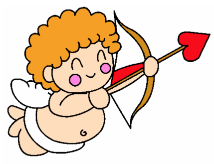
ECE 2 - Année 2020-2021
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com



Devoir Maison n°9

À rendre le 25/02

Exercice 1

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = \begin{cases} (n+1)(1-x)^n, & \text{si } x \in [0;1] \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

On admet[1] que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n est la densité d'une variable aléatoire notée X_n
On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $Y_n = nX_n$.

(1) Calculer la fonction de répartition F_n de la variable Y_n.
(2) Étudier la convergence en loi de la suite de variables aléatoires (Y_n).

Exercice 2

Préambule

Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice diagonalisable dont les valeurs propres sont notées λ_1 et λ_2.

(1) Montrer que

$$\begin{cases} \lambda_1\lambda_2 &= ad - bc \\ \lambda_1 + \lambda_2 &= a + d \end{cases}.$$

Une fonction de deux variables

On considère l'application $F : U =]1;+\infty[^2 \to \mathbb{R}$, définie, pour tout $(x,y) \in]1;+\infty[^2$ par :

$$F(x,y) = \frac{\ln(x)}{y} + \frac{\ln(y)}{x}$$

(2) Représenter graphiquement U.
(3) Justifier que F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert U.
(4) Calculer les dérivées partielles premières de F en tout (x,y) de $U =]1;+\infty[^2$.

[1] On s'assurera quand même qu'on sait le faire

(5) On introduit la fonction φ définie sur $[0;+\infty[$ par

$$\varphi(t) = \begin{cases} t^2\ln(t), & \text{si } t > 0 \\ 0, & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

(a) Montrer que φ est continue sur $[0;+\infty[$.
(b) Montrer que φ est dérivable en 0 et préciser $\varphi'(0)$. En déduire que φ est dérivable sur $[0;+\infty[$.
(c) Montrer φ réalise une bijection de $]1;+\infty[$ sur un intervalle à préciser.

(6) Montrer que $(x, y) \in U$ est un point critique de F si et seulement si

$$\begin{cases} \varphi(x) = \varphi(y) \\ \dfrac{1}{xy} = \dfrac{\ln(x)}{y^2} \end{cases}$$

(7) En déduire que (e, e) est le seul point critique un point critique de F sur U.
(8) Calculer les dérivées partielles secondes de F en tout (x, y) de U.
(9) Utiliser le résultat en préambule pour déterminer la nature du point critique précédent. En déduire que F ne présente pas d'extremum (local ou global) sur U.
(10) Qu'en est-il si on considère F sur $\overline{U} = [1;+\infty[\times[1;+\infty[$? (*On pourra évaluer F en $(1,1)$.*)

Exercice 3

On dit qu'une densité de probabilité f est CSP($\mathbb{R}_+^*$) lorsque :

(i) f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
(ii) f est nulle sur $\mathbb{R}_-^*$.
(iii) f est strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$.

(1) Soit X une variable aléatoire à densité. On note f une densité de X et F sa fonction de répartition. Montrer que si f est CSP($\mathbb{R}_+^*$), l'équation $F(x) = 1/2$ admet une solution unique sur $]0;+\infty[$, notée m.

Cet unique réel, que l'on notera m, sera appelé *médiane* de X.

(2) Soit $\lambda > 0$. Dans cette question seulement, on suppose que X suit une loi exponentielle de paramètre λ.
(a) Donner une densité f de X, ainsi que sa fonction de répartition F.
(b) Vérifier que f est CSP($\mathbb{R}_+^*$) puis montrer que la médiane de X est : $m = \ln(2)/\lambda$.
(c) Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0, 1[$.
Quelle est la loi de la variable aléatoire $V = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-U)$?
(d) Écrire une fonction en `SciLab` d'entête `function V = exponentielle(lambda)` qui, prend en paramètre un réel *lambda* strictement positif et simule la loi exponentielle de paramètre *lambda*.

(3) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0 \\ xe^{-x}, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}.$$

(a) En utilisant une propriété de la loi exponentielle de paramètre 1, montrer que
$$\int_0^{+\infty} xe^{-x}\mathrm{d}x = 1$$
puis en déduire que f est une densité de probabilité qui est CSP($\mathbb{R}_+^*$).
On note X une variable aléatoire dont une densité f.

