ECE 2 - Année 2020-2021
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
`http://frederic.gaunard.com`

Devoir de rentrée (a.k.a DS 0)

Lundi 7 Septembre
Solution

Exercice 1

Cet exercice est extrait du sujet **ECRICOME 2015** et fut également posé en ECE1, lors du deuxième concours blanc de Juin 2020. Ce corrigé est l'oeuvre d'un collègue, mis à disposition sur le site de l'APHEC.

I. Une loi exponentielle et une suite

(1) **Une loi exponentielle**

(a) Une densité de X est donnée par la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ e^{-x} & \text{si} \quad x \geqslant 0 \end{cases}$$

On sait, d'après le cours, que $E(X) = 1$ et $V(X) = 1$.

(b) $\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t$.

- Premier cas : si $x < 0$, $F(x) = 0$.
- Deuxième cas : si $x \geqslant 0$,

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{0} f(t)\mathrm{d}t + \int_{0}^{x} f(t)\mathrm{d}t = \int_{0}^{x} e^{-t}\mathrm{d}t = \left[-e^{-t}\right]_0^x = 1 - e^{-x}.$$

Au final,

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ 1 - e^{-x} & \text{si} \quad x \geqslant 0 \end{cases}$$

(2) **Etude d'une suite**

(a) <u>Première méthode :</u>
La fonction exponentielle est convexe sur $\mathbb{R}$ et $y = x + 1$ est l'équation de sa tangente au point d'abscisse 0. Ainsi, la courbe représentative de la fonction exponentielle est située au-dessus de la droite d'équation $y = x + 1$ avec en seul point commun le point d'abscisse 0. Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geqslant x + 1$ avec égalité si $x = 0$.
Cette méthode ne permet pas de démontrer l'unicité du point d'intersection... il faut donc soit convoquer un argument de stricte convexité (hors programme) soit choisir la deuxième méthode

<u>Deuxième méthode :</u>

Posons $\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = e^x - (x+1)$. On a $h'(x) = e^x - 1$ donc :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
h	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Ainsi, $h(x) \geqslant 0$ avec égalité si et seulement si $x = 0$.

(b) Raisonnons par récurrence :
- Initialisation : $u_1 = 1 > 0$ donc la propriété est vérifiée au rang 1.
- Hérédité : supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $u_n > 0$. On a alors : $-u_n < 0 \Rightarrow e^{-u_n} < 1 \Rightarrow 1 - e^{-u_n} > 0 \Rightarrow u_{n+1} > 0$.

<u>Bilan</u>: $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n > 0$.

(c)
```
U=zeros(1,100)
U(1)=1
for n=1:99
        U(n+1)=1-exp(U(n))
end
plot(U,"+")
```

(d) On peut conjecturer que la suite (u_n) est décroissante et tend vers 0.

(e) Soit $n \geqslant 1$. $u_{n+1} - u_n = 1 - e^{-u_n} - u_n$.
Or d'après la question a), $e^{-u_n} \geqslant -u_n + 1 \Rightarrow 1 - e^{-u_n} - u_n < 0$ autrement dit $u_{n+1} - u_n < 0$.
Ainsi, la suite (u_n) est décroissante.

(f) La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0 donc elle converge vers une limite $\ell \geqslant 0$, F étant continue sur $\mathbb{R}$ (en tant que fonction de répartition d'une variable à densité), ℓ vérifie:

$$\ell = F(\ell) \Leftrightarrow \ell = 1 - e^{-\ell} \Leftrightarrow h(-\ell) = 0 \Leftrightarrow \ell = 0$$

toujours d'après la question a).
<u>Bilan</u>: (u_n) converge et $\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = 0}$.

(g) Soit n un entier naturel non nul.
$u_{n+1} = 1 - e^{-u_n} = 1 - \dfrac{1}{e^{u_n}}$.
Or d'après la question 2)a), $e^{u_n} \geqslant u_n + 1 \Rightarrow \dfrac{1}{e^{u_n}} \leqslant \dfrac{1}{u_n + 1}$.
Puis, $1 - \dfrac{1}{e^{u_n}} \geqslant 1 - \dfrac{1}{u_n+1} = \dfrac{u_n}{u_n+1}$.
Ainsi, $\boxed{u_{n+1} \geqslant \dfrac{u_n}{u_n+1}}$.
Puis, $\dfrac{1}{u_{n+1}} \leqslant \dfrac{u_n+1}{u_n} = 1 + \dfrac{1}{u_n}$.

