ECE 2 - Année 2020-2021
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Devoir surveillé n°1

Lundi 28 Septembre
Solution

Échauffement

(1) On rappelle les deux développements limités usuels en 0 (à l'ordre 2)

$$e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + o(u^2), \qquad \sqrt{1+u} = 1 + \frac{u}{2} - \frac{u^2}{8} + o(u^2).$$

Il suit que

$$\begin{aligned}
(i)\ \frac{e^x + e^{-x}}{2} &= \frac{1 + x + x^2/2 + o(x^2) + 1 - x + x^2/2 + o(x^2)}{2} \\
&= 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(ii)\ \sqrt{1+2x} + \sqrt{1-2x} &= 1 + x - \frac{(2x)^2}{8} + o(x^2) + 1 - x - \frac{(-2x)^2}{8} + o(x^2) \\
&= 2 - x^2 + o(x^2).
\end{aligned}$$

(2) On peut alors écrire que

$$\begin{aligned}
\frac{\ln\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)}{\sqrt{1+2x} + \sqrt{1-2x} - 2} &= \frac{\ln\left(1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)}{-x^2 + o(x^2)} \\
&= \frac{x^2/2 + o(x^2)}{-x^2 + o(x^2)} \qquad (\text{car } \ln(1+u) = u + o(u),\ u \to 0) \\
&= \frac{1/2 + o(1)}{-1 + o(1)} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Exercice 1

Cet exercice est inspiré par un exercice du sujet **ISC 1999**.

On considère la fonction f et la suite (u_n) définies par

$$f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{2}}, \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{rcl} u_0 & \geq & 0 \\ u_{n+1} & = & f(u_n) \end{array} \right.$$

(1) **Étude de f.**

(a) De la présence de la racine, on peut affirmer que f est définie et continue sur $[-1;+\infty[$. En revanche, elle n'est dérivable que sur $]-1;+\infty[$ (la fonction racine n'est pas dérivable en 0 et sa courbe admet alors une semi-tangente verticale). En $+\infty$, il est clair que

$$f(x) \sim \sqrt{\frac{x}{2}} \longrightarrow +\infty$$

et comme $\frac{f(x)}{x} \to 0$, la courbe de f admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction horizontale.

(b) On peut utiliser au choix la formule de Taylor-Young ou bien le DL usuel de $\sqrt{1+u}$ en 0. On a

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{1+x}{2}} &= \sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{1+x} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+o(x^2)\right)\\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{4}x-\frac{\sqrt{2}}{16}x^2+o(x^2).\end{aligned}$$

En particulier, la tangente à $\mathcal{C}_f$ en 0 a pour équation

$$y = \frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{4}x$$

et on peut même ajouter que (localement), $\mathcal{C}_f$ sera au dessous de celle-ci.

(c) Pour $x > -1$, on a

$$f'(x) = \frac{1/2}{2\sqrt{\frac{x+1}{2}}} = \frac{1}{4\sqrt{\frac{x+1}{2}}} > 0.$$

Ainsi, f est strictement croissante sur $]-1;+\infty[$ (et en fait sur $[-1;+\infty[$ par continuité), ce qu'on résume dans le tableau suivant

x	-1		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$+$	
f	0	$\nearrow$	$+\infty$

(d) On résout

$$\begin{aligned}f(x)=x &\iff \sqrt{\frac{x+1}{2}} = x \iff \left\{\begin{array}{rcl} x & \geq & 0\\ \frac{x+1}{2} & = & x^2\end{array}\right.\\ &\iff \left\{\begin{array}{rcl} x & \geq & 0\\ 2x^2-x-1 & = & 0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x & \geq & 0\\ x & = & \frac{1\pm3}{4}\end{array}\right.\\ &\iff x=1.\end{aligned}$$

