ECE 2 - Année 2020-2021
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Devoir surveillé n°2

Lundi 23 Novembre
Durée : 4 heures

Exercice 1

Dans tout l'exercice, on notera $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 et I la matrice identité d'ordre 3. On considère la matrice A définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

L'objectif de cet exercice est de déterminer l'ensemble des matrices M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $M^2 = A$.

Partie A : Étude de la matrice A

(1) Calculer les matrices $(A-I)^2$ et $(A-I)^3$.
(2) La matrice A est-elle inversible ?
(3) Le but de cette question est de montrer qu'il n'existe pas de matrice diagonale qui soit semblable à A. On raisonne par l'absurde et suppose alors qu'il existe une matrice D diagonale et une matrice P inversible telles que

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}, \qquad A = PDP^{-1}.$$

  (a) Que vaut $(D-I)^3$?
  (b) En déduire des équations satisfaites par λ_1, λ_2 et λ_3 puis les résoudre.
  (c) Expliciter alors D et conclure à une contradiction.

Partie B : Recherche d'une solution particulière

On note pour tout $x \in]-1,1[, \varphi(x) = \sqrt{1+x}$.

(4) Justifier que la fonction φ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]-1,1[$, et déterminer les valeurs de $\varphi'(0)$ et $\varphi''(0)$.
(5) En utilisant la formule de Taylor-Young pour φ en 0 à l'ordre 2, déterminer un réel α non nul tel que :

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + \alpha x^2 + o(x^2), \qquad x \to 0.$$

(6) On note $P(x) = 1 + \frac{1}{2}x + \alpha x^2$ la fonction polynomiale de degré 2 ainsi obtenue. Développer $(P(x))^2$.

(7) Soit $C = A - I$. En utilisant les résultats de la question 1, vérifier que $(P(C))^2 = A$.
Expliciter alors une matrice M telle que $M^2 = A$.

Partie C : Résolution complète de l'équation

On munit l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{3,1}$ de sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$.
Soit f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{3,1}$ dont la matrice représentative dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice A.
Dans cette partie, on pose

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad w = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(8) Soient u et v les vecteurs définis par: $\left\{ \begin{array}{rcl} v & = & f(w) - w, \\ u & = & f(v) - v. \end{array} \right.$

(a) Calculer les vecteurs v et u.
(b) Démontrer que la famille $\mathcal{B}' = (u, v, w)$ est une base de $\mathcal{M}_{3,1}$.
(c) Déterminer la matrice représentative de f dans la base $\mathcal{B}'$.
(d) En déduire qu'il existe une matrice $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ inversible telle que $T = P^{-1}AP$.

(9) Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

(a) Montrer que si $N^2 = T$, alors $NT = TN$. En déduire alors que N est de la forme :

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

où a, b et c sont trois réels.
(b) Démontrer alors que l'équation matricielle $N^2 = T$ admet exactement deux solutions : N_1 et N_2.

(10) Montrer que l'équation matricielle $M^2 = A$ d'inconnue $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ admet exactement deux solutions que l'on écrira en fonction de P, P^{-1}, N_1 et N_2.

(11) L'ensemble E des matrices M appartenant à $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $M^2 = A$ est-il un espace vectoriel?

Exercice 2

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0; 1[$. On pose $q = 1 - p$.
On dispose de deux urnes: l'urne U qui contient n boules numérotées de 1 à n et l'urne V qui contient des boules blanches en proportion p.

On pioche une boule au hasard dans U et on note X la variable aléatoire égale au numéro de la boule tirée.

Si X prend la valeur k, on pioche k boules dans V, une par une, avec remise à chaque fois de la boule tirée, et on appelle Y la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues.

(1) Dans le cas où $n = 1$, reconnaître la loi de Y.
On revient au cas général.

(2) Reconnaître la loi de X et donner son espérance et sa variance.

(3) Soit $k \in [\![1; n]\!]$. Reconnaître la loi de Y, conditionnellement à l'événement $(X = k)$, et en déduire, en distinguant les cas $0 \leq i \leq k$ et $k < i$, la probabilité $P_{(X=k)}(Y = i)$.

(4) On rappelle les commandes `SciLab` suivantes qui permettent de simuler des variables usuelles discrètes:

`grand(1,1, 'uin', a, b)` simule une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[\![a, b]\!]$,
`grand(1,1, 'bin', n, p)` simule une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$,
`grand(1,1, 'geom', p)` simule une variable aléatoire suivant la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$
`grand(1,1, 'poi', a)` simule une variable aléatoire suivant la loi de Poisson $\mathcal{P}(a)$.