(h) Raisonnons par récurrence :
- Initialisation : $u_1 = 1 \geqslant 1$

- Hérédité : Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $u_n \geqslant \frac{1}{n}$. On a alors $\frac{1}{u_n} \leqslant n$. Ainsi, puisque $\frac{1}{u_{n+1}} \leqslant 1 + \frac{1}{u_n}$, on a :
  $\frac{1}{u_{n+1}} \leqslant 1 + n$ puis $u_{n+1} \geqslant \frac{1}{n+1}$

<u>Bilan :</u> $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geqslant \frac{1}{n}$.

(i) `S=cumsum(U)` donc les coordonnées de S sont $(u_1, u_1+u_2, u_1+u_2+u_3, \dots, \sum_{k=1}^{100} u_k)$ autrement dit les 100 première sommes partielles de la série de terme général u_n.
Ainsi on peut conjecturer que la suite des sommes partielles tend vers $+\infty$ autrement dit que la série de terme général u_n diverge.

(j)
- $\forall n \geqslant 1, u_n \geqslant \frac{1}{n}$.
- $\forall n \geqslant 1, u_n \geqslant 0$ et $\frac{1}{n} \geqslant 0$
- $\sum \frac{1}{n}$ diverge en tant que série de Riemann avec $\alpha = 1$ (série harmonique).

Ainsi, d'après les critères de comparaison des séries à termes positifs, $\sum u_n$ diverge.

II. Une fonction et une variable à densité

(1) **Etude de la fonction g**

(a)
- g est dérivable sur $]-\infty; 0[$ en tant que fonction constante.
- g est dérivable sur $]0; +\infty[$ en tant que produit de fonctions dérivables.

• Etude de la continuité de g en 0:
$\lim_{x \to 0^-} g(x) = 0 = g(0)$ donc g est continue en 0.
• Etude de la dérivabilité de g en 0 :
Si $x \geqslant 0$: $\frac{g(x)-g(0)}{x-0} = e^{-x}$ donc $\lim_{x \to 0^+} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = 1$.
Si $x < 0$: $\frac{g(x)-g(0)}{x-0} = 0$ donc $\lim_{x \to 0^-} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = 0$.
Ainsi, $\lim_{x \to 0^+} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} \neq \lim_{x \to 0^-} \frac{g(x)-g(0)}{x-0}$ donc g n'est pas dérivable en 0.

(b) $\forall x \geqslant 0, g'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = (1-x)e^{-x}$. Ainsi,

x	0	1	$+\infty$
signe de $g'(x)$	$+$	0	-
variations de g	0 $\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$ 0

$\lim_{x \to +\infty} xe^{-x} = 0$ car $x = o(e^x)$ au voisinage de $+\infty$.

(c) g est de classe C^2 sur $[0; +\infty[$ et $\forall x \geqslant 0, g''(x) = -e^{-x} - (1-x)e^{-x} = (x-2)e^{-x}$. Ainsi,

x	0	2	$+\infty$
signe de $g''(x)$	$+$	0	-

Ainsi, g est convexe sur $[0; 2]$ et concave sur $[2; +\infty[$.

(2) **Etude de variables aléatoires**

(a)
- g est continue sur $\mathbb{R}$.
- $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) \geqslant 0$.
- $\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)dt = \int_0^{+\infty} te^{-t}dt = E(X) = 1$ où X désigne la variable aléatoire de la partie I qui suit une loi exponentielle de paramètre 1!!

<u>Bilan :</u> g est une densité de probabilité.

(b) G est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ car g est continue sur $\mathbb{R}$.

(c) $\forall x \in \mathbb{R}, G(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} g(t)dt$.

- Premier cas : si $x < 0$, $G(x) = 0$
- Deuxième cas : si $x \geqslant 0$, $G(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} g(t)dt = \int_{0}^{x} te^{-t}dt$. Posons :

  $\begin{array}{ll} u(t) = t & u'(t) = 1 \\ v(t) = -e^{-t} & v'(t) = e^{-t} \end{array}$ u et v sont de classe C^1 sur $[0; +\infty[$ donc à l'aide d'une intégration par parties,

  $G(x) = \left[-te^{-t}\right]_0^x - \displaystyle\int_0^x (-e^{-t})dt = -xe^{-x} - \left[e^{-t}\right]_0^x = -xe^{-x} - e^{-}x + 1 = 1 - e^{-x}(x+1)$.

