Devoir surveillé n°1 - *sujet A*

Lundi 28 Septembre
Durée : 4 heures

Échauffement

(1) Obtenir le développement limité à l'ordre 2 en 0 de

$$(i)\ \frac{e^x+e^{-x}}{2}, \qquad (ii)\ \sqrt{1+2x}+\sqrt{1-2x}.$$

(2) En déduire la valeur de

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)}{\sqrt{1+2x}+\sqrt{1-2x}-2}.$$

Exercice 1

On considère la fonction f et la suite (u_n) définies par

$$f(x)=\sqrt{\frac{1+x}{2}}, \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{rcl} u_0 & \geq & 0 \\ u_{n+1} & = & f(u_n) \end{array}\right.$$

(1) **Étude de** f.

- (a) Déterminer le domaine de définition de f et ses limites aux bords de ce domaine. On précisera la nature d'éventuelles branches infinies.
- (b) Préciser le développement limité de f en 0 à l'ordre 2. Expliciter l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en 0.
- (c) Étudier les variations de f et dresser son tableau de variations.
- (d) Résoudre les équation $f(x)=x$ et $f(x)>x$.
- (e) Tracer la courbe représentative de f et les éléments de l'étude (tangentes, asymptotes éventuelles...).

(2) **Dans cette question** on suppose que $u_0=0$.

- (a) Vérifier que (u_n) est bien définie.
- (b) Montrer que la suite (u_n) est croissante et majorée par 1.
- (c) Montrer que (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

(3) Dans **toute la suite de l'exercice** on suppose que $u_0 > 1$.

(a) Vérifier que (u_n) est bien définie.
(b) Montrer que la suite (u_n) est monotone.
(c) Étudier la convergence de la suite (u_n) et déterminer sa limite.

(4) **Étude de fonctions auxiliaires.** On définit les fonctions ch et sh par

$$\mathrm{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad \text{et} \qquad \mathrm{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

(a) Exprimer la dérivées des fonctions ch et sh en fonction de ch et sh.
Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{ch}(x) > 0$.
Calculer $\mathrm{sh}(0)$ et déterminer le signe de $\mathrm{sh}(x)$.

(b) En déduire qu'il existe un unique réel $\alpha \geq 0$ tel que $\mathrm{ch}(\alpha) = u_0$.

(c) On considère le programme `SciLab` suivant

```
u0=3/2
function y=ch(x)
    y=(exp(x)+exp(-x))/2
endfunction
a=0
b=2
c=(a+b)/2
while b-a > 10^{-3}
    if (ch(a)-u0)*(ch(c)-u0) <0 then
        b=c
    else
        a=c
    end
    c=(a+b)/2
end
disp(c)
```

(i) Que fait ce programme? Comment s'appelle ce type de programme?
(ii) Pourquoi a-t-on pris $b = 2$?

(5) (a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$2\left(\mathrm{ch}\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2 - 1 = \mathrm{ch}(x).$$

(b) En déduire que pour tout entier n

$$u_n = \mathrm{ch}\left(\frac{\alpha}{2^n}\right).$$

(c) Montrer que

$$\mathrm{ch}(x) - 1 = 2\left(\mathrm{sh}\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2.$$

(d) Calculer $\mathrm{sh}'(0)$.
(e) En déduire les équivalences suivantes

$$\mathrm{sh}(x) \underset{x\to 0}{\sim} x, \quad \text{et} \quad \mathrm{ch}(x) - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{2}.$$

(f) En déduire un équivalent de $(u_n - 1)$ quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 2

Une urne contient initialement une boule blanche et une boule noire. On effectue une succession de tirages d'une boule dans cette urne. Après chaque tirage, on remet la boule tirée dans l'urne, et on rajoute dans l'urne une boule de couleur opposée à celle qui vient d'être tirée.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note X_k le nombre de boules blanches présentes dans l'urne juste après le $k-$ième tirage. En particulier, on a $X_0 = 1$.

On introduit aussi, pour $i \in \mathbb{N}^*$, les évènements B_i (resp. N_i) correspondant à l'obtention d'une boule blanche (resp. noire) lors du $i-$ème tirage.

(1) Compléter le programme SciLab ci-dessous afin qu'il simule la variable X_n.

```
function y=X(n)
    nB=1
    nN=1
    for k=1:n
        if ........................ then
            nN=nN+1
        else
            ........................
        end
    end
    y=.............................
endfunction
```

(2) Déterminer la loi de X_1. Donner son espérance et sa variance. (*On pourra utiliser les évènements B_1 et N_1 pour rédiger la réponse.*)

(3) (a) Justifier soigneusement que la loi de X_2 est donnée par :

$$\mathbb{P}\left([X_2 = 1]\right) = \frac{1}{6}, \quad \mathbb{P}\left([X_2 = 2]\right) = \frac{2}{3}, \quad \mathbb{P}\left([X_2 = 3]\right) = \frac{1}{6}$$

(b) En déduire la valeur de $E(X_2)$.