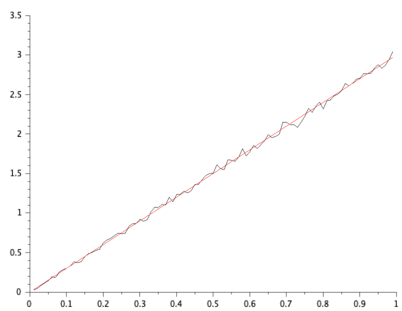
Écrire une fonction d'en-tête `function [X,Y]=tirages(p,n)` qui simule et renvoie les variables X et Y.

(5) On complète la fonction précédente par le programme suivant et on joint les figures obtenues pour différentes valeurs de n. Interpréter et émettre une conjecture à propos de Y.

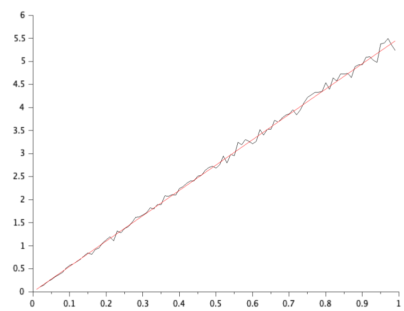
```
n=input('n=?')
function m=mystere(p)
Y=zeros(1,1000)
for k=1:1000
    [x,Y(k)]=tirages(p,n)
end
m=mean(Y)
endfunction

P=0.01:0.01:0.99
E=feval(P, mystere)
plot2d(P, E)
plot2d(P, (n+1)*P/2, style=5) //style=5 correspond à la couleur rouge
```

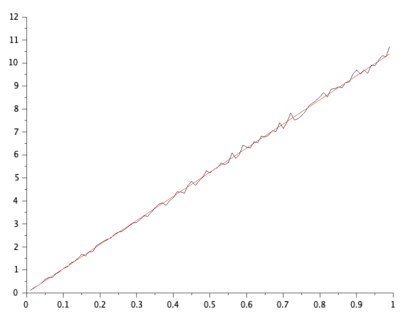
Pour $n = 5$



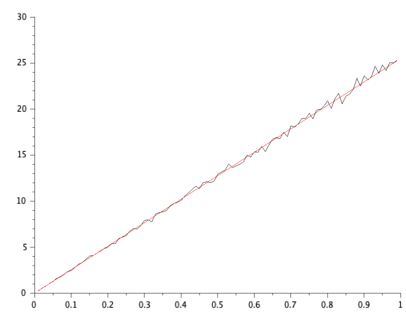
Pour $n = 10$



Pour $n = 20$



Pour $n = 50$



(6) (a) Justifier que l'ensemble $Y(\Omega)$ des valeurs prises par Y est égal à $[\![0;n]\!]$ puis montrer que :
$$P(Y=0)=\frac{q\,(1-q^n)}{n(1-q)}.$$
(b) Écrire, pour tout $i\in[\![1;n]\!]$, la probabilité $P(Y=i)$ sous forme d'une somme de $n-i+1$ termes que l'on ne cherchera pas à simplifier.

(7) (a) Soient i et k deux entiers naturels tels que $1\leq i\leq k\leq n$. Montrer l'égalité
$$i\binom{k}{i}=k\binom{k-1}{i-1}.$$
(b) Établir ensuite que Y possède une espérance et que celle-ci est donnée par:
$$E(Y)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(k\sum_{i=1}^{k}\binom{k-1}{i-1}p^iq^{k-i}\right).$$
(c) En déduire que $E(Y)=\dfrac{(n+1)p}{2}$.

(8) (a) Établir que
$$\forall n\geq 2,\quad E(Y(Y-1))=\frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n}\left(k(k-1)\sum_{i=2}^{k}\binom{k-2}{i-1}p^iq^{k-i}\right).$$
(b) Montrer que l'on a
$$\forall n\geq 2,\quad E(Y(Y-1))=\frac{(n^2-1)\,p^2}{3}.$$
(c) Vérifier que cette expression reste valable pour $n=1$.
(d) Exprimer, sans chercher à la calculer, la variance de Y en fonction de $E(Y(Y-1))$ et $E(Y)$.

Exercice 3

On rappelle, pour cet exercice, qu'est admise, dans le cours la valeur de l'intégrale
$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2/2}\mathrm{d}x=\sqrt{2\pi}$$
dont on sait en revanche démontrer la convergence.

Partie A : Un équivalent par télescopage

Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on pose
$$u_n=\frac{n^ne^{-n}\sqrt{n}}{n!},\qquad\text{et}\qquad v_n=\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right).$$

(1) On **admet** la formule de Taylor à l'ordre 3 énoncé comme suit. Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^3$ au voisinage de 0, alors
$$f(t)=f(0)+f'(0)t+\frac{f''(0)}{2}t^2+\frac{f'''(0)}{3!}t^3+o(t^3),\qquad t\to 0.$$
Justifier que la formule s'applique et exprimer le développement limité de $\ln(1+t)$ à l'ordre 3 en 0.

