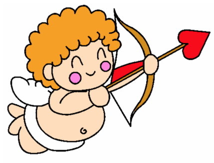
ECE 2 - Année 2020-2021
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com



Devoir Maison n°9

Solution

Exercice 1

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = \begin{cases} (n+1)(1-x)^n, & \text{si } x \in [0;1] \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

On admet que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n est la densité d'une variable aléatoire notée X_n
On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $Y_n = nX_n$.

(1) Commençons par expliciter la fonction de répartition de X_n. Comme f_n est nulle en dehors de $[0;1]$, on a clairement $F_{X_n}(t) = 0$ si $t < 0$ et $F_{X_n}(t) = 1$ si $t \geq 1$. Pour $t \in [0;1[$, on a

$$F_{X_n}(t) = \int_0^t (n+1)(1-x)^n \mathrm{d}x = \left[-(1-x)^{n+1}\right]_0^t = 1-(1-t)^{n+1}.$$

Au final, on peut écrire

$$F_{X_n}(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t < 0 \\ 1-(1-t)^{n+1}, & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ 1, & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$$

Maintenant, on peut expliciter la fonction de répartition de Y_n en revenant à sa définition. Observant que

$$\frac{t}{n} \in [0;1[\Longleftrightarrow t \in [0;n[,$$

on a

$$\begin{aligned} F_{Y_n}(t) &= P(Y_n \leq t) = P(nX_n \leq t) \\ &= P\left(X_n \leq \frac{t}{n}\right) = F_{X_n}\left(\frac{t}{n}\right) \\ &= \begin{cases} 0, & \text{si } t < 0 \\ 1-(1-t/n)^{n+1}, & \text{si } 0 \leq t < n \\ 1, & \text{si } t \geq n \end{cases} \end{aligned}$$

(2) Pour étudier la convergence en loi de la suite de variables aléatoires (Y_n), on fixe $t \in \mathbb{R}$ et on fait tendre $n \to +\infty$ dans l'expression de $F_{Y_n}(t)$. Si $t < 0$, $F_{Y_n}(t) = 0 \longrightarrow 0$. Si $t \geq 0$, à partir d'un n assez grand (ce qu'on peut considérer car on s'intéresse à la limite en $+\infty$), on aura $t \in [0; n[$ et donc, on doit déterminer

$$\lim_{n \to +\infty} 1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Attention, c'est une forme indéterminée. On revient à l'écriture sous forme exponentielle et on utilise le DL de $\ln(1-u)$ en 0 (à l'ordre 1) avec $u = t/n$ qui tend biens vers 0. On a

$$\begin{aligned} 1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n+1} &= \exp\left((n+1)\ln\left(1 - \frac{t}{n}\right)\right) \\ &= \exp\left((n+1)\left(-\frac{t}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) \\ &= \exp\left(-t\frac{n+1}{n} + o(1)\right) \\ &\underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \exp(-t) \end{aligned}$$

car $(n+1)/n \to 1$. Au final,

$$F_{Y_n}(t) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \left\{ \begin{array}{rl} 0, & \text{si } t < 0 \\ 1 - e^{-t}, & \text{si } t \geq 0 \end{array} \right. = F_Z(t)$$

où $Z \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$. On conclut donc que (Y_n) converge en loi vers une variable Z suivant la loi exponentielle de paramètre 1.

Exercice 2

Préambule

Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice diagonalisable dont les valeurs propres sont notées λ_1 et λ_2.

(1) On sait que

$$\begin{aligned} \lambda \text{ valeur propre de } M &\iff M - \lambda I \text{ non inversible} \\ &\iff (a-\lambda)(d-\lambda) - cd = 0 \\ &\iff \lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc = 0 \end{aligned}$$

Ainsi, les valeurs propres de M **sont** les **racines** du polynôme[1]

$$X^2 - (a+d)X + ad - bc.$$

Si λ_1 et λ_2 sont les valeurs propres de M, elles en sont donc les racines. Comme celui-ci est de degré 2, la factorisation des polynômes donne

$$X^2 - (a+d)X + ad - bc = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2) = X^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)X + \lambda_1\lambda_2.$$

Par identification, on a bien

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \lambda_1\lambda_2 &=& ad - bc \\ \lambda_1 + \lambda_2 &=& a + d \end{array} \right. .$$

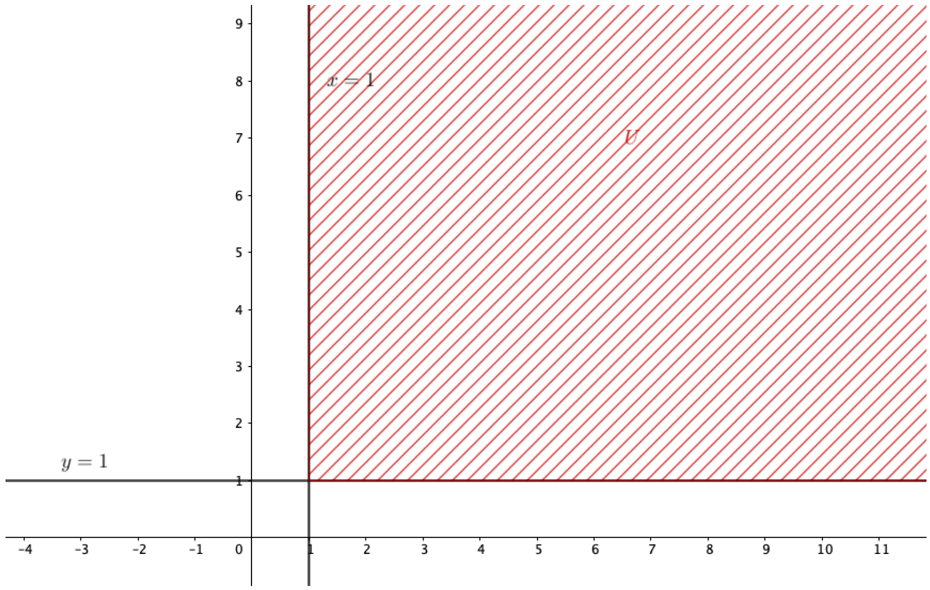
[1] À titre purement informatif, ce polynôme s'appelle le polynôme caractéristique de M.