Bilan : $\boxed{G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ 1 - e^{-x}(x+1) & \text{si} \quad x \geqslant 0 \end{cases}}$

(d) Y admet une espérance ssi $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} tg(t)dt$ converge absolument. Or

$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |tg(t)|dt = \int_0^{+\infty} tg(t)dt$. Or, $\displaystyle\int_0^{+\infty} tg(t)dt = \int_0^{+\infty} t^2e^tdt = E(X^2) = V(X) + (E(X))^2 = 2$. Ainsi, Y admet une espérance et $E(Y) = 2$.

(3) (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. $H(x) = \mathrm{P}(Z \leqslant x)$.

- Premier cas : si $x \leq 0$.
  Alors $H(x) = 0$
- Deuxième cas : si $x > 0$
  Alors $H(x) = P(Y \leqslant \ln(x)) = G(\ln(x)) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \ln(x) \leqslant 0 \\ 1 - e^{-\ln(x)}(1 + \ln(x)) & \text{si} \quad \ln(x) \geqslant 0 \end{cases}$

  Ainsi, $\boxed{H(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leqslant 1 \\ 1 - \dfrac{1}{x}(1 + \ln(x)) & \text{si} \quad x \geqslant 1 \end{cases}}$

(b)
- H est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ et $\displaystyle\lim_{x \to 1^+} H(x) = \lim_{x \to 1^-} H(x) = H(1) = 0$. Ainsi, H est continue sur $\mathbb{R}$.
- H est C^1 sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 1.

Ainsi, Z est une variable à densité dont une densité est $h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 1 \\ \dfrac{\ln(x)}{x^2} & \text{si} \quad x \geqslant 1 \end{cases}$

(c) Z admet une espérance ssi $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} th(t)dt$ converge absolument autrement dit ssi $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t}dt$ converge.

Soit $A \geqslant 1$, $\displaystyle\int_1^A \frac{\ln(t)}{t}dt = \left[\frac{1}{2}(\ln(t))^2\right]_1^A = \frac{1}{2}(\ln(A))^2$.

Et $\displaystyle\lim_{A \to +\infty} \frac{1}{2}(\ln(A))^2 = +\infty$ donc Z n'admet pas d'espérance.

Exercice 2

Cet exercice, extrait de **EDHEC 2019** fait partie de la planche d'exercices de révisions de rentrée. On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(1) (a) $A - I = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ et, sans difficulté : $(A-I)^2 = 0$.

(b) On a $A^2 - 2A + I = O_3$ donc $I = -A^2 + 2A = A(-A+2I)$. On sait que si $AB = I$ alors A est inversible et $A^{-1} = B$, donc A est inversible et $A^{-1} = -A + 2I$.

(2) (a) N et I commutent, donc on peut développer $(N+I)^n$ avec la formule du binôme. De plus, comme $N^2 = 0$, on a **par une récurrence immédiate** (et cet argument est au moins à citer) que $N^k = 0$ pour $k \geq 2$. Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$A^n = (N+I)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k = \binom{n}{0} N^0 + \binom{n}{1} N^1 = I + nN = I + n(A-I) = (1-n)I + nA.$$

(b) Pour $n = -1$, $(1-(-1))I - A = 2I - A = A^{-1}$ d'après la première question de l'exercice. La formule est toujours valable.

(c) **Bonus.** On montre qu'elle est en fait valable pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Soit $n \in \mathbb{Z}, n \leq -1$. On veut montrer que

$$A^n = (1-n)I + nA.$$

En écrivant $n = -m$, où $m \in \mathbb{N}^*$, on voit que $A^n = A^{-m} = (A^m)^{-1}$. Or on connait A^m. Il faut donc montrer que $(1-n)I + nA = (1+m)I - mA$ est l'inverse de A^m ou de manière équivalente que

$$((1+m)I - mA) \cdot ((1-m)I + mA) = I.$$

Mais,

$$\begin{aligned} ((1+m)I - mA) \cdot ((1-m)I + mA) &= (1-m^2)I + [(1+m)m - m(1-m)]A - m^2A^2 \\ &= (1-m^2)I + 2m^2A - m^2(-I+2A) \\ &= I \end{aligned}$$

et on a bien ce qu'on voulait.