieuse qui peut contaminer 0, 1 ou 2 personnes qui deviendront contagieuses au moment $n+1$. Le nombre de personnes contagieuses est alors le *décompte* d'un nombre de *succes*[1] correspondant à la contamination (avec probabilité $p=1/3$), indépendamment, de chacune des deux personnes. Ainsi, sachant $[X_n=1]$, on a un schéma de Bernoulli et on peut conclure que $X_{n+1}\hookrightarrow\mathcal{B}(2,1/3)$;

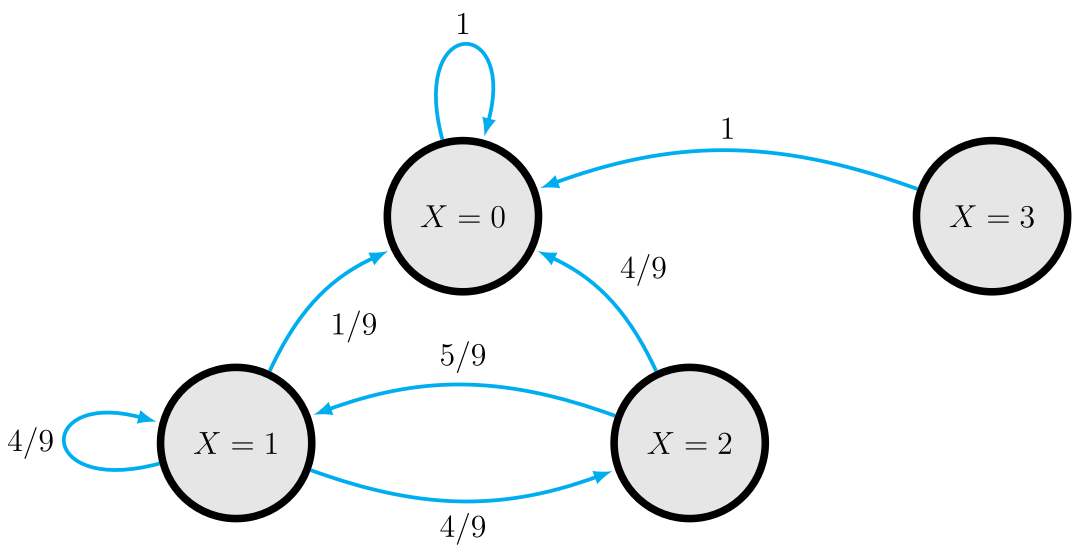
[1]terminologie pas très heureuse, on l'admet volontiers

Sachant $[X_n = 2]$, il y a au moment n une seule personne à contaminer qui peut donc devenir contagieuse (on pas). La personne n'est pas contaminé avec probabilité

$$\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$$

car chaque contamination de la part d'une des personnes contagieuses échoue avec probabilité $2/3$ et que ces contaminations sont indépendantes. Ainsi, le *succès* de contamination a pour probabilité $1 - 4/9 = 5/9$. On a encore un schéma de Bernoulli et, sachant $[X_n = 2]$, on a $X_{n+1} \hookrightarrow \mathcal{B}(1, 5/9)$.

(d) Étant naturellement capable de calculer les probabilités des lois binomiales susmentionnées



(e) On introduit l'*espérance conditionnelle*, notée $E\left(X_{n+1} | X_n = i\right)$, qui correspond à l'espérance de la loi de probabilité conditionnelle de X_{n+1} sachant l'événement $[X_n = i]$.

En utilisant les formules sur la loi binomiale, on trouve

$$E(X_{n+1}|X_n = 1) = 2 \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3}, \qquad E(X_{n+1}|X_n = 2) = \frac{5}{9}$$

et pour les deux loi conditionnelles certaines

$$E(X_{n+1}|X_n = 0) = E(X_{n+1}|X_n = 3) = 0.$$

(4) On suppose, **uniquement dans cette question**, que $X_0 \hookrightarrow \mathcal{B}\left(3, \frac{1}{3}\right)$.