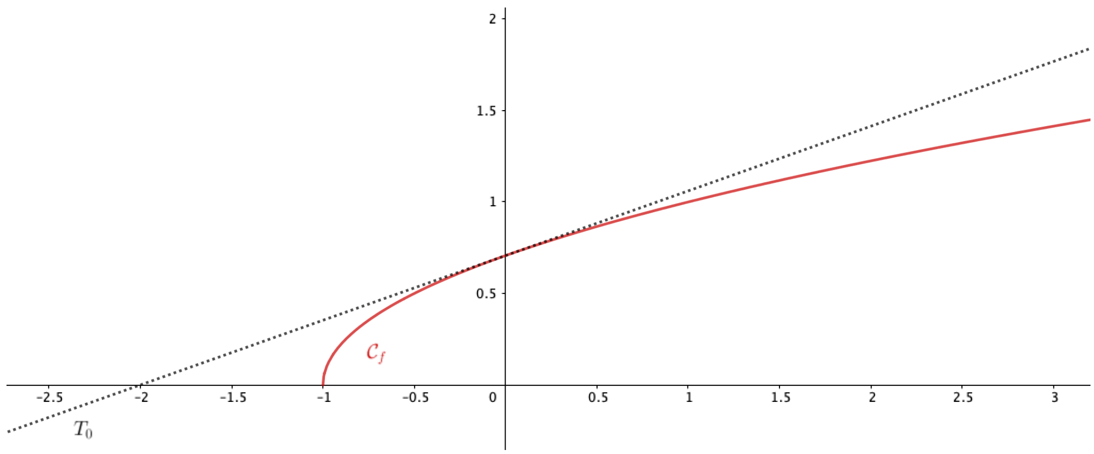
Pour l'inéquation on remarque qu'elle est automatiquement vérifiée si $x \in [-1;0]$. Pour $x \geq 0$, la bijectivité de $t \mapsto t^2$ donne

$$\begin{aligned} f(x) > x &\iff \sqrt{\frac{x+1}{2}} > x \\ &\iff -1 \leq x < 0 \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x & \geq & 0 \\ \frac{x+1}{2} & > & x^2 \end{cases} \\ &\iff -1 \leq x < 0 \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x & \geq & 0 \\ 2x^2 - x - 1 & < & 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$-1 \leq x < 0 \quad \text{ou} \quad 0 \leq x < 1$

$$\iff x \in [-1;1]$$

(e) On représente la courbe et la tangente en 0



(2) **Dans cette question** on suppose que $u_0 = 0$.

(a) Vérifier que (u_n) est bien définie revient à montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on peut calculer u_{n+1} à partir de u_n car u_n est dans l'ensemble de définition de f. On procède par récurrence.

- initialisation. Pour $n = 0$, u_0 existe et $u_0 \geq -1$.

- hérédité. Supposons que, pour un certain $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et que $u_n \geq -1$. Alors, u_n est dans l'ensemble de définition de f et $u_{n+1} = f(u_n)$ existe. De plus,

$$u_n \geq -1 \Rightarrow \frac{u_n + 1}{2} \geq 0 \Rightarrow u_{n+1} = \sqrt{\frac{u_n + 1}{2}} \geq 0 \geq -1$$

(plus généralement, c'est la croissance de f qu'on utilise; $u_n \geq -1 \Rightarrow u_{n+1} = f(u_n) \geq f(-1) = 0$) ce qui termine la récurrence.

(b) Commençons par montrer que la suite est majorée par 1. C'est encore une récurrence, que l'on rédige ici un peu plus succinctement que la précédente. $u_0 = 0 \leq 1$. Et si, pour un certain $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq 1$, alors, par croissance de f

$$u_{n+1} = f(u_n) \leq f(1) = 1$$

ce qui termine cette courte récurrence. Mais alors, tous les termes de la suite sont dans $[-1;1]$ et on peut utiliser le signe de $f(x) - x$. Plus précisément,

$$u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n$$

Or, pour tout $x \in [-1;1]$, on a $f(x) \geq x$. Avec $x = u_n$, on a donc $u_{n+1} \geq u_n$ et la suite est croissante.

(c) La suite (u_n) est croissante et majorée par 1. Par le théorème de convergence monotone, elle converge donc vers un réel, que l'on note ℓ et qui vérifie, par passage à la limite dans la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ et grâce à la continuité de f,

$$\ell = f(\ell)$$

équation déjà résolue ci-avant et qui donne $\ell = 1$.

(3) Dans **toute la suite de l'exercice** on suppose que $u_0 > 1$.