Une fonction de deux variables

On considère l'application $F : U =]1; +\infty[^2 \to \mathbb{R}$, définie, pour tout $(x, y) \in]1; +\infty[^2$ par :

$$F(x, y) = \frac{\ln(x)}{y} + \frac{\ln(y)}{x}$$

(2) Le domaine U correspond au *quart de plan* délimité par les droites (non incluses) d'équations $x = 1$ et $y = 1$.



(3) Les deux applications $(x, y) \mapsto x$ et $(x, y) \mapsto y$ sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur ($\mathbb{R}^2$ et donc sur) U comme fonctions polynomiales et sont à valeurs strictement positives. La fonction $t \mapsto \ln(t)$ est une fonction usuelle de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Par compositions, les deux fonctions $(x, y) \mapsto \ln(x)$ et $(x, y) \mapsto \ln(y)$ sont bien de classe $\mathcal{C}^2$ sur U. Par quotients (avec des dénominateurs non nuls) puis par somme, la fonction F est bien de classe $\mathcal{C}^2$ sur U.

(4) Les règles de calcul de dérivation partielle donnent

$$\begin{aligned} \partial_1 F(x, y) &= \frac{1}{xy} - \frac{\ln(y)}{x^2} \\ \partial_2 F(x, y) &= \frac{1}{xy} - \frac{\ln(x)}{y^2} \end{aligned}$$

(5) On introduit la fonction φ définie sur $[0; +\infty[$ par

$$\varphi(t) = \begin{cases} t^2 \ln(t), & \text{si } t > 0 \\ 0, & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

(a) Par croissance comparée,

$$\lim_{t \to 0^+} \varphi(t) = \lim_{t \to 0^+} t^2 \ln(t) = 0 = \varphi(0)$$

donc φ est continue en 0. Sur $\mathbb{R}_+^*$, c'est un produit de fonctions usuelles continues donc φ est continue. Au final, la fonction est bien continue sur $\mathbb{R}_+$.

(b) Il faut déterminer la limite du taux d'accroissement en 0. On a

$$\begin{aligned} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} &= \frac{t^2 \ln(t)}{t} = t \ln(t) \\ &\xrightarrow[t \to 0^+]{} 0 \qquad \text{(croissance comparée)} \end{aligned}$$

donc φ est dérivable en 0 et $\varphi'(0) = 0$. Sur $\mathbb{R}_+^*$, φ est dérivable comme produit de fonctions usuelles dérivables. La fonction est bien dérivable sur $\mathbb{R}_+$.

(c) Pour $t > 0$, on a $\varphi'(t) = 2t\ln(t) + t^2(1/t) = t(2\ln(t) + 1)$. En particulier, si $t > 1$, $\varphi'(t) > 0$ ce qui veut dire que φ est strictement croissante sur $]1; +\infty[$. Étant continue sur ce même intervalle, le théorème de bijection permet d'affirmer que φ réalise une bijection de $]1; +\infty[$ sur $]\varphi(1); \lim_{+\infty} \varphi(t)[=]0; +\infty[$.

(6) Soit $(x, y) \in U$.

$$(x,y) \text{ est un point critique de } F \iff \nabla F(x,y) = 0 \iff \left\{ \begin{array}{rcl} \frac{1}{xy} - \frac{\ln(y)}{x^2} & = & 0 \\ \frac{1}{xy} - \frac{\ln(x)}{y^2} & = & 0 \end{array} \right.$$
$$\iff \left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{1}{xy} & = & \dfrac{\ln(y)}{x^2} \\ \\ \dfrac{\ln(y)}{x^2} & = & \dfrac{\ln(x)}{y^2} \end{array} \right.$$
$$\iff \left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{1}{xy} & = & \dfrac{\ln(y)}{x^2} \\ \\ y^2\ln(y) & = & x^2\ln(x) \end{array} \right.$$
$$\iff \left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{1}{xy} & = & \dfrac{\ln(y)}{x^2} \\ \\ \varphi(x) & = & \varphi(y) \end{array} \right.$$

(7) Comme φ est bijective sur $]1; +\infty[$ et que x et y en sont des éléments (car $(x, y) \in U$), la deuxième ligne du système ci-dessus est équivalente à $x = y$. En substituant dans la première ligne, on obtient
$$\frac{1}{x^2} = \frac{\ln(x)}{x^2} \iff \ln(x) = 1 \iff x = e.$$
Comme $y = x$, l'unique point critique de F sur U est le point de coordonnées (e, e).

(8) Le calcul donne

$$\begin{aligned} \partial^2_{1,1}F(x,y) &= -\frac{1}{yx^2} + \frac{2\ln(y)}{x^3} \\ \partial^2_{1,2}F(x,y) &= -\frac{1}{yx^2} - \frac{1}{xy^2} \\ &= \partial^2_{2,1}F(x,y) \qquad \text{(lemme de Schwarz)} \\ \partial^2_{2,2}F(x,y) &= -\frac{1}{yx^2} + \frac{2\ln(x)}{y^3} \end{aligned}$$

(9) On forme alors la matrice Hessienne de F au point critique
$$H = \nabla^2 F(e,e) = \begin{pmatrix} \frac{1}{e^3} & -\frac{2}{e^3} \\ -\frac{2}{e^3} & \frac{1}{e^3} \end{pmatrix}.$$
La matrice H étant symétrique, elle est diagonalisable. Notant λ_1 et λ_2 ses valeurs propres, le préambule de l'exercice permet d'obtenir en particulier que
$$\lambda_1\lambda_2 = -\frac{3}{e^3} < 0$$

Le produit des deux valeurs propres étant strictement négatif, ces deux valeurs propres sont de signes opposés et F présente donc un point selle en l'unique point critique qu'elle admet sur U. Il n'y a donc pas d'extremum (ni local et *a fortiori* par global non plus) sur U.