(a) Par la formule des probabilités totales, appliquée au s.c.e $\{(X_0 = i) : \ 0 \leq i \leq 3\}$, et les probabilités conditionnelles obtenues précédemment et synthétisées dans le diagramme de transition, on a

$$\begin{aligned}
P(X_1 = 0) &= P_{X_0=0}(X_1 = 0)P(X_0 = 0) + P_{X_0=1}(X_1 = 0)P(X_0 = 1) + \\
&\qquad P_{X_0=2}(X_1 = 0)P(X_0 = 2) + P_{X_0=3}(X_1 = 0)P(X_0 = 3) \\
&= 1 \times P(X_0 = 0) + \frac{4}{9} \times P(X_1 = 0) + \frac{4}{9} \times P(X_0 = 2) + 1 \times P(X_0 = 3) \\
&= \frac{8}{27} + \frac{4}{9} \times \frac{12}{27} + \frac{4}{9} \times \frac{6}{27} + \frac{1}{27} \\
&= \frac{51}{81} = \frac{17}{27}.
\end{aligned}$$

De manière analogue, on trouve

$$P(X_1 = 1) = \frac{26}{81}, \qquad P(X_1 = 2) = \frac{4}{81}, \quad P(X_1 = 3) = 0.$$

Il suit que

$$E(X_1) = 0 \times \frac{17}{27} + 1 \times \frac{26}{81} + 2 \times \frac{4}{81} + 3 \times 0 = \frac{34}{81}.$$

(b) On vérifie bien que

$$\sum_{i=0}^{3} E\left(X_1 | X_0 = i\right) P\left([X_0 = i]\right) = 0 + \frac{2}{3} \times \frac{12}{27} + \frac{5}{9} \times \frac{6}{27} + 0 = \frac{34}{81} = E(X_1).$$

Cette formule sur l'espérance conditionnelle, appelée *formule de l'espérance totale* est l'analogue de la formule des probabilités totales pour l'espérance conditionnelle. Naturellement hors-programme.

(5) On introduit alors le vecteur U_n défini par

$$U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \\ t_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{P}\left([X_n = 0]\right) \\ \mathrm{P}\left([X_n = 1]\right) \\ \mathrm{P}\left([X_n = 2]\right) \\ \mathrm{P}\left([X_n = 3]\right) \end{pmatrix}$$

(a) On a $P\left(X_n = 0\right) + P\left(X_n = 1\right) + P\left(X_n = 2\right) + P\left(X_n = 3\right) = 1$ (système complet d'événements) donc

$$u_n + v_n + w_n + t_n = 1.$$

(b) En reprenant la formule des probabilités totales de la même manière que pour l'obtention de la loi X_1 mais cette fois avec le s.c.e $\{(X_n = i) : \ 0 \leq i \leq 3\}$ et toujours les probabilités conditionnelles du diagramme de transition, on peut écrire

$$U_{n+1} = MU_n$$

avec

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 4/9 & 4/9 & 1 \\ 0 & 4/9 & 5/9 & 0 \\ 0 & 1/9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} S.$$

(c) Comme $M = (1/9)S$, les valeurs propres de M sont celles de S multipliées par $1/9$. Ainsi

$$\mathrm{Sp}(M) = \left\{ \frac{\lambda}{9} : \ \lambda \in \mathrm{Sp}(S) \right\} = \left\{ -\frac{1}{9}, \ 0 \ \frac{5}{9}; \ 1 \right\}.$$

(d) L'état stable de la chaîne de Markov (X_n) est le vecteur propre de la matrice de transition M associé à la valeur propre 1 dont la somme somme des composantes est égale à 1. Les vecteurs propres de M associés à λ sont les vecteurs propres de S associé à 9λ. On a vu précédemment que $(1, 0, 0, 0)$ était vecteur propre de S associé à 9, il est donc vecteur propre de M associé à 1. La somme de ses composantes est bien égale à 1 donc l'état stable de la chaîne est

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi, **si** la chaine est convergente, c'est vers cet état stable, donc vers la loi certaine égale à 0, ce qui, intuitivement n'est pas très surprenant car une fois arrivé à 0, on y reste.