(a) Comme précédemment, on montre par récurrence que u_n est bien définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ et même que $u_n > 1$. C'est exactement la même chose que dans la partie précédente, cela repose sur la (stricte) croissance de f et le fait que $f(1) = 1$. On omet les détails ici.

(b) Tous les termes de la suite vérifient $u_n > 1$ donc $u_n \in]1;+\infty[$ intervalle dans lequel on a $f(x) < x$ ou encore $f(u_n) < u_n$ ce qui donne que (u_n) est cette fois décroissante.

(c) La suite étant décroissante et minorée par 1, le théorème de convergence monotone affirme qu'elle converge vers une certaine limite ℓ, toujours solution de $f(\ell) = \ell$, donc nécessairement égale à 1.

(4) **Étude de fonctions auxiliaires.** On définit les fonctions ch et sh par

$$\mathrm{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad \text{et} \qquad \mathrm{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

(a) Les deux fonctions ch et sh sont, comme combinaisons linéaires d'exponentielles, dérivables sur $\mathbb{R}$ et il est immédiat qu'on a

$$\mathrm{ch}'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \mathrm{sh}(x), \quad \text{et} \quad \mathrm{sh}'(x) = \mathrm{ch}(x).$$

Une somme de deux exponentielles étant strictement positive, il est aussi clair que $\mathrm{ch}(x) > 0$, et ce pour tout $x \in \mathbb{R}$. Comme $\mathrm{sh}(0) = 0$ et $\mathrm{ch}(0) = 1$, on en déduit les tableaux de variations suivants

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$\mathrm{ch}(x)$			$+$				
sh	$-\infty$	↗	0	↗			$+\infty$
$\mathrm{sh}(x)$		$-$	0	$+$			
ch	$+\infty$	↘	1	↗	u_0	↗	$+\infty$

(b) La fonction ch est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$; elle réalise donc une bijection, par le théorème de bijection, de $\mathbb{R}_+$ sur $[1;+\infty[$. En particulier, comme $u_0 > 1$, ce dernier admet un unique antécédent, noté α, par ch ou encore, il existe $\alpha \geq 0$ tel que $\mathrm{ch}(\alpha) = u_0$.

(c) (i) Ce programme donne une approximation à 10^{-3} près de α lorsque $u_0 = 3/2$, c'est un programme de recherche de solution par *dichotomie* (on découpe l'intervalle de recherche en deux à chaque étape et on continue à chercher dans la moitié qui contient la solution).

(ii) On cherche la solution entre 0 et 2 car $\mathrm{ch}(2) = (e^2 + e^{-2})/2 > e^2/2 > 3/2$, donc on sait déjà que $\alpha \in [0;2]$.

(5) (a) C'est un simple calcul...

$$\begin{aligned} 2\left(\mathrm{ch}\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2 - 1 &= 2\left(\frac{e^{x/2}+e^{-x/2}}{2}\right)^2 - 1 \\ &= 2\frac{e^x + 2 + e^{-x}}{4} - 1 = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \\ &= \mathrm{ch}(x), \end{aligned}$$

ce qu'on voulait.

(b) C'est une récurrence.

- initialisation. Pour $n = 0$, on a bien

$$\mathrm{ch}(\alpha) = u_0$$

par définition de α précédemment.

- hérédité. Supposons que, pour un certain $n \in \mathbb{N}$, on ait $u_n = \mathrm{ch}\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)$. Remarquons qu'on peut reformuler la question (5)(a) comme

$$\frac{\mathrm{ch}(x)+1}{2} = \mathrm{ch}\left(\frac{x}{2}\right)^2.$$

Il suit que

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \sqrt{\frac{u_n+1}{2}} && \text{(par définition)} \\ &= \sqrt{\frac{\mathrm{ch}\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)+1}{2}} && \text{(par HR)} \\ &= \sqrt{\mathrm{ch}\left(\frac{\alpha/2^n}{2}\right)^2} && \text{(par(5)}(a)) \\ &= \mathrm{ch}\left(\frac{\alpha}{2^{n+1}}\right), \end{aligned}$$

ce qui termine la récurrence.