(10) Sur $\overline{U}$, on voit que $F(x,y) \geq 0$ (car $\ln(x) \geq 0$ et $\ln(y) \geq 0$ pour $x, y \geq 1$). Or, $F(1,1) = 0$ et $(1,1) \in \overline{U}$. Donc F présente un minimum global sur $\overline{U}$. En revanche, il n'y a pas de maximum global. Ce qu'on peut montrer en exhibant une direction avec une limite infinie, par exemple en constatant que

$$\lim_{x\to+\infty} F(x,1) = \lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty.$$

Exercice 3

On dit qu'une densité de probabilité f est CSP($\mathbb{R}_+^*$) lorsque :

(i) f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
(ii) f est nulle sur $\mathbb{R}_-^*$.
(iii) f est strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$.

(1) On rappelle qu'on a, comme f est nulle sur $\mathbb{R}_-^*$,

$$\forall x \in \mathbb{R}_-^*, \qquad F(x) = 0, \qquad \text{et}, \forall x \geq 0, \quad F(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t.$$

En particulier, f étant continue, F est la primitive de f qui s'annule en 0. On a alors $F'(x) = f(x) > 0$ sur $]0;+\infty[$ ce qui fait de F une fonction (continue et) strictement croissante sur $]0;+\infty[$. Par le théorème de bijection, F réalise donc une bijection de $]0;+\infty[$ sur $]F(0), \lim_{+\infty} F(x)[=]0;1[$ (car F est une fonction de répartition).
En particulier, $1/2 \in]0;1[$, admet donc un unique antécédent, que l'on note m, par F sur $]0;+\infty[$.

(2) Soit $\lambda > 0$. Dans cette question seulement, on suppose que X suit une loi exponentielle de paramètre λ.

(a) C'est une question de récitation du cours. On rappelle donc

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x}, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}, \qquad F(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

(b) Les trois conditions sont immédiates à vérifier; f est bien nulle sur $\mathbb{R}_-^*$, et elle est continue et strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour la médiane, on peut ici résoudre l'équation *à la main*:

$$\begin{aligned} F(x) = 1/2 &\iff 1 - e^{-\lambda x} = 1/2 \iff e^{-\lambda x} = 1/2 \\ &\iff -\lambda x = -\ln(2) \\ &\iff x = \frac{\ln(2)}{\lambda}, \end{aligned}$$

ce qui est bien la solution attendue.

(c) Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0,1[$.
On a déjà rencontré cette question à de multiples reprises. Il faut savoir montrer que $V \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$. On refait la preuve.

$$\begin{aligned} F_V(x) &= P\left(-\frac{1}{\lambda}\ln(1-U) \leq x\right) = P\left(U \leq 1 - e^{-\lambda x}\right) \\ &= F_U\left(1 - e^{-\lambda x}\right) \end{aligned}$$

Observant que $1 - e^{-\lambda x} \in [0;1[\Longleftarrow x \geq 0$ et $x \leq 0 \Longleftrightarrow 1 - e^{-\lambda x} < 0$, la fonction de répartition de la loi uniforme sur $[0;1[$ donne bien

$$F_V(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

(d) On se sert de l'observation précédente pour simuler la loi exponentielle *par inversion*

```
function V=exponentielle(lambda)
    V=-(1/lambda)*log(1-rand( ))
endfunction
```

(3) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0 \\ xe^{-x}, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}.$$

(a) Sachant que si Z désigne une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre 1, celle-ci admet une espérance, et comme sa densité est nulle sur $\mathbb{R}_-^*$, on a

$$\int_0^{+\infty} xe^{-x}\mathrm{d}x = E(Z) = 1.$$

Ainsi, on voit que la fonction f ci-dessus vérifie les conditions pour être une densité de probabilité (elle est continue, y compris en 0, partout sur $\mathbb{R}$, soit comme fonction constante soit comme produit de fonctions usuelles continues, elle est clairement positive ou nulle partout et son intégrale sur $]-\infty;+\infty[$ qui se ramène à celle sur $[0;+\infty[$ car f est nulle sur $\mathbb{R}_-^*$, vaut 1 d'après l'observation ci-dessus. De plus, les conditions CSP$(\mathbb{R}_+^*)$ sont clairement satisfaites.

(b) On rappelle que F est donnée par

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t.$$

Comme f est nulle sur $\mathbb{R}_-^*$, il est clair que $F(x) = 0$ si $x < 0$. Soit $x \geq 0$. En posant

$$\left\{ \begin{array}{rcl} u'(t) & = & e^{-t} \\ v(t) & = & t \end{array} \right. \rightsquigarrow \left\{ \begin{array}{rcl} u(t) & = & -e^{-t} \\ v'(t) & = & 1 \end{array} \right.$$

on définit deux fonctions de classes $\mathcal{C}^1$ sur $[0;x]$. Par intégration par parties, on a

$$\int_0^x te^{-t}\mathrm{d}t = \left[-te^{-t}\right]_0^x + \int_0^x e^{-t}\mathrm{d}t = -xe^{-x} + [-e^{-t}]_0^x = 1 - (1+x)e^{-x},$$

ce qui donne bien

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0 \\ 1 - (1+x)e^{-x}, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}.$$

(c) On a

$$F(1) = 1 - 2e^{-1} \qquad \text{donc} \qquad F(1) < 0,4 < \frac{1}{2} = F(m)$$

et

$$F(2) = 1 - 3e^{-2} \qquad \text{donc} \qquad F(2) > 0,55 > \frac{1}{2} = F(m)$$

Par stricte croissance de F sur $]0;+\infty[$ (et donc de sa bijection réciproque), on a bien

$$1 \leq m \leq 2.$$

On se propose, dans la suite de cette question, de calculer une valeur approchée de m.
On introduit pour cela la fonction g définie sur $[1,2]$ par : $g(x) = \ln(2x+2)$.
On considère également la suite (u_n) définie par

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_n = g(u_{n-1}) \quad \text{pour } n > 0 \end{cases}.$$