(e) Une récurrence immédiate donne $U_n = M^n U_0$. Ainsi,

$$\begin{aligned} U_n &= M^n U_0 = \left(\frac{1}{9}\right)^n S^n U_0 \\ &= \left(\frac{1}{9}\right)^n \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 6\times 9^n & 6(9^n-5^n) & 6(9^n-5^n) & 6\times 9^n \\ 0 & (-1)^n + 5^{n+1} & 5^{n+1} - 5\,(-1)^n & 0 \\ 0 & 5^n - (-1)^n & 5\,(-1)^n + 5^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \\ t_0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Comme $u_0 + v_0 + w_0 + t_0 = 1$, on trouve

$$\begin{aligned} u_n &= u_0 + \left(1 - \left(\frac{5}{9}\right)^n\right) v_0 + \left(1 - \left(\frac{5}{9}\right)^n\right) w_0 + t_0 \\ &= 1 - \left(\frac{5}{9}\right)^n (v_0 + w_0) \\ v_n &= \left(\frac{1}{6}\left(\frac{-1}{9}\right)^n + \frac{5}{6}\left(\frac{5}{9}\right)^n\right) v_0 + \left(\frac{5}{6}\left(\frac{5}{9}\right)^n - \frac{1}{6}\left(\frac{-1}{9}\right)^n\right) w_0 \end{aligned}$$

(6) On pose

$$F = \bigcup_{n=0}^{+\infty} [X_n = 0]\,.$$

(a) L'évènement F signifie qu'il existe un instant $n \geq 0$ pour lequel $X_n = 0$, c'est à dire pour lequel il n'y a aucun individus contagieux. Comme $[X_n = 0] \subset [X_{n+1} = 0]$, la probabilité de cet évènement se calcule, par le théorème de limite monotone, par

$$P(F) = \lim_{n\to+\infty} P([X_n = 0]) = \lim_{n\to+\infty} u_n = 1.$$

(b) Dans la loi de X_n obtenue ci-dessus (même on a explicité que u_n et v_n) on voit que, peu importe la valeur de u_0, v_0, w_0, t_0, on a

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 1, \qquad \lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} w_n = \lim_{n\to+\infty} t_n = 0.$$

Ainsi, on a composante par composante,

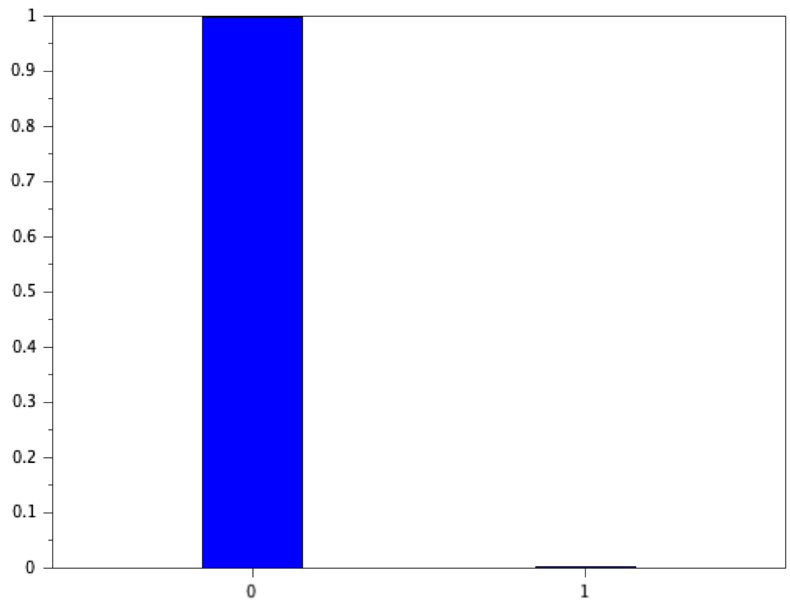
$$\lim_{n\to+\infty} U_n = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ce qui prouve bien la *convergence* de la loi vers l'état stable. Cette notion de convergence pour des suites de variables aléatoires sera un peu précisée dans le Chapitre 11 avec la notion de *convergence en loi*. On voit alors que X_n converge en loi vers une variable certaine égale à 0.