(b) Montrer que la fonction de répartition F de X est donnée par
$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0 \\ 1-(1+x)e^{-x}, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}.$$

(c) Montrer, sans chercher à la calculer, que la médiane m de X vérifie $1 \leq m \leq 2$.
On donne : $0,3 < e^{-1} < 0,4$ *et* $0,1 < e^{-2} < 0,15$.

On se propose, dans la suite de cette question, de calculer une valeur approchée de m.
On introduit pour cela la fonction g définie sur $[1,2]$ par : $g(x) = \ln(2x+2)$.
On considère également la suite (u_n) définie par
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_n = g(u_{n-1}) \quad \text{pour } n > 0 \end{cases}.$$

(d) En revenant à la définition de m, montrer que $g(m) = m$.

(e) Montrer que si x appartient à $[1,2]$ alors : $g(x)$ appartient à $[1,2]$ et $|g'(x)| \leq \dfrac{1}{2}$.

(f) En déduire que : $|g(x) - m| \leq \dfrac{1}{2}|x-m|$.

(g) Montrer alors que : $|u_{n+1} - m| \leq \dfrac{1}{2}|u_n - m|$ puis que : $|u_n - m| \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

(h) Quelle est la limite de la suite u_n ?

(i) Écrire un programme en `SciLab` donnant une valeur approchée de m à 10^{-2} près.

Exercice 4

Soit a un réel positif ou nul. On considère la matrice
$$M(a) = \begin{pmatrix} 1 & a-2 & a & 1 \\ a & -1 & 1 & a \\ 0 & 0 & -a & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(1) Montrer que $M(0)$ admet 1 et -1 comme seules valeurs propres.
Donner les sous-espaces propres correspondants.

Dans la suite, on suppose $a > 0$.

(2) Montrer que les valeurs propres de $M(a)$ sont les réels λ solutions de l'une des équations :
$$\lambda^2 = (a-1)^2 \quad \text{et} \quad \lambda^2 + a\lambda + 1 = 0.$$

(3) (a) Déduire de la question précédente la valeur de a pour laquelle $M(a)$ n'est pas inversible.
(b) Pour cette valeur, dire si $M(a)$ est diagonalisable.

(4) On suppose dans cette question que $a > 2$.

(a) Montrer que $M(a)$ possède 4 valeurs propres distinctes.
(b) En déduire que $M(a)$ est diagonalisable.

Exercice 5

Pour n un entier naturel supérieur ou égal à 2, on considère une variable aléatoire (X_n) définie par

$$X_n(\Omega) = [\![2; n+1]\!], \qquad P(X_n = k) = \frac{(k-1)}{n^k}\binom{n+1}{k}, \qquad k \in [\![2; n+1]\!].$$

(1) (a) Montrer que

$$\frac{(k-1)}{n^k}\binom{n+1}{k} = \frac{1}{n^{k-1}}\binom{n}{k-1} + \frac{1}{n^k}\binom{n}{k-1} - \frac{1}{n^k}\binom{n+1}{k}.$$

(b) (*) À l'aide du triangle de Pascal, vérifier que la formule précédente définit bien une variable aléatoire.

(2) Pour tout entier $k \geq 2$, on pose $u_k = \dfrac{k-1}{k!}$.

(a) Vérifier que (u_k) est une distribution de probabilité. On note alors Z une v.a telle que $P(Z = k) = u_k$.
(b) Montrer que la suite (X_n) converge en loi vers Z.

Exercice 6*

On définit une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que

$$P(X = n) = a \ln\left(\frac{1 + \frac{2}{n}}{1 + \frac{2}{n+1}}\right),$$

où a est un réel. On noter $\lfloor x \rfloor$ la partie entière d'un réel x.

