Devoir de rentrée (a.k.a DS 0)

Lundi 7 Septembre
Durée : 2 heures

Exercice 1

Partie I - Une loi exponentielle et une suite

(1) **Une loi exponentielle**.
Soit X une variable aléatoire réelle qui suit une loi exponentielle de paramètre 1.

(a) Donner une densité de X et rappeler les valeurs de l'espérance et de la variance de la variable aléatoire X.
(b) Redémontrer que la fonction de répartition de la variable aléatoire X est la fonction F définie pour tout réel x par :

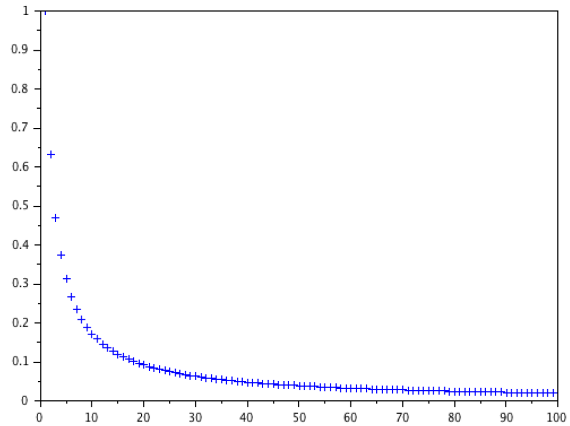
$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ 1 - e^{-x} & \text{si } x \geqslant 0. \end{cases}$$

(2) **Étude d'une suite**.
On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par $u_1 = 1$ et pour tout entier naturel non nul n par : $u_{n+1} = F(u_n)$.

(a) Montrer que pour tout réel x : $e^x \geqslant x + 1$.
Montrer que l'égalité a lieu **si et seulement si** $x = 0$.
(b) Montrer que pour tout entier naturel n, on a : $u_n > 0$.
(c) Recopier et compléter le programme SciLab suivant qui permet de représenter les cent premiers termes de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$:

```
U = zeros(1,100)
U(1) = 1
for n = 1 : 99
        U(n+1) = _________________
end
plot(U,"+")
```

(d) Le programme précédent complété permet d'obtenir la représentation graphique suivante :



Quelle conjecture pouvez-vous émettre sur la monotonie et la limite de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$?

(e) Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$.
(f) En déduire que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente et déterminer sa limite.
(g) À l'aide de la question 2(a), montrer successivement que pour tout entier naturel n non nul :

$$u_{n+1} \geqslant \frac{u_n}{1+u_n} \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{u_{n+1}} \leqslant 1 + \frac{1}{u_n}.$$

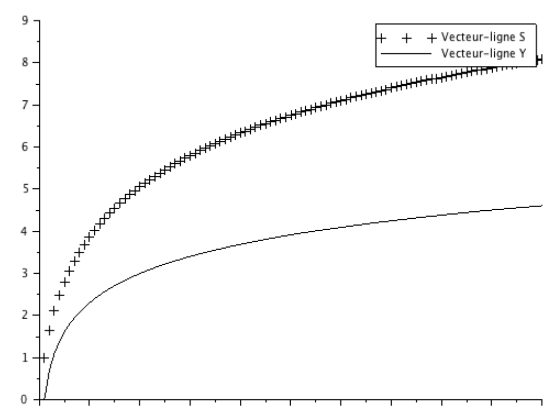
(h) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n non nul :

$$u_n \geqslant \frac{1}{n}.$$

(i) On modifie le programme écrit en question 2(c) en remplaçant la dernière ligne par :

```
X = 1: 100
S = cumsum(U)
Y = log(X)
plot2d(X,S)
plot2d(X,Y)
```

Le programme ci-dessus permet d'obtenir la représentation graphique suivante :



Que représente le vecteur-ligne `S` ?
Quelle conjecture pouvez-vous émettre sur la nature de la série de terme général u_n ?

(j) A l'aide de la question 2(h), établir la nature de la série de terme général u_n.

Partie II - Une fonction et une variable aléatoire à densité

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ xe^{-x} & \text{si } x \geqslant 0. \end{cases}$$

(3) **Étude de la fonction** g.

(a) Montrer que g est dérivable sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$. Est-elle continue en 0 ? Est-elle dérivable en 0 ?

(b) Donner le tableau de variations de g sur $[0, +\infty[$ (on précisera la limite de g en $+\infty$).

(c) Étudier la convexité de g sur $]0, +\infty[$.

(d) Donner l'allure de la courbe représentative de la fonction g sur $\mathbb{R}$.
On précisera avec soin cette allure au voisinage du point d'abscisse 0 de la courbe. On rappelle que $e^{-1} \approx 0,37$.

(4) **Étude de variables aléatoires**.

(a) Montrer que la fonction g est une densité de probabilité.

On note Y une variable aléatoire dont une densité est la fonction g, et dont la fonction de répartition est notée G.

(a) Sans calcul, justifier que la fonction G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

(b) Montrer que pour tout réel x,

$$G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ 1 - e^{-x}(1 + x) & \text{si } x \geqslant 0. \end{cases}$$

(c) Montrer que la variable aléatoire Y admet une espérance, que l'on calculera.

(5) On considère la variable aléatoire $Z = e^Y$.

(a) Déterminer la fonction de répartition notée H de la variable aléatoire Z.

(b) En déduire que Z est une variable aléatoire à densité et déterminer une densité de Z.

(c) La variable aléatoire Z admet-elle une espérance ?

Exercice 2

On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(1) (a) Déterminer $(A - I)^2$.

(b) En déduire que A est inversible et écrire A^{-1} comme combinaison linéaire de I et A.

(2) On pose $A = N + I$.

(a) Exprimer pour tout entier naturel n, la matrice A^n comme combinaison linéaire de I et N, puis l'écrire comme combinaison linéaire de I et A.

(b) Vérifier que l'expression précédente est aussi valable pour $n = -1$.

(c) **Bonus.** Montrer qu'elle est en fait valide pour tout $n \in \mathbb{Z}$.