La convergence a l'air assez rapide. On ne résiste pas à joindre une modélisation `SciLab` sur laquelle on invite à réfléchir un peu...

```
M=[9, 4, 4, 9; 0, 4, 5, 0; 0, 1, 0, 0; 0, 0, 0,0]/9
n=10; N=1000
U=zeros(1, N)
for k=1:N
    X=grand(n, 'markov', M', grand(1,1,'bin', 3, 1/3)+1)
    U(k)=X(n)
end
```

```
U=U-ones(1, N) //sinon les états sont numérotés 1 à 4 et on a ajouté 1 aussi
pour x0
T=tabul(U, 'i')
bar(T(:,1), T(:,2)/N, 0.3)
```



Problème

Ce problème est extrait d'un *vieux* sujet **Math II, ESSEC 2010**.

Partie I. Généralités et exemples

(1) Quand une matrice est triangulaire, on sait (d'après le cours) que ses valeurs propres **sont** les termes de la diagonale. Ainsi, les matrices triangulaires de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ appartiennent à$\mathcal{D}_n$.

(2) Soit M une matrice de $\mathcal{D}_n$. Les valeurs propres de M sont donc les termes de sa diagonale. Or,

$$\begin{aligned}
\beta \text{ est valeur propre de } (M+\alpha I_n) &\iff (M+\alpha I_n - \beta I_n) = (M - (\beta-\alpha) I_n) \text{ est non inversible}\\
&\iff \beta-\alpha \text{ est valeur propre de } M\\
&\iff \beta-\alpha \text{ est sur la diagonale de } M\\
&\iff \beta \text{ est sur la diagonale de } M+\alpha I
\end{aligned}$$

Ainsi, si M est une matrice de $\mathcal{D}_n$, la matrice $M+\alpha I_n$ est encore un élément de $\mathcal{D}_n$.

(3) On note K_n la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1.

(a) On constate que

$$K_n \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ \vdots \\ n \end{pmatrix} = n \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

donc n ($\neq 1$) est valeur propre de K_n. Or K_n n'a que des 1 sur la diagonale et ne peut donc être un élément de $\mathcal{D}_n$.

(b) On utilise la question précédente pour écrire K_n comme combinaison linéaire de deux matrices éléments de $\mathcal{D}_n$. Il suffit de faire un découpage en somme d'une matrice triangulaire inférieure et d'une matrice triangulaire supérieure:

$$K_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \dots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Chacune des deux matrices est un élément de $\mathcal{D}_n$ (comme matrice triangulaire) mais leur somme, égale à K_n n'est pas un élément de $\mathcal{D}_n$ qui ne peut donc être un sous-espace vectoriel.

(4) (a) Soit (x, y, z) un élément $\mathbb{R}^3$. On peut utiliser la caractérisation de l'inversibilité par le *déterminant* de la matrice. En effet

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 & x \\ y & z \end{pmatrix} \text{ inversible} \quad &\iff \quad 0 \times z - y \times x \neq 0 \\ &\iff \quad xy \neq 0 \\ &\iff \quad x \neq 0 \textbf{ et } y \neq 0. \end{aligned}$$

(b) Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{D}_2$. Ses valeurs propres sont donc nécessairement a et d. Mais, on observe que

$$\begin{aligned} M - aI_2 = \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & d-a \end{pmatrix} \text{ non inversible} \quad &\iff \quad b = 0 \text{ ou } c = 0 \\ &\iff \quad M \text{ est triangulaire (inférieure ou supérieure).} \end{aligned}$$

Il suit donc que les seules matrices de $\mathcal{M}_2$ qui sont des éléments de $\mathcal{D}_2$ sont les matrices triangulaires.

(5) On vérifie que les valeurs propres de A sont ses termes diagonaux, c'est à dire 3, 2 et 4.