(c) Représenter précisément, en justifiant la réponse, la figure que l'on peut s'attendre à ce que SciLab affiche à l'exécution des instructions suivantes

```
U=zeros(1, 1000)
for k=1:1000
    U(k)=X(2)
end
T=tabul(U, 'i')
bar(T(:,1), T(:, 2)/1000)
```

(4) Préciser l'ensemble $X_k(\Omega)$ des valeurs que peut prendre X_k.

(5) Soient $i \in \mathbb{N}^*$ et $j \in X_k(\Omega)$. En distinguant trois cas, déterminer

$$\mathbb{P}_{[X_k=j]}\left([X_{k+1} = i]\right).$$

(6) Déduire de ce qui précède que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall i \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}([X_{k+1} = i]) = \frac{i}{k+2}\,\mathbb{P}([X_k = i]) + \frac{3+k-i}{k+2}\,\mathbb{P}([X_k = i-1]) \qquad (*)$$

(7) À l'aide de la formule (*) déterminer la loi de X_3.

(8) (a) Montrer, par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$, que

$$\mathbb{P}([X_k = 1]) = \frac{1}{(k+1)!}.$$

(b) Montrer de même que

$$\mathbb{P}([X_k = k+1]) = \frac{1}{(k+1)!}.$$

(c) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose : $a_k = (k+1)! \times \mathbb{P}([X_k = 2])$.
Exprimer a_{k+1} en fonction de a_k et de k.
Montrer que la suite (b_k) définie, pour $k \in \mathbb{N}$, par $b_k = a_k + k + 2$, est géométrique.
En déduire alors que :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}([X_k = 2]) = \frac{2^{k+1} - k - 2}{(k+1)!}$$

(9) (a) À l'aide de la formule (*), montrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ E(X_{k+1}) = \frac{k+1}{k+2}E(X_k) + 1$$

(b) Déduire de ce qui précède que :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ E(X_k) = \frac{k+2}{2}$$

Exercice 3

Dans tout l'exercice, on désigne par K la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par $K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

et on note $\mathcal{E}$ l'ensemble

$$\mathcal{E} = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \ :\ MK = KM = M\}.$$

(1) Calculer K^2. En déduire que K est inversible et expliciter K^{-1}.

(2) (a) Montrer que $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel.
(b) Montrer par l'absurde qu'aucune matrice de E n'est inversible.

(3) On introduit les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Montrer que la famille (A, B, C, D) est une famille libre de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

(4) Soit $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathcal{E}$.

(a) Montrer que $k = g = c = a$, $h = b$ et $f = d$, puis en déduire une famille génératrice de $\mathcal{E}$.
(b) Retrouver le fait que les matrices de $\mathcal{E}$ ne sont pas inversibles.
(c) Quelle est la dimension de $\mathcal{E}$?

(5) On considère l'ensemble $\mathcal{F}$ défini par
$$\mathcal{F} = \left\{ M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \ : \ M = \begin{pmatrix} x & y & x \\ y & z & y \\ x & y & x \end{pmatrix}, \ x, y, z \in \mathbb{R} \right\}.$$
Vérifier que $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}$ et donner une base de $\mathcal{F}$.

(6) On note φ l'application de $\mathcal{F}$ dans $\mathbb{R}$ qui à toute matrice $A = (a_{i,j})$ de $\mathcal{F}$ associe le nombre :
$$\sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} (-1)^{i+j} a_{i,j},$$
(a) On note $Q = A + B$. Expliciter Q et calculer $\varphi(Q)$.

(b) Montrer que φ est une *application linéaire* de $\mathcal{F}$ dans $\mathbb{R}$, c'est à dire montrer que, pour toutes matrices $M, N \in \mathcal{F}$ et tous réels $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, on a $\varphi(\lambda M + \mu N) = \lambda\varphi(M) + \mu\varphi(N)$.

(c) Montrer que l'ensemble $\mathcal{K} = \{M \in \mathcal{F} : \ \varphi(M) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}$.

(d) Soit $M = \begin{pmatrix} x & y & x \\ y & z & y \\ x & y & x \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathcal{K}$.

Exprimer $\varphi(M)$ en fonction de x, y et z et en déduire une base de $\mathcal{K}$.