(c) C'est encore un calcul facile

$$2\left(\mathrm{sh}\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2 + 1 = 2\left(\frac{e^{x/2}-e^{-x/2}}{2}\right)^2 = 2\frac{e^x + e^{-x} - 2}{4} + 1 = \mathrm{ch}(x).$$

(d) D'après ce qui précède, $\mathrm{sh}'(0) = \mathrm{ch}(0) = 1$.

(e) La formule de Taylor-Young fournit alors le DL en 0 à l'ordre 1 (ou 2) (les fonctions sont bien $\mathcal{C}^2$ au voisinage de 0)

$$\mathrm{sh}(x) = \mathrm{sh}(0) + sh'(0)x + o(x) = x + o(x), \qquad \mathrm{sh}(x) \sim x$$

et

$$\mathrm{ch}(x) = \mathrm{ch}(0) + \mathrm{ch}'(0)x + \frac{\mathrm{ch}''(0)}{2}x^2 + o(x^2) = 1 + \mathrm{sh}(0)x + \frac{\mathrm{sh}'(0)}{2}x^2 + o(x^2) = 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2), \qquad \mathrm{ch}(x) - 1 \sim \frac{x^2}{2}.$$

(f) D'après tout ce qui précède, on a (comme $\alpha/2^n \to 0,\ n \to +\infty$)

$$u_n - 1 = \operatorname{ch}\left(\frac{\alpha}{2^n}\right) - 1 \sim \frac{1}{2} \times \left(\frac{\alpha}{2^n}\right)^2,\ n \to +\infty$$

ou encore

$$u_n - 1 \sim \frac{\alpha^2}{2^{2n+1}},\ n \to +\infty.$$

Exercice 2

Cet exercice est inspiré du sujet **ECRICOME 2019**, *série S.*

(1) Lorsqu'on tire une boule blanche, le nombre de boules noires augmente de 1 et inversement. Il y a `nB+nN` boules en tout dans l'urne et la probabilité d'obtenir une blanche est alors `nB/(nB+nN)`. Il suit que le programme demandé est le suivant

```
function y=X(n)
    nB=1
    nN=1
    for k=1:n
        if  rand() <= nB/(nB+nN) then
            nN=nN+1
        else
            nB=nB+1
        end
    end
    y=nB
endfunction
```

(2) A l'issue du premier tirage, on peut avoir 1 ou 2 boules blanches dans l'urne selon qu'on a tiré une blanche ou une noire au premier tirage. Ainsi, $X_1(\Omega) = \{1; 2\}$. De plus,

$$P(X_1 = 1) = P(B_1) = \frac{1}{2} = P(N_1) = P(X_1 = 2).$$

C'est la loi uniforme sur $[\![1; 2]\!]$. En particulier, $E(X_1) = 3/2$ et $V(X_1) = \frac{2^2-1}{12} = 1/4$.

(3) (a) Après deux tirages, on a 1 , 2 ou 3 boules blanches, donc $X_2(\Omega) = \{1, 2, 3\}$. De plus,

$$P(X_2 = 1) = P(B_1 \cap B_2) = P(B_1)P_{B_1}(B_2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6},$$

$$P(X_2 = 3) = P(N_1 \cap N_2) = P(N_1)P_{N_1}(N_2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