- $A - 3I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ non inversible (deux colonnes identiques) donc 3 est valeur propre;
- $A - 2I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ non inversible (deux colonnes identiques) donc 2 est valeur propre;
- $A - 4I = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Or,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \quad &\iff \quad \left\{ \begin{array}{rcl} x - y - z &=& 0 \\ 2y + z &=& 0 \\ x + y &=& 0 \end{array} \right. \\ &\iff \quad \left\{ \begin{array}{rcl} x - y - z &=& 0 \\ 2y + z &=& 0 \end{array} \right. \\ &\iff \quad \left\{ \begin{array}{rcl} x &=& 3y \\ z &=& 2y \end{array} \right. \end{aligned}$$

Ainsi, $A - 4I$ est encore non inversible (son noyau n'est pas réduit à 0) et 4 est bien valeur propre.

Comme A est de taille 3 elle ne peut pas avoir plus de 3 valeurs propres distinctes. Donc les valeurs propres de A sont 2, 3 et 4 et comme elle a trois valeurs propres distinctes, elle est diagonalisable.

(6) Pour tout t réel, on considère la matrice $M(t) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1+t \\ 0 & 2 & -1-t \\ 1 & 1 & 4+2t \end{pmatrix}$.

(a) Par la méthode de Gauss, on détermine les conditions d'inversibilité de $M(t) - \alpha I$:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 3-\alpha & 1 & 1+t \\ 0 & 2-\alpha & -1-t \\ 1 & 1 & 4+2t-\alpha \end{pmatrix} \text{ inversible } &\iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4+2t-\alpha \\ 0 & 2-\alpha & -1-t \\ 3-\alpha & 1 & 1+t \end{pmatrix} \text{ inversible} \\
&\iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4+2t-\alpha \\ 0 & 2-\alpha & -1-t \\ 0 & -2+\alpha & 1+t-(3-\alpha)(4+2t-\alpha) \end{pmatrix} \text{ inversible} \\
&\iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4+2t-\alpha \\ 0 & 2-\alpha & -1-t \\ 0 & 0 & -(3-\alpha)(4+2t-\alpha) \end{pmatrix} \text{ inversible.}
\end{aligned}$$

Or cette dernière étant triangulaire, on sait qu'elle sera non inversible lorsqu'un de ses coefficients diagonaux s'annule. Ainsi, On peut donc déduire que les valeurs propres de $M(t)$ sont 2, 3 et $4+2t$ qui sont bien les termes diagonaux de $M(t)$ qui est donc bien un élément de $\mathcal{D}_3$.

On rappelle que les opérations *élémentaires* sur les lignes préservent le **rang** et le **noyau**.

(b)
- Si $4+2t \neq 2$ ($\iff t \neq -1$) et $4+2t \neq 3$ ($\iff t \neq -1/2$) alors $M(t)$ a trois valeurs propres distinctes et $M(t)$ est diagonalisable;
- Si $t = -1$
$$\operatorname{Ker}(M(-1) - \alpha I) = \operatorname{Ker}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2-\alpha \\ 0 & 2-\alpha & 0 \\ 0 & 0 & -(3-\alpha)(2-\alpha) \end{pmatrix}\right).$$
Pour $\alpha = 2$, (x, y, z) est vecteur propre associé à 2 $\iff x + y = 0$ donc le sous espace propre associé est $E_2 = \operatorname{Vect}((1,1,0),(0,0,1))$.
La famille étant de deux vecteurs non colinéaire est libre, et forme donc une base de E_2 et $\dim(E_2) = 2$. Comme la dimension du sous espace associé à 3 est au moins 1 alors $\dim(E_2) + \dim(E_3) \geq 3$ (cette dimension est donc 1). Donc, dans ce cas, $M(-1)$ est diagonalisable;
- Si $t = -1/2$:
$$\operatorname{Ker}(M(-1/2) - \alpha I) = \operatorname{Ker}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3-\alpha \\ 0 & 2-\alpha & -1/2 \\ 0 & 0 & -(3-\alpha)(3-\alpha) \end{pmatrix}\right).$$
Pour $\alpha = 3$ alors (x, y, z) est vecteur propre associé à 3 si et seulement si
$$\begin{cases} x + y &= 0 \\ -y - \frac{1}{2}z &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x &= -y \\ z &= -2y \end{cases}$$
Donc le sous espace propre associé à 3 est $E_3 = \operatorname{Vect}(-1, 1, -2)$ qui est de dimension 1. Pour $\alpha = 2$ alors (x, y, z) est vecteur propre associé à 2 si et seulement si
$$\begin{cases} x + y + z &= 0 \\ \frac{-1}{2}z &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x &= -y \\ z &= 0 \end{cases}$$