(d) Par définition

$$\begin{aligned} F(m) = 1/2 &\iff 1-(m+1)e^{-m} = 1/2 \iff (m+1)e^{-m} = 1/2 \\ &\iff \ln(m+1) - m = -\ln(2) \iff \ln(m+1) + \ln(2) = m \\ &\iff \ln(2(m+1)) = m \\ &\iff g(m) = m. \end{aligned}$$

(e) La fonction g est dérivable sur $[1;2]$ et

$$g'(x) = \frac{2}{2x+2} = \frac{1}{x+1} > 0$$

donc g strictement croissante sur $[1;2]$, ce qui permet d'écrire que $g([1;2]) = [g(1), g(2)] = [\ln(4); \ln(6)] \subset [1;2]$ car

$$\ln(4) = 2\ln(2) > 1, \qquad \ln(6) < \ln(e^2) = 2.$$

De plus, g' est clairement (strictement) décroissante sur $[1;2]$, et on peut aussi écrire, pour tout $x \in [1;2]$

$$-\frac{1}{2} \leq \frac{1}{3} = g'(2) \leq g'(x) \leq g'(1) = \frac{1}{2}$$

ou encore

$$|g'(x)| \leq \frac{1}{2}.$$

(f) L'inégalité des accroissements finis appliquée à g sur $[1;2]$ (qui est bien licite car g est continue sur $[1;2]$ et dérivable sur $]1;2[$) donne alors, sachant que $g(m) = m$ et que $m \in [1;2]$, pour tout $x \in [1;2]$

$$|g(x) - m| = |g(x) - g(m)| \leq \frac{1}{2}|x - m|.$$

(g) Comme $u_0 = 1 \in [1;2]$ et que $g([1;2]) \subset [1;2]$, une récurrence immédiate[2] permet de voir que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [1;2]$. On peut donc appliquer l'inégalité de la question précédente à $x = u_n$, pour obtenir

$$|u_{n+1} - m| = |g(u_n) - m| \leq \frac{1}{2}|u_n - m|.$$

Une autre récurrence permet d'obtenir l'inégalité qui suit.

- <u>initialisation</u>. Pour $n = 0$, $|u_0 - m| = |1 - m| \leq 1 = (1/2)^0$ car $m \in [1;2]$.

- <u>hérédité</u>. Supposons que, pour un certain $n \in \mathbb{N}$, on ait

$$|u_n - m| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \qquad \text{(HR)}.$$

[2] qu'il est capital de savoir faire dans le détail, surtout la question est explicitement posée

Alors, d'après la première partie de la question

$$\begin{aligned} |u_{n+1} - m| &\leq \frac{1}{2}|u_n - m| \\ &\leq \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n && \text{(D'après HR)} \\ &\leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}, \end{aligned}$$

et la récurrence est terminée.

(h) Comme $(1/2)^n \to 0$, le théorème des gendarmes implique que $u_n - m \to 0$ ou encore que $u_n \to m$.

(i) On a donc un processus numérique nous permettant d'obtenir une approximation de m avec une majoration de l'erreur d'approximation! Sous `SciLab`, on obtient alors une approximation à 10^{-2} près en rentrant

```
u=1
n=0
while (1/2)^n >=10^(-2)
    n=n+1
    u = log(2*u+2)
end
disp(u)
```

Exercice 4

Cet exercice provient du sujet **EDHEC 1999**.

Soit a un réel positif ou nul. On considère la matrice

$$M(a) = \begin{pmatrix} 1 & a-2 & a & 1 \\ a & -1 & 1 & a \\ 0 & 0 & -a & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(1) Commençons par expliciter

$$M(0) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Hélas ce n'est **pas** une matrice triangulaire. Mais on n'est pas loin! Sachant que les opérations sur les lignes préservent l'inversibilité,

$$\begin{aligned}
\lambda \text{ valeur propre de } M(0) &\iff M(0)-\lambda I \text{ non inversible} \\
&\iff \begin{pmatrix} 1-\lambda & -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -\lambda \end{pmatrix} \text{ non inversible} \\
&\iff \begin{pmatrix} 1-\lambda & -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -\lambda \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 \end{pmatrix} \text{ non inversible} \\
&\iff \begin{pmatrix} 1-\lambda & -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 1+\lambda^2 \end{pmatrix} \text{ non inversible} \\
&\iff \lambda = 1 \text{ ou } \lambda = -1
\end{aligned}$$

car la dernière matrice est triangulaire et sa non inversibilité est caractérisée par la présence de coefficients nuls sur la diagonale (et que λ^2+1 ne s'annule jamais). On a bien

$$\mathrm{Sp}(M(0)) = \{-1; 1\}.$$

Pour les sous-espaces propres, on résout. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}
X \in E_1 &\iff M(0)X = X \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rcl} -2y+t &=& 0 \\ -2y+z &=& 0 \\ -z+t &=& 0 \\ -z-t &=& 0 \end{array} \right. \\
&\iff y = z = t = 0 \\
&\iff X = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

et on peut écrire

$$E_1 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

On fait de même pour l'autre sous-espace propre.

$$\begin{aligned} X \in E_{-1} &\iff M(0)X = -X \\ &\iff \begin{cases} 2x - 2y + t &= 0 \\ z &= 0 \\ z + t &= 0 \\ -z + t &= 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = y \\ z = 0 \\ t = 0 \end{cases} \\ &\iff X = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et on peut écrire

$$E_{-1} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

En particulier, comme $\dim(E_1) + \dim(E_{-1}) = 1 + 1 = 2 \neq 4$, $M(0)$ n'est pas diagonalisable.

Dans la suite, on suppose $a > 0$.