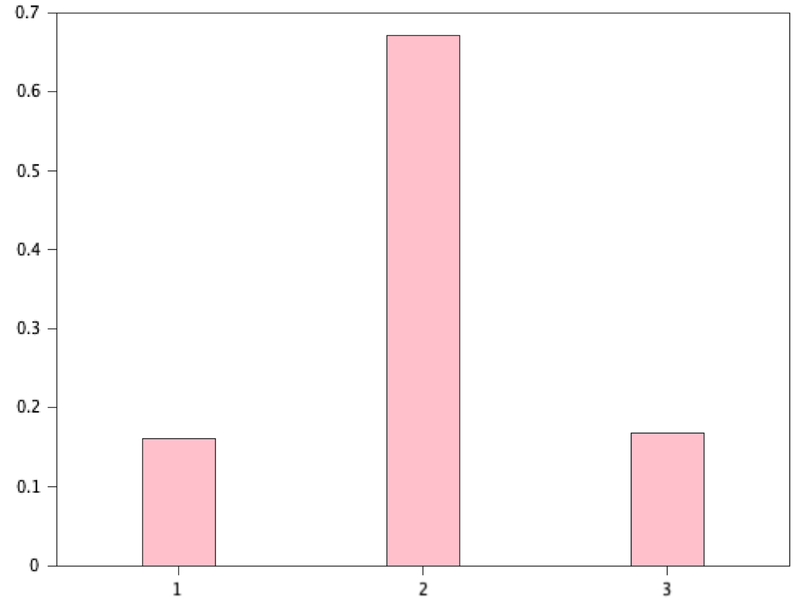
Par complémentarité,

$$P(X_2 = 2) = 1 - P(X_2 = 1) - P(X_2 = 3) = 1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{6} = \frac{2}{3}.$$

(b) Par définition,

$$E(X_2) = 1 \times P(X_2 = 1) + 2 \times P(X_2 = 2) + 3 \times P(X_2 = 3) = \frac{1}{6} + \frac{4}{3} + \frac{3}{6} = \frac{12}{6} = 2.$$

(c) Le programme donné permet de représenter le diagramme à bâtons des fréquences des valeurs observées lors de la simulation d'un échantillon de taille 1000 de X_2. On peut alors s'attendre[1] à voir des bâtons dont les hauteurs seront proches des valeurs théoriques obtenues ci-dessus. On attendait donc la figure ci-dessous



(4) À chaque tirage, le nombre de boules blanches augmente de 0 ou 1. Après k tirages, on a donc entre 1 et $k+1$ boules blanches, ainsi

$$X_k(\Omega) = [\![1; k+1]\!].$$

(5) Soient $i \in \mathbb{N}^*$ et $j \in X_k(\Omega)$. Entre deux tirages, le nombre de boules blanches est soit le même, soit augmente de 1. Ainsi, on peut déjà écrire que

$$\forall i \notin \{j; j+1\}, \qquad P_{[X_k=j]}(X_{k+1} = i) = 0.$$

Ensuite, si $i = j$, on tire à nouveau une blanche au $(k+1)-$ième tirage, sachant qu'on a j blanches dans l'urne après k tirages et donc $2+k$ boules au total dans l'urne

$$P_{[X_k=j]}(X_{k+1} = j) = P_{[X_k=j]}(B_{k+1}) = \frac{j}{2+k}.$$

De la même manière, si $i = j+1$, alors on tire une des $k+2-j$ boules noires

$$P_{[X_k=j]}(X_{k+1} = j+1) = P_{[X_k=j]}(N_{k+1}) = \frac{k+2-j}{k+2}.$$

(6) Soit $k \in \mathbb{N}$ fixé. Par la formule des probabilités totales appliquée au s.c.e $\{(X_k = n)\ n \in [\![1; k+1]\!]\}$, on a, pour $i \in [\![1; k+2]\!]$,

$$\begin{aligned} P(X_{k+1} = i) &= \sum_{n=1}^{k+1} P_{X_k=n}(X_{k+1} = i) P(X_k = n) \\ &= P_{X_k=i}(X_{k+1} = i) P(X_k = i) + P_{X_k=i-1}(X_{k+1} = i) P(X_k = i-1) \\ &= \frac{i}{k+2} P(X_k = i) + \frac{k+3-i}{k+2} P(X_k = i-1), \end{aligned}$$

ce qu'on voulait.

[1] Ceci prendra davantage de sens au cours des deux derniers chapitres de l'année

(7) On utilise la loi de X_2 et la formule précédente (avec $k = 2$) pour déterminer la loi de X_3 (en gardant à l'esprit que $X_3(\Omega) = \{1, 2, 3, 4\}$. On a

$$P(X_3 = 1) = \frac{1}{4}P(X_2 = 1) = \frac{1}{24},$$

$$P(X_3 = 2) = \frac{2}{4}P(X_2 = 2) + \frac{3}{4}P(X_2 = 1) = \frac{1}{3} + \frac{1}{8} = \frac{11}{24},$$

$$P(X_3 = 3) = \frac{3}{4}P(X_2 = 3) + \frac{2}{4}P(X_2 = 2) = \frac{1}{8} + \frac{1}{3} = \frac{11}{24}$$

et enfin

$$P(X_3 = 4) = \frac{1}{4}P(X_2 = 3) = \frac{1}{24},$$

ce qu'on peut résumer dans le tableau suivant:

i	1	2	3	4	
$P(X_3 = i)$	1/24	11/24	11/24	1/24	1

(8) (a) On procède comme demandé par récurrence.