Donc le sous espace propre associé à 2 est $E_2 = \text{Vect}\,(-1, 1, 0)$ qui est de dimension 1. Donc la somme des dimensions des sous espaces propres est 2 alors que $M\,(-1/2)$ est de taille 3. Donc $M\,(t)$ n'est pas diagonalisable pour $t = -1/2$.

Partie II. Matrices nilpotentes

Une matrice M de $\mathcal{M}_3\,(\mathbb{R})$ est *nilpotente* si, et seulement si, il existe un entier naturel p non nul tel que la matrice M^p soit la matrice nulle.

(1) Soit M une matrice nilpotente de $\mathcal{M}_3\,(\mathbb{R})$. Il existe donc $p \neq 0$ tel que $M^p = 0$ et le polynôme X^p est annulateur de M. Si α est valeur propre de M alors $\alpha^p = 0$ et donc $\alpha = 0$. Il reste à montrer que 0 est bien valeur propre de M.

Comme $M^p = 0$ alors M est non inversible (sinon M^p le serait) donc 0 est valeur propre, ainsi 0 est la seule valeur propre de M.

(2) Soit M une matrice nilpotente de $\mathcal{M}_3\,(\mathbb{R})$. On va prouver par l'absurde que M^3 est la matrice nulle. Pour cela, on suppose que M^3 n'est pas la matrice nulle.

Notons $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et u l'endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ représenté par la matrice M dans la base $\mathcal{B}$.

(a) Si $x \in \ker(u)$ et comme $u\,(0) = 0$ (car u linéaire) alors $u\,(u\,(x)) = 0$ donc $x \in \ker\,(u^2)$.
Et de même si $x \in \ker\,(u^2)$ alors $u^2\,(x) = 0$ donc $u\,(u^2\,(x)) = u\,(0) = 0$.
Ainsi,
$$\ker(u) \subset \ker(u^2) \quad \text{et} \quad \ker(u^2) \subset \ker(u^3).$$

(b) Supposons que $\ker(u^2) = \ker(u^3)$. Il suit, par récurrence, que, pour $i \geq 2$, $\ker(u^i) = \ker(u^2)$.

En effet, il suffit de montrer le caractère héréditaire de cette propriété. Supposons que, pour un certain $i \geq 2$, on ait $\ker(u^i) = \ker(u^2)$. Montrons que $\ker(u^{i+1}) = \ker(u^2)$. Par un argument similaire à la question précédente, il est clair que $\ker(u^2) = \ker(u^i) \subset \ker(u^{i+1})$. Réciproquement, soit $x \in \ker(u^{i+1})$. Alors, $u^{i-2}(x) \in \ker(u^3) = \ker(u^2)$ donc $u^2(u^{i-2}(x)) = 0$ ou encore $x \in \ker(u^i) = \ker(u^2)$ et on a bien l'égalité cherchée.

On a supposé que $M^3 \neq 0$ donc $M^2 \neq 0$ et $\ker\,(u^2) \neq \mathbb{R}^3$. Si $\ker(u^2) = \ker(u^3)$, alors $\ker(u^i) = \ker(u^2)$ pour tout entier $i \geq 2$. Mais alors, $\ker(u^i) \neq \mathbb{R}^3$ et M ne peut être nilpotente. Il est donc clair que $\ker(u^2) \neq \ker(u^3)$.