(1) Déterminer la valeur de a.
(2) Montrer que, lorsque $n \to +\infty$,

$$\ln\left(\frac{1 + \frac{2}{n}}{1 + \frac{2}{n+1}}\right) \sim \frac{2}{n^2}.$$

(3) X admet-elle une espérance ? Une variance ?
(4) On considère une variable aléatoire U suivant une loi uniforme $\mathcal{U}([0;1[)$ et on pose

$$Y = \left\lfloor \frac{2}{3^{1-U} - 1} \right\rfloor.$$

Montrer que X et Y ont la même loi.
(5) Proposer une fonction `SciLab` nommée X renvoyant une simulation de X.

Exercice 7* : Un modèle d'action paradoxal

Une action vaut initialement $X_0 = 1$ euros. A chaque instant $n \geq 1$, sa valeur est multipliée par une quantité aléatoire Z_n. On suppose que les variables aléatoires (Z_n) sont indépendantes et de même loi

$$P(Z_n = 1 + a) = P(Z_n = 1 - a) = \frac{1}{2},$$

pour une certaine valeur $a \in]0;1[$. On note X_n la valeur de l'action à l'instant n. Ainsi, on a, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$X_n = \prod_{k=1}^{n} Z_k.$$

On pose $Y_k = \ln(Z_k)$ et on définit $\overline{Y}_n$ la moyenne empirique des Y_k.

(1) Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$, $E(X_n) = 1$.
(2) Exprimer $E(\overline{Y}_n)$ et $V(\overline{Y}_n)$ en fonction de a et de n.
(3) Montrer, à l'aide l'inégalité de Bienaymé-Tchébychev, qu'en notant $\delta = -\dfrac{1}{4}\ln(1-a^2) > 0$, on a

$$\lim_{n \to +\infty} P(Y_1 + Y_2 + ... + Y_n \geq -n\delta) = 0.$$

(4) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que, pour n assez grand, on a

$$P(X_n \geq \varepsilon) \leq P(Y_1 + Y_2 + ... + Y_n \geq -n\delta).$$

(5) Commenter le titre de l'exercice.

(6) **Une explication.**
   (a) Montrer que
   $$P\left(X_n \leq \frac{1}{2}\right) \leq 4V(X_n).$$
   (b) En déduire que $V(X_n)$ ne tend pas vers 0. Ainsi X_n ne se concentre pas autour de son espérance.
   (c) Montrer même que
   $$V(X_n) = (1+a^2)^n - 1$$
   tend vers $+\infty$.

(7) (`SciLab`).
   (a) Compléter la fonction suivante pour qu'elle simule la variable dont la loi est suivie par Z_n (peu importe la valeur de n), où a est en argument de la fonction

```
function y=Z(a)
    if ...................  then
        y=............
    else
        ...................
    end
endfunction
```

   (b) On complète la fonction précédente avec les instructions suivantes. Expliquer à quoi elles correspondent; les exécuter et commenter la figure obtenue.

```
a=0.4; n=50; N=10
X=ones(n,N)
for k=1:N
    for j=2:n
        X(j,k)=X(j-1,k)*Z(a)
    end
end
M=[X(:,1), X(:,2), X(:,3), X(:,4), X(:,5), X(:,6), X(:,7), X(:,8), X(:,9), X(:,10)]
plot2d(1:n, M)
```

Exercice 8* : Hyperplans de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

On considère un sous-espace H de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de dimension $p = n^2 - 1$. (*Un tel sous-espace est appelé hyperplan.*) On note $(A_1, ..., A_p)$ une base de H et I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Le but est de montrer que H contient au moins une matrice inversible. *On suppose donc que H ne contient aucune matrice inversible.*

(1) Montrer que $(A_1, A_2, ..., A_p, I_n)$ forme une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(2) Soit N une matrice nilpotente, c'est à dire pour laquelle il existe un entier $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $N^{k-1} \neq 0$ et $N^k = 0$.
  (a) Quelles sont les valeurs propres de N? La matrice est-elle diagonalisable?
  (b) Montrer qu'il existe une matrice $B \in H$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que $N = B + \lambda I$.
  (c) Montrer que λ est une valeur propre de N.
  (d) En déduire que $N \in H$ puis que H contient toutes les matrices nilpotentes.

(3) Déterminer une matrice inversible qui s'écrive comme somme de deux matrices nilpotentes. Conclure.