(2) On raisonne de la même manière que précédemment

$$\begin{aligned} \lambda \text{ valeur propre de } M(a) &\iff M(a) - \lambda I \text{ non inversible} \\ &\iff \begin{pmatrix} 1-\lambda & a-2 & a & 1 \\ a & -1-\lambda & 1 & a \\ 0 & 0 & -a-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -\lambda \end{pmatrix} \text{ non inversible} \\ &\iff \begin{pmatrix} a & -1-\lambda & 1 & a \\ 1-\lambda & a-2 & a & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -\lambda \\ 0 & 0 & -a-\lambda & 1 \end{pmatrix} \text{ non inversible} \\ &\iff \begin{pmatrix} a & -1-\lambda & 1 & a \\ 0 & (a-1)^2 - \lambda^2 & a^2 - 1 + \lambda & a\lambda \\ 0 & 0 & -1 & -\lambda \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^2 + a\lambda + 1 \end{pmatrix} \text{ non inversible} \\ &\iff (a-1)^2 - \lambda^2 = 0 \text{ ou } \lambda^2 + a\lambda + 1 = 0 \end{aligned}$$

On a bien montré que les valeurs propres de $M(a)$ sont les réels λ solutions de l'une des équations :

$$\lambda^2 = (a-1)^2 \quad \text{et} \quad \lambda^2 + a\lambda + 1 = 0.$$

(3) (a) $M(a)$ n'est pas inversible si et seulement si $\lambda = 0$ est valeur propre de $M(a)$ donc si et seulement si

$$(a-1)^2 = 0 \iff a = 1.$$

(b) Pour $a = 1$, la seule solution des équations précédentes est $\lambda = 0$, donc $M(1)$ n'admet qu'une seule valeur propre. La matrice $M(1)$ n'étant pas identiquement nulle, elle ne peut avoir un sous-espace propre associé de dimension 4 et n'est donc pas diagonalisable.

(4) On suppose dans cette question que $a > 2$.

(a) L'équation $\lambda^2 = (a-1)^2$ donne déjà deux solutions (donc deux premières valeurs propres) distinctes, qui sont $\lambda_1 = a-1$ et $\lambda_2 = 1-a$ (il s'agit bien de solutions distinctes car $a \neq 1$). Le polynôme
$$X^2 + aX + 1$$
a pour discriminant $\Delta = a^2 - 4 = (a-2)(a+2) > 0$ car $a > 2$. Donc il admet deux racines distinctes, qui sont
$$\lambda_3 = \frac{-a + \sqrt{(a-2)(a+2)}}{2}, \quad \text{et} \quad \lambda_4 = \frac{-a - \sqrt{(a-2)(a+2)}}{2}.$$
Les réels $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ sont bien deux à deux distincts, car λ_1 et λ_2 ne sont pas racines de $X^2 - aX + 1$. En effet,

$$\begin{aligned} \lambda_1^2 - a\lambda_1 + 1 &= a^2 - 2a + 1 + a^2 - a + 1 = 2a^2 - 3a + 2 \\ &> 0 \quad \text{pour tout } a \in \mathbb{R} \text{ car } (-3)^2 - 4 \times 2 \times 2 = -7 < 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda_2^2 + a\lambda_2 + 1 &= a^2 - 2a + 1 + a - a^2 + 1 = 2 - a \\ &< 0. \end{aligned}$$

(b) $M(a)$ possède quatre valeurs propres distinctes; le cours permet d'affirmer qu'elle est diagonalisable.

Exercice 5

Pour n un entier naturel supérieur ou égal à 2, on considère une variable aléatoire (X_n) définie par
$$X_n(\Omega) = [\![2; n+1]\!], \qquad P(X_n = k) = \frac{(k-1)}{n^k}\binom{n+1}{k}, \qquad k \in [\![2; n+1]\!].$$

(1) (a) Commençons par rappeler la relation classique, déjà rencontrée dans moult exercices, et qui repose sur le fait que $(N-1-(k-1)) = (N-k)$,
$$k\binom{N}{k} = N\binom{N-1}{k-1}.$$
On va s'en servir ici avec $N = n+1$. On commence par développer
$$\begin{aligned} \frac{(k-1)}{n^k}\binom{n+1}{k} &= \frac{k}{n^k}\binom{n+1}{k} - \frac{1}{n^k}\binom{n+1}{k} \\ &= \frac{(n+1)}{n^k}\binom{n}{k-1} - \frac{1}{n^k}\binom{n+1}{k} \\ &= \frac{n}{n^k}\binom{n}{k-1} + \frac{1}{n^k}\binom{n}{k-1} - \frac{1}{n^k}\binom{n+1}{k} \\ &= \frac{1}{n^{k-1}}\binom{n}{k-1} + \frac{1}{n^k}\binom{n}{k-1} - \frac{1}{n^k}\binom{n+1}{k}, \end{aligned}$$

ce qu'on voulait.

(b) Il faut montrer que

$$\sum_{k=2}^{n+1} \frac{(k-1)}{n^k}\binom{n+1}{k} = 1.$$

D'après la question précédente, on peut écrire

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{n+1} \frac{(k-1)}{n^k}\binom{n+1}{k} &= \sum_{k=2}^{n+1}\left(\frac{1}{n^{k-1}}\binom{n}{k-1} + \frac{1}{n^k}\binom{n}{k-1} - \frac{1}{n^k}\binom{n+1}{k}\right)\\
&= \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{n^{k-1}}\binom{n}{k-1} + \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{n^k}\binom{n}{k-1} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{n^k}\binom{n+1}{k}\\
&= \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n^j}\binom{n}{j} + \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{n^k}\binom{n}{k-1} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{n^k}\binom{n+1}{k}\\
&= \frac{1}{n}\binom{n}{1} + \sum_{j=2}^{n} \frac{1}{n^j}\left(\binom{n}{j} + \binom{n}{j-1}\right) + \frac{1}{n^{n+1}}\binom{n}{n} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{n^k}\binom{n+1}{k}\\
&= 1 + \sum_{j=2}^{n} \frac{1}{n^j}\binom{n+1}{j} + \frac{1}{n^{n+1}}\binom{n}{n} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{n^k}\binom{n+1}{k} \qquad \text{(triangle de Pascal)}\\
&= 1 + \sum_{j=2}^{n} \frac{1}{n^j}\left(\binom{n+1}{j} - \binom{n+1}{j}\right) + \frac{1}{n^{n+1}}\binom{n}{n} - \frac{1}{n^{n+1}}\binom{n+1}{n+1}\\
&= 1,
\end{aligned}$$

ce qu'on voulait. Ouf !