(2) Montrer soigneusement que, pour $n\to+\infty$, on a
$$v_n\sim\frac{1}{12n^2}.$$

(3) En déduire la convergence de la série $\sum v_n$ puis l'existence d'une constante $\kappa > 0$ telle que

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{n}e^{-n}n^n}{\kappa}.$$

Partie B : Une première suite d'intégrales

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n = \int_0^1 (1-t^2)^n \mathrm{d}t.$$

(4) Montrer que la suite (I_n) est bien définie et décroissante.

(5) Montrer que, pour tout $u \in [0;1]$

$$0 \leq 1-u \leq e^{-u}.$$

(6) Montrer la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x$, et préciser, à l'aide du rappel au début de cet exercice et d'un changement de variable affine, sa valeur C.

(7) En déduire, à l'aide du changement de variables $x = \sqrt{n}\cdot t$ que

$$0 \leq I_n \leq \frac{C}{\sqrt{n}}.$$

(8) Que peut-on conclure quant à la limite de (I_n) ?

(9) Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que, pour tout $n \geq 1$,

$$I_n = 2n(I_{n-1} - I_n)$$

puis que

$$I_n = \frac{2n}{2n+1} I_{n-1}.$$

(10) En déduire, par récurrence, que

$$I_n = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}.$$

(11) On rappelle que, sous `SciLab`, si `v` est un vecteur, la commande `prod(v)` renvoie le produit des composantes de `v`. Compléter alors la fonction ci-dessous pour qu'elle permette de calculer et de renvoyer la valeur de I_n.

```
function u=I(n)
x = 1:n
m = 2*n +1
y = 1:m
v = .................
w = ................
u = ................*v^2/w
endfunction
```

(12) En écrivant

$$I_n = \frac{4^n(n!)^2}{(2n+1)(2n)!},$$

et à l'aide de l'équivalent obtenu à la question (3), montrer qu'il existe une constante α (qui dépend de κ) telle que

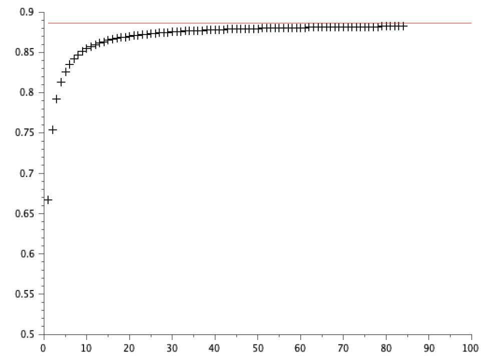
$$I_n \sim \frac{\alpha}{\sqrt{n}}.$$

(13) Quelle est la nature de la série $\sum I_n$?

(14) On rajoute les instructions `SciLab` à la suite de la fonction écrite précédemment, et on obtient la figure ci-contre. Emettre une conjecture quant à la valeur de α puis pour celle de κ.

```
N=1:100
eq=zeros(1,100)
for k=1:100
    eq(k)=I(k)*sqrt(k)
end

plot2d(N, eq, -1)
m=sqrt(%pi)/2
plot2d(N, m*ones(1,100), style=5)
```



Partie C : Détermination des constantes κ et α

On introduit maintenant, pour $n \in \mathbb{N}$, la suite

$$J_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} \mathrm{d}x$$

(15) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale J_n est bien définie et préciser la valeur de J_0.

(16) Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$J_{n+1} = (n+1)J_n.$$

(17) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$n! = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} \mathrm{d}x.$$

(18) Montrer soigneusement, à l'aide du changement de variable $x = n + y\sqrt{n}$, que

$$n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n} \int_{-\sqrt{n}}^{+\infty} \left(1 + \frac{y}{\sqrt{n}}\right)^n e^{-y\sqrt{n}} \mathrm{d}y.$$

(19) On note $g_n(y) = \left(1 + \frac{y}{\sqrt{n}}\right)^n e^{-y\sqrt{n}}$.

(a) Soit $y \in \mathbb{R}$ fixé. Déterminer

$$\lim_{n \to +\infty} g_n(y).$$

(b) En **admettant** que

$$\lim_{n \to +\infty} \int_{-\sqrt{n}}^{+\infty} \left(1 + \frac{y}{\sqrt{n}}\right)^n e^{-y\sqrt{n}} \mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{n \to +\infty} g_n(y) \mathrm{d}y,$$

déterminer la valeur de κ. En déduire celle de α.