- initialisation. Pour $k = 1$, on a $P(X_1 = 1) = 1/2 = 1/(1 + 1)!$ et la formule est vraie.

- hérédité. Supposons que, pour un certain $k \in \mathbb{N}^*$, on ait
$$P(X_k = 1) = \frac{1}{(k+1)!}.$$
Alors, par la question (6),
$$P(X_{k+1} = 1) = \frac{1}{k+2}P(X_k = 1) + 0 = \frac{1}{k+2} \times \frac{1}{(k+1)!} = \frac{1}{(k+2)!}$$
et la récurrence est terminée.

(b) C'est exactement la même chose; on a bien $P(X_1 = 2) = 1/2$ et

$$P(X_{k+1} = k + 2) = 0 + \frac{k + 3 - (k + 2)}{k+2} \times P(X_k = k + 1) = \frac{1}{k+2} \times \frac{1}{(k+1)!} = \frac{1}{(k+2)!}.$$

(c) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose : $a_k = (k + 1)! \times \mathbb{P}([X_k = 2])$.

Par définition,

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= (k+2)!P(X_{k+1} = 2) = (k+2)!\left[\frac{2}{k+2}P(X_k = 2) + \frac{k+1}{k+2}P(X_k = 1)\right] \\ &= 2(k+1)!P(X_k = 2) + (k+1)!(k+1) \times \frac{1}{(k+1)!} \\ &= 2a_k + (k+1). \end{aligned}$$

On pose alors $b_k = a_k + k + 2$. On a

$$\begin{aligned} b_{k+1} &= a_{k+1} + k + 1 + 2 \\ &= 2a_k + (k+1) + k + 1 + 2 \\ &= 2(a_k + k + 2) \\ &= 2b_k \end{aligned}$$

Ainsi, (b_k) est géométrique de raison 2. Il suit qu'on peut écrire

$$b_k = 2^{k-1}b_1 = 2^{k-1}(a_1 + 3) = 2^{k-1}(2!P(X_1 = 2) + 3) = 2^{k+1}.$$

Il suit que

$$a_k = b_k - k - 2 = 2^{k+1} - k - 2,$$

et enfin

$$P(X_k = 2) = \frac{a_k}{(k+1)!} = \frac{2^{k+1} - k - 2}{(k+1)!},$$

ce qui est la formule attendue. Ouf!

(9) (a) C'est de loin la question la plus difficile de l'exercice (et du sujet de ce DS). On somme la formule de la Question (6) et on découpe et on utilise le théorème de transfert et la linéarité de l'espérance.

$$\begin{aligned}
E(X_{k+1}) &= \sum_{i=1}^{k+2} iP(X_{k+1} = i) \\
&= \sum_{i=1}^{k+2} i\left[\frac{i}{k+2}P(X_k = i) + \frac{k+3-i}{k+2}P(X_k = i-1)\right] \\
&= \frac{1}{k+2}\sum_{i=1}^{k+2} i^2 P(X_k = i) - \frac{1}{k+2}\sum_{i=1}^{k+2} i^2 P(X_k = i-1) + \frac{k+3}{k+2}\sum_{i=1}^{k+2} iP(X_k = i-1) \\
&= \frac{1}{k+2}\left(\sum_{i=1}^{k+1} i^2 P(X_k = i) - \sum_{i=2}^{k+2} i^2 P(X_k = i-1)\right) + \frac{k+3}{k+2}\sum_{i=2}^{k+2} iP(X_k = i-1) \\
&= \frac{1}{k+2}\left(\sum_{i=1}^{k+1} i^2 P(X_k = i) - \sum_{j=1}^{k+1}(j+1)^2 P(X_k = j)\right) + \frac{k+3}{k+2}\sum_{j=1}^{k+1}(j+1)P(X_k = j) \\
&= \frac{1}{k+2}\left(E(X_k^2) - E((X_k+1)^2)\right) + \frac{k+3}{k+2}E(X_k+1) \\
&= \frac{1}{k+2}\left(E(X_k^2) - E(X_k^2) - 2E(X_k) - 1\right) + \frac{k+3}{k+2}E(X_k) + \frac{k+3}{k+2} \\
&= \frac{k+1}{k+2}E(X_k) + 1,
\end{aligned}$$

ce qu'on voulait.