(2) Pour tout entier $k \geq 2$, on pose $u_k = \dfrac{k-1}{k!}$.

(a) La série de terme général u_k est bien convergente, sa somme partielle fait apparaître une somme télescopique

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{n} u_k &= \sum_{k=2}^{n} \frac{k-1}{k!} = \sum_{k=2}^{n}\left(\frac{k}{k!}\frac{1}{k!}\right)\\
&= \sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{k!}\right)\\
&= 1 - \frac{1}{n!} \qquad \text{(par télescopage)}\\
&\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1,
\end{aligned}$$

ce qui donne bien le résultat attendu.
On note alors Z une v.a telle que $P(Z = k) = u_k$.

(b) Toutes les variables étant discrètes, il suffit de montrer que, pour tout $k \geq 2$,

$$\lim_{n\to+\infty} P(X_n = k) = P(Z = k).$$

On voit que, pour $k \geq 2$ fixé et n très grand,

$$\begin{aligned}
P(X_n = k) &= \frac{(k-1)}{n^k}\binom{n+1}{k} = \frac{(k-1)(n+1)!}{n^k(n+1-k)!k!} \\
&= \frac{(k-1)}{k!} \times \frac{(n+1)n(n-1)...(n-k)}{n^k} \\
&\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(k-1)}{k!} \times \frac{n^k}{n^k} \\
&\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{(k-1)}{k!} = P(Z=k)
\end{aligned}$$

et on a bien la convergence en loi souhaitée

$$X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} Z.$$

Exercice 6*

On définit une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que

$$P(X=n) = a\ln\left(\frac{1+\frac{2}{n}}{1+\frac{2}{n+1}}\right),$$

où a est un réel. On noter $\lfloor x \rfloor$ la partie entière d'un réel x.

(1) On veut que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} P(X=n) = 1.$$

Or,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} P(X=k) &= a\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{1+\frac{2}{k}}{1+\frac{2}{k+1}}\right) = a\sum_{k=1}^{n}\left(\ln\left(1+\frac{2}{k}\right) - \ln\left(1+\frac{2}{k+1}\right)\right) \\
&= a\left(\ln(3) - \ln\left(1+\frac{2}{n+1}\right)\right) \qquad \text{(par télescopage)} \\
&\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a\ln(3).
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} P(X=n) = 1 \iff a = \frac{1}{\ln(3)}.$$

(2) On rappelle qu'au voisinage de 0, on a

$$\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + o(u^2), \qquad u \to 0.$$

En appliquant à $u = 2/n$ et $u = 2/(n+1)$, on obtient

$$\begin{aligned}
\ln\left(\frac{1+\frac{2}{n}}{1+\frac{2}{n+1}}\right) &= \ln\left(1+\frac{2}{n}\right) - \ln\left(1+\frac{2}{n+1}\right) \\
&= \frac{2}{n} - \frac{4}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) - \frac{2}{n+1} + \frac{4}{2(n+1)^2} + o\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right) \\
&= \frac{2(n+1)-2n}{n(n+1)} + \frac{2(n+1)^2 - 2n^2}{n^2(n+1)^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)
\end{aligned}$$

Or,

$$\frac{2}{n(n+1)} \sim \frac{2}{n^2}, \qquad \text{et} \qquad \frac{2[(n+1)^2-n^2]}{n^2(n+1)^2} = \frac{2n+1}{n^2(n+2)^2} \sim \frac{2}{n^3} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Donc, on a bien

$$\ln\left(\frac{1+\frac{2}{n}}{1+\frac{2}{n+1}}\right) \sim \frac{2}{n^2}.$$

(3) D'après le cours

$$\begin{aligned} X \text{ admet une espérance} \quad &\Longleftrightarrow \quad \sum nP(X=n) \text{ converge (absolument)} \\ &\Longleftrightarrow \quad \sum n\ln\left(\frac{1+\frac{2}{n}}{1+\frac{2}{n+1}}\right) \text{ converge} \end{aligned}$$

Or, d'après la question précédente

$$n\ln\left(\frac{1+\frac{2}{n}}{1+\frac{2}{n+1}}\right) \sim \frac{2}{n}$$

qui est le multiple du terme général d'une série de Riemann divergente. Par critère d'équivalence, la série diverge et X n'admet pas d'espérance et *a fortiori* pas de variance non plus.

(4) On considère une variable aléatoire U suivant une loi uniforme $\mathcal{U}([0;1[)$ et on pose

$$Y = \left\lfloor \frac{2}{3^{1-U}-1} \right\rfloor.$$

Y étant définie comme partie entière d'une quantité supérieure ou égale à 1, $Y(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$. Soit alors $n \in \mathbb{N}^*$. Connaissant la fonction de répartition de U (plus précisément que $F_U(t) = t$ sur $[0;1]$ et que

$$1 - a\ln\left(1+\frac{2}{k}\right) \in [0;1],$$

on a

$$\begin{aligned} P(Y=n) &= P\left(\left\lfloor \frac{2}{3^{1-U}-1} \right\rfloor = n\right) = P\left(n \leq \frac{2}{3^{1-U}-1} < n+1\right) \\ &= P\left(1+\frac{2}{n+1} < 3^{1-U} \leq 1+\frac{2}{n}\right) \\ &= P\left(\ln\left(1+\frac{2}{n+1}\right) < \ln(3)(1-U) \leq \ln\left(1+\frac{2}{n}\right)\right) \\ &= P\left(1-a\ln\left(1+\frac{2}{n}\right) \leq U < 1-a\ln\left(1+\frac{2}{n+1}\right)\right) \\ &= 1-a\ln\left(1+\frac{2}{n+1}\right) - 1 + a\ln\left(1+\frac{2}{n}\right) = a\left(\ln\left(1+\frac{2}{n}\right) - \ln\left(1+\frac{2}{n+1}\right)\right) \\ &= P(X=n) \end{aligned}$$

et Y et X suivent bien la même loi.