(c) Avec le même argument que précédemment, on peut montrer que si $\ker(u) = \ker(u^2)$, alors $\ker(u^i) = \ker(u)$ pour tout $i \geq 1$ ce qui contredira aussi le caractère nilpotent de M. Ainsi, on a également $\ker(u) \neq \ker(u^2)$.

(d) Comme $\{0\} \subset \ker(u) \subset \ker(u^2) \subset \ker(u^3)$ et que les inclusions sont strictes, on en déduit des inégalités **strictes** sur les dimensions
$$0 < \dim\,(\ker(u)) < \dim\left(\ker(u^2)\right) < \dim\left(\ker(u^3)\right) \leq 3.$$
Ces dimension étant des nombres entiers, on a nécessairement, $\dim(\ker(u)) = 1$, $\dim(\ker(u^2)) = 2$ et $\dim(\ker(u^3)) = 3$ ou encore $\ker(u^3) = \mathbb{R}^3$, ce qui donne bien $M^3 = 0$.

(3) Soit (a, b, c, d, e, f) un élément de $\mathbb{R}^6$. On considère la matrice
$$M = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ c & 0 & d \\ e & f & 0 \end{pmatrix}.$$
On définit les réels $\gamma(M) = ac + df + be$ et $\delta(M) = bcf + ade$.

(a) Le calcul donne

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ c & 0 & d \\ e & f & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ c & 0 & d \\ e & f & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac+be & bf & ad \\ ed & ac+df & cb \\ fc & ae & eb+df \end{pmatrix}$$

et

$$M^3 = \begin{pmatrix} ade+bcf & abe+a^2c+adf & b^2e+abc+bdf \\ ac^2+cdf+bce & ade+bcf & dac+d^2f+bde \\ be^2+def+ace & fbe+df^2+acf & ade+bcf \end{pmatrix}.$$

D'autre part,

$$\gamma(M)M+\delta(M)I_3 = (ac+df+be)\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ c & 0 & d \\ e & f & 0 \end{pmatrix} + (bcf+ade)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = M^3.$$

(b) Si $\gamma(M)$ et $\delta(M)$ sont nuls, alors $M^3=0$ donc M est nilpotente. Réciproquement, si M est nilpotente alors d'après le raisonnement mené ci-avant, $M^3=0$ donc $\gamma(M)M+\delta(M)I_3=0$.

On a alors deux cas:

- ou bien tous les coefficients de M ne sont pas nuls, alors $\{M, I\}$ est libre (2 matrices non proportionnelles) donc $\gamma(M)=0$ et $\delta(M)=0$;

- ou bien tous ses coefficients sont nuls, alors $\gamma(M)=0$ et $\delta(M)=0$.

(c) On suppose que a, b et d sont égaux à 1. Par la question précédente, M est nilpotente si et seulement si $ac+df+be=c+f+e=0$ et $bcf+ade=cf+e=0$, ce qui donne

$$\begin{cases} e &= -cf \\ c+f-cf &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} e &= -cf \\ c(1-f) &= -f \end{cases}$$

et, pour $f \neq 1$, le système donne

$$\begin{cases} e &= f^2/(1-f) \\ c &= -f/(1-f) \end{cases}.$$

Donc pour chaque $f \neq 1$ il y a une solution au système, ce qui en fait une infinité de triplets (c,e,f) de $\mathbb{R}^3$ pour lesquels la matrice M est nilpotente.

(d) Pour a, b et d égaux à 1 et $f \neq 1$ (et non nul afin que la matrice M ne soit pas triangulaire), la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -f/(1-f) & 0 & 1 \\ f^2/(1-f) & f & 0 \end{pmatrix}$$

est non triangulaire et nilpotente d'après les calculs précédents. Comme elle est nilpotente, sa seule valeur propre est 0. Et comme le seul terme sur sa diagonale est 0, on a $M \in \mathcal{D}_3$. On a bien exhibé une infinité de matrices non triangulaires et éléments de $\mathcal{D}_3$.

(e) Pour avoir tous les coefficients non nuls, on recycle la Partie I:
Avec $f=2$ on $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{D}_3$ donc $M+I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{D}_3$ a tous ses coefficients non nuls.