(b) Si la question précédente était vraiment difficile, celle-ci n'est qu'une simple récurrence (qui utilise bien sûr la dernière formule obtenue).

- <u>initialisation</u>. Pour $k = 1$,

$$E(X_1) = \frac{3}{2} = \frac{1+2}{2},$$

  et la formule est vraie.

- <u>hérédité</u>. Supposons que, pour un certain $k \in \mathbb{N}^*$, on ait

$$E(X_k) = \frac{k+2}{2}.$$

  Alors, par la question précédente,

$$E(X_{k+1}) = \frac{k+1}{k+2}E(X_k) + 1 = \frac{k+1}{k+2} \times \frac{k+2}{2} + 1 = \frac{k+1}{2} + 1 = \frac{k+3}{2},$$

  ce qui est bien la formule au rang $k+1$ et termine la récurrence.

Exercice 3

Cet exercice provient du sujet **EDHEC 2000**.

Dans tout l'exercice, on désigne par K la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par $K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et on note $\mathcal{E}$ l'ensemble

$$\mathcal{E} = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \ : \ MK = KM = M\}.$$

(1) Il est immédiat que $K^2 = I$. Ainsi, $K \cdot K = I$ donne que K est inversible et $K^{-1} = K$.

(2) (a) On montre que $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel en montrant que $\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel e $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On note 0_3 la matrice nulle de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

- Il est clair que 0_3 est dans $\mathcal{E}$: $0_3 \cdot K = 0_3 = K \cdot 0_3$.

- Soient M et N deux matrices de $\mathcal{E}$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ deux réels. Alors

$$(\lambda M + \mu N) \cdot K = \lambda MK + \mu NK = \lambda KM + \mu KN = K\,(\lambda M + \mu N) = \lambda M + \mu N$$

donc $\lambda M + \mu N \in \mathcal{E}$. Ainsi, $\mathcal{E}$ est stable par combinaison linéaire et non vide donc c'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(/R)$ et donc un espace vectoriel.

(b) Soit $M \in \mathcal{E}$. Supposons que M soit inversible, alors il existe une matrice inverse M^{-1}. Mais alors,

$$K = M^{-1} \cdot (MK) = M^{-1}M = I,$$

ce qui est absurde. Donc M n'est pas inversible.

(3) On introduit les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Soient $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$. On a

$$\alpha A + \beta B + \gamma C + \delta D = 0_3 \iff \begin{cases} \alpha &= 0 \\ \beta &= 0 \\ \gamma &= 0 \\ \delta &= 0 \end{cases}$$

Donc la famille (A, B, C, D) est libre.

(4) Soit $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathcal{E}$.

(a) On revient à la définition de $\mathcal{E}$.

$$\begin{aligned}
M \in \mathcal{E} &\iff MK = KM = M \\
&\iff \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{pmatrix} c & b & a \\ f & e & d \\ k & h & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g & h & k \\ d & e & f \\ a & b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix} \\
&\iff \left\{ \begin{array}{l} k = g = c = a \\ h = b \\ f = d \end{array} \right. \\
&\iff M = \begin{pmatrix} a & b & a \\ d & e & d \\ a & b & a \end{pmatrix} \\
&\iff M = aA + bB + dC + eD
\end{aligned}$$

On peut alors écrire

$$\mathcal{E} = \text{Vect}(A, B, C, D)$$

et la famille (A, B, C, D) est génératrice de $\mathcal{E}$.

(b) D'après la question précédente, une matrice M de $\mathcal{E}$ a deux lignes égales (la première et la troisième), elle n'est donc pas inversible (ce qu'on savait déjà).