(5) On simule X par inversion à partir de la loi uniforme et la formule donnée ci-dessus.

```
function y=X( )
y=floor(2/(3^(1-rand( ))-1))
endfunction
```

Exercice 7* : Un modèle d'action paradoxal

Une action vaut initialement $X_0 = 1$ euros. A chaque instant $n \geq 1$, sa valeur est multipliée par une quantité aléatoire Z_n. On suppose que les variables aléatoires (Z_n) sont indépendantes et de même loi

$$P(Z_n = 1 + a) = P(Z_n = 1 - a) = \frac{1}{2},$$

pour une certaine valeur $a \in]0; 1[$. On note X_n la valeur de l'action à l'instant n. Ainsi, on a, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$X_n = \prod_{k=1}^{n} Z_k.$$

On pose $Y_k = \ln(Z_k)$ et on définit $\overline{Y}_n$ la moyenne empirique des Y_k.

(1) Par indépendance des variables Z_i et vu qu'elles suivent toutes la même loi, elles ont toutes pour espérance $E(Z_1)$,

$$E(X_n) = E\left(\prod_{k=1}^{n} Z_k\right) = \prod_{k=1}^{n} E(Z_k) = E(Z_1)^n = \left(\frac{1+a}{2} + \frac{1-a}{2}\right)^n = 1.$$

(2) Par le théorème de transfert,

$$E(Y_k) = E\left(\ln(Z_k)\right) = \frac{\ln(1+a)}{2} + \frac{\ln(1-a)}{2} = \frac{\ln(1-a^2)}{2}.$$

Par linéarité de l'espérance,

$$E(\overline{Y}_n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} E(Y_k) = E(Y_1) = \frac{\ln(1-a^2)}{2}$$

Toujours par le théorème de transfert,

$$E(Y_k^2) = \frac{(\ln(1+a))^2 + (\ln(1-a))^2}{2}.$$

Et König-Huyguens donne

$$\begin{aligned}
V(Y_k) &= E(Y_k^2) - E(Y_k)^2 = \frac{(\ln(1+a))^2 + (\ln(1-a))^2}{2} - \left(\frac{\ln(1-a^2)}{2}\right)^2 \\
&= \frac{2(\ln(1+a))^2 + 2(\ln(1-a))^2 - (\ln(1+a))^2 - (\ln(1-a))^2 - 2\ln(1+a)\ln(1-a)}{4} \\
&= \frac{(\ln(1+a) - \ln(1-a))^2}{4} \\
&= \frac{1}{4}\left(\ln\left(\frac{1+a}{1-a}\right)\right)^2
\end{aligned}$$

Par le lemme des coalitions, les variables $Y_i = \ln(Z_i)$ sont indépendantes, et donc, par propriétés de la variance

$$\begin{aligned}
V(\overline{Y}_n) &= \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} V(Y_k) = \frac{1}{n}V(Y_1) \\
&= \frac{1}{4n}\left(\ln\left(\frac{1+a}{1-a}\right)\right)^2.
\end{aligned}$$

(3) Observons que $E(\overline{Y}_n) = -2\delta$ puis que

$$\begin{aligned} P(Y_1 + Y_2 + ... + Y_n \geq -n\delta) &= P(\overline{Y}_n \geq -\delta) \\ &= P(\overline{Y}_n - E(\overline{Y}_n) \geq \delta) \\ &\leq P\left(|Y_n - E(\overline{Y}_n)| \geq \delta\right) \\ &\leq \frac{V(\overline{Y}_n)}{\delta^2} = \frac{4}{n(\ln(1-a^2))^2}\left(\ln\left(\frac{1+a}{1-a}\right)\right)^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0, \end{aligned}$$

où la dernière inégalité provient de l'application de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev. Par encadrement,

$$\lim_{n\to+\infty} P(Y_1 + Y_2 + ... + Y_n \geq -n\delta) = 0.$$

(4) Soit $\varepsilon > 0$. Commençons par voir que

$$X_n = \exp(n\overline{Y}_n).$$

Ainsi,

$$[X_n \geq \varepsilon] = [n\overline{Y}_n \geq \ln(\varepsilon)] = [Y_1 + Y_2 + ... + Y_N \geq \ln(\varepsilon)].$$

Or, comme $-n\delta \to -\infty$, il existe un n_0 à partir duquel,

$$-n\delta < \ln(\varepsilon), \qquad n \geq n_0.$$

Mais alors,

$$[Y_1 + Y_2 + ... + Y_N \geq \ln(\varepsilon)] \subset [Y_1 + Y_2 + ... + Y_N \geq -n\delta]$$

et donc

$$\forall n \geq n_0, \qquad P(X_n \geq \varepsilon) \leq P(Y_1 + Y_2 + ... + Y_n \geq -n\delta).$$

(5) Le passage à la limite dans l'inégalité précédente donne

$$\forall \varepsilon > 0, \qquad \lim_{n\to+\infty} P(X_n \geq \varepsilon) = 0.$$

Le comportement de (X_n) parait alors "paradoxal", son espérance est constante égale à 1, alors que lorsque n devient grand, X_n vaut très probablement 0.

(6) **Une explication.**

(a) X_n est une variable finie et admet donc une variance. Un petit coup de Bienaymé-Tchebychev permet de voir que

$$\begin{aligned} P\left(X_n \leq \frac{1}{2}\right) &= P\left(X_n - 1 \leq -\frac{1}{2}\right) \\ &\leq P\left(|X_n - E(X_n)| \geq \frac{1}{2}\right) \\ &\leq \frac{V(X_n)}{(1/4)} = 4V(X_n). \end{aligned}$$

(b) Si $V(X_n)$ tendait vers 0, le principe de comparaison donnerait que $P(X_n \leq 1/2)$ tend aussi vers 0, étant en contradiction avec le résultat démontré ci-avant (en prenant $\varepsilon = 1/2$). En particulier, les valeurs de X_n ne se concentrent pas autour de son espérance...

(c) C'est un calcul. On commence par le moment d'ordre 2. Par le lemme des coalitions, les variables Z_k^2 sont indépendantes. Ainsi,

$$\begin{aligned} E(X_n^2) &= E\left(\left(\prod_{k=1}^n Z_k\right)^2\right) = E\left(\prod_{k=1}^n Z_k^2\right) \\ &= \prod_{k=1}^n E(Z_k^2) = E(Z_1^2)^n \\ &= \left(\frac{(1+a)^2}{2} + \frac{(1-a)^2}{2}\right)^n = (1+a^2)^n \end{aligned}$$

Par König-Huyguens, on a bien

$$V(X_n) = E(X_n^2) - E(X_n)^2 = (1+a^2)^n - 1$$

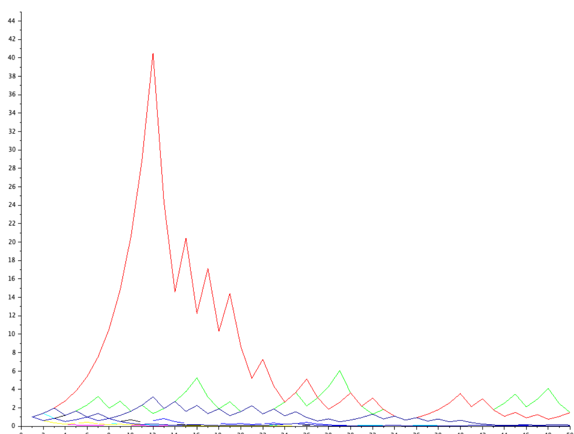
ce qui tend vers $+\infty$ car $1 + a > 1$.

(7) (`SciLab`).

(a) Sans difficulté, on complète avec la définition de Z.

```
function y=Z(a)
    if rand()<1/2 then
        y=1+a
    else
        y=1-a
    end
endfunction
```

(b) On représente, pour $a = 0.4$ (ce qui veut dire qu'à chaque instant l'action augmente ou baisse aléatoire de 40%), 10 trajectoires des 50 premiers termes de (X_n). La figure donne



On voit qu'ici, 9 trajectoires sur 10 sont très proches de 0 et une seule prend des grandes valeurs qui à elles seules semblent "compenser" et permettre d'obtenir une moyenne à 1...

Exercice 8* : Hyperplans de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

On considère un sous-espace H de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de dimension $p = n^2 - 1$. (*Un tel sous-espace est appelé hyperplan.*) On note $(A_1, ..., A_p)$ une base de H et I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Le but est de montrer que H contient au moins une matrice inversible. *On suppose donc que H ne contient aucune matrice inversible.*

(1) Comme la famille $(A_1, A_2, ..., A_p, I_n)$ est composée de $p+1 = n^2$ vecteurs de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, il suffit qu'elle soit libre pour former une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soient donc $\alpha_1, ..., \alpha_p, \beta \in \mathbb{R}$ tels que

$$\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + ... + \alpha_p A_p + \beta I_n = 0.$$

Si $\beta \neq 0$, alors on peut écrire

$$I_n = -\frac{1}{\beta}(\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + ... + \alpha_p A_p) \in \mathrm{Vect}(A_1, ..., A_p) = H$$

ce qui n'est pas possible car I_n est inversible et cela contredit donc l'hypothèse. Donc $\beta = 0$. Mais alors

$$\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + ... + \alpha_p A_p = 0 \Longleftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_p = 0$$

car $(A_1, .., A_P)$ base de H et donc est en particulier une famille libre. On a bien montré le résultat désiré.

(2) Soit N une matrice nilpotente, c'est à dire pour laquelle il existe un entier $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $N^{k-1} \neq 0$ et $N^k = 0$.

(a) Si N est nilpotente, alors X^k est un polynôme annulateur de N. Sa seule racine et donc seule valeur propre possible de N est 0. Comme N est alors clairement non inversible (sinon on aurait l'existence de N^{-1} et en multipliant $N^k = 0$ par N^{-1} on obtiendrait $N^{k-1} = 0$), 0 est bien l'unique valeur propre de N. Comme N n'est pas identiquement nulle, le sous-espace propre associé à 0, le noyau de N, n'est pas égal à tout l'espace et N n'est donc pas diagonalisable.

(b) Comme $(A_1, ..., A_p, I_n)$ base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on peut trouver des coefficients $\alpha_1, ..., \alpha_p, \lambda \in \mathbb{R}$ tels que

$$N = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + ... + \alpha_p A_p + \lambda I_n = B + \lambda I_n,$$

où on a noté

$$B = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + ... + \alpha_p A_p \in \mathrm{Vect}(A_1, ..., A_p) = H.$$

(c) De l'écriture précédente, on a $N - \lambda I_n = B$. Or $B \in H$ et H ne contient aucune matrice inversible. Donc $N - \lambda I_n$ est non inversible ce qui veut dire que λ est une valeur propre de N.

(d) D'après ce qui précède, $\lambda = 0$ et donc

$$N = B \in H.$$

La matrice N étant nilpotente quelconque, il suit que H contient toutes les matrices nilpotentes.

(3) Cette question est plus difficile. Elle nécessite d'avoir en tête des matrices qui sont nilpotentes. On pense par exemple aux matrices triangulaires avec une rangée de 1 sur une des sur-diagonales ou sous-diagonales. Écrivons par exemple

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & .... & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & ... & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 0 & .... & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & ... & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & .... & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & ... & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Les deux matrices du membre de gauche sont nilpotentes donc des éléments de H. La matrice du membre de droite est donc également, comme somme de matrices de H, une matrice de H. Or, elle est inversible (elle est de rang n, c'est une permutation de la matrice identité). Ainsi, on a H qui contient une matrice inversible, ce qui contredit l'hypothèse de départ.

On peut donc affirmer qu'on a montré que tout *hyperplan* de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ contenait (au moins) une matrice inversible.