(c) La famille (A, B, C, D) est génératrice de $\mathcal{E}$, mais c'est aussi (d'après la question (3)) une famille libre. Ainsi, c'est une base de $\mathcal{E}$ qui est donc de dimension 4:

$$\dim(\mathcal{E}) = 4.$$

(5) On considère l'ensemble $\mathcal{F}$ défini par

$$\mathcal{F} = \left\{ M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \; : \; M = \begin{pmatrix} x & y & x \\ y & z & y \\ x & y & x \end{pmatrix}, \; x, y, z \in \mathbb{R} \right\}.$$

Il est immédiat de voir que

$$M \in \mathcal{F} \iff M = xA + y(B + C) + zD.$$

Ainsi, $\mathcal{F} = \text{Vect}(A, B + C, D)$ est le sous-espace de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ engendré par la famille $(A, B + C, D)$ et il est clairement inclus dans $\mathcal{E}$:

$$M \in \mathcal{F} \Longrightarrow M = xA + y(B + C) + zD = xA + yB + yC + zD \in \text{Vect}(A, B, C, D) = \mathcal{E}.$$

Ainsi, $\mathcal{F}$ est bien un sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}$. De plus, la famille génératrice $(A, B + C, D)$ est libre:

$$\alpha A + \beta(B + C) + \gamma D = 0_3 \iff \left\{ \begin{array}{rcl} \alpha & = & 0 \\ \beta & = & 0 \\ \gamma & = & 0 \end{array} \right.$$

Elle forme donc une base de $\mathcal{F}$ qui est de dimension 3

$$\dim(\mathcal{F}) = 3.$$

(6) On note φ l'application de $\mathcal{F}$ dans $\mathbb{R}$ qui à toute matrice $A = (a_{i,j})$ de $\mathcal{F}$ associe le nombre :

$$\sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} (-1)^{i+j} a_{i,j},$$

(a) On explicite Q

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

et on fait le calcul

$$\varphi(Q) = (-1)^2 + (-1)^3 + (-1)^4 + (-1)^4 + (-1)^5 + (-1)^6 = 1 - 1 + 1 + 1 - 1 + 1 = 2.$$

(b) Soient $M = (a_{i,j})$, $N = (b_{i,j})$ deux matrices et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Observons que $\lambda M + \mu N$ est la matrice $(\lambda a_{i,j} + \mu b_{i,j})$. Il suit que

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda M + \mu N) &= \sum_{1 \leq i,j \leq 3} (-1)^{i+j}(\lambda a_{i,j} + \mu b_{i,j}) \\ &= \lambda \sum_{1 \leq i,j \leq 3} (-1)^{i+j} a_{i,j} + \mu \sum_{1 \leq i,j \leq 3} b_{i,j}) \\ &= \lambda \varphi(M) + \mu \varphi(N) \end{aligned}$$

et φ est bien linéaire.

(c) Sachant que φ est linéaire, il est très facile de vérifier que $\mathcal{K}$ est stable par combinaison linéaire.

- $\varphi(0_3) = 0$ donc $0_3 \in \mathcal{K}$ et $\mathcal{K}$ est non vide;
- Soient $M, N \in \mathcal{K}$, et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. On a
$$\varphi(\lambda M + \mu N) = \lambda \varphi(M) + \mu \varphi(N) = \lambda \times 0 + \nu \times 0 = 0$$
donc $\lambda M + \mu N \in \mathcal{K}$.

Il suit que $\mathcal{K}$ est bien un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}$.

(d) Soit $M = \begin{pmatrix} x & y & x \\ y & z & y \\ x & y & x \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathcal{K}$.

Par définition de φ, on a

$$\begin{aligned} \varphi(M) &= (-1)^2 x + (-1)^3 y + (-1)^4 x + (-1)^3 y + (-1)^4 z + (-1)^5 y + (-1)^4 x + (-1)^5 y + (-1)^6 x \\ &= x - y + x - y + z - y + x - y + x \\ &= 4x - 4y + z \end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned} M = \begin{pmatrix} x & y & x \\ y & z & y \\ x & y & x \end{pmatrix} \in \mathcal{K} &\iff \varphi(M) = 0 \\ &\iff 4x - 4y + z = 0 \iff z = 4y - 4x \\ &\iff M = x \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\mathcal{K} = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right).$$

La famille génératrice explicitée ci-dessus est clairement libre (les deux matrices sont non nulles et clairement non colinéaires) et forme donc une base de $\mathcal{K}$.