ECE 2 - Année 2020-2021
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

**Devoir surveillé n°2**

*Lundi 23 Novembre*
*Solution*

# Exercice 1

Cet exercice provient du sujet **ECRICOME 2017**.

Dans tout l'exercice, on notera $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 et $I$ la matrice identité d'ordre 3. On considère la matrice $A$ définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

L'objectif de cet exercice est de déterminer l'ensemble des matrices $M$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $M^2 = A$.

## Partie A : Étude de la matrice $A$

(1) On commence par expliciter la matrice $A - I$ avant de calculer ses puissances:

$$A - I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il apparaît alors que

$$(A-I)^2 = \begin{pmatrix} -6 & 6 & 0 \\ -6 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{et} \qquad (A-I)^3 = 0.$$

(2) La relation précédente se développe (car $A$ et $-I$ commutent) et donne

$$A^3 - 3A^2 + 3A - I = 0 \Longleftrightarrow A^3 - 3A^2 + 3A = I \Longleftrightarrow A \cdot \left(A^2 - 3A + 3I\right) = I$$

donc $A$ est inversible et on peut même écrire que

$$A^{-1} = A^2 - 3A + 3I.$$

(3) Le but de cette question est de montrer qu'il n'existe pas de matrice diagonale qui soit semblable à $A$. On raisonne par l'absurde et suppose alors qu'il existe une matrice $D$ diagonale et une matrice $P$ inversible telles que

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}, \qquad A = PDP^{-1}.$$

(a) On observe que, comme $D = P^{-1}AP$,

$$(D-I)^3 = \left(P^{-1}AP - I\right)^3 = \left(P^{-1}AP - P^{-1}P\right)^3 = \left(P^{-1}(A-I)\,P\right)^3 = P^{-1}(A-I)^3P = 0.$$

(b) Il suit de la question précédente que

$$0 = (D-I)^3 = \begin{pmatrix} \lambda_1 - 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 - 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 - 1 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} (\lambda_1 - 1)^3 & 0 & 0 \\ 0 & (\lambda_2 - 1)^3 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda_3 - 1)^3 \end{pmatrix}$$

et ainsi, on obtient le système

$$\left\{ \begin{array}{lcl} (\lambda_1 - 1)^3 & = & 0 \\ (\lambda_2 - 1)^3 & = & 0 \\ (\lambda_3 - 1)^3 & = & 0 \end{array} \right. \iff \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1.$$

(c) La résolution de la question précédente permet de préciser $D$:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

mais alors $A = PDP^{-1} = I$, ce qui n'est bien sûr pas le cas et donne donc la contradiction souhaitée. Ainsi, il n'existe pas de matrice diagonale qui soit semblable à $A$. (*On dira que $A$ n'est pas diagonalisable*).

## Partie B : Recherche d'une solution particulière

On note, pour tout $x \in ]-1;1[$, $\varphi(x) = \sqrt{1+x}$.

(4) Pour tout $x \in ]-1;1[$, $1+x>0$, or la fonction racine est de classe $\mathcal{C}^\infty$ (donc en particulier $\mathcal{C}^2$) sur cet intervalle. Par composition, $\varphi$ est bien de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]-1;1[$. Pour tout $x$ s'y trouvant, on a

$$\varphi'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}, \qquad \varphi''(x) = \frac{-1}{4(1+x)\sqrt{1+x}}.$$

En particulier,

$$\varphi'(0) = \frac{1}{2}, \quad \text{et} \quad \varphi''(0) = -\frac{1}{4}.$$

(5) D'après les formules de Taylor, $\varphi$ étant de classe $\mathcal{C}^2$ au voisinage de 0, elle admet un développement limité d'ordre 2 donné par

$$\begin{array}{rcl} \varphi(x) & = & \varphi(0) + \varphi'(0)x + \dfrac{\varphi''(0)}{2!}x^2 + x^2\varepsilon(x) \\ & = & 1 + \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{8} + x^2\varepsilon(x). \end{array}$$

Il suffit donc de prendre $\alpha = -1/8$.

(6) On considère donc la fonction polynomiale $P$ de degré 2 défini par

$$P(x) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}.$$

Un développement trivial donne

$$(P(x)^2) = 1 + x - \frac{x^3}{8} + \frac{x^4}{64}.$$

(7) En notant alors $C = A - I$, la toute première question s'exprime comme $C^3 = 0$ (il en est de même pour toutes les puissances supérieures). Ainsi,

$$P(C)^2 = I + C - \frac{1}{8}C^3 + \frac{1}{64}C^4 = I + C = A.$$

En posant $M = P(C)$, on a clairement $M^2 = A$. Les coefficients explicites de $M$ sont les suivants

$$\begin{aligned}
M &= P(C) = I + \frac{1}{2}C - \frac{1}{8}C^2 \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{8}\begin{pmatrix} -6 & 6 & 0 \\ -6 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 5 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & 4 \\ -6 & 6 & 4 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

# Partie C - Résolution complète de l'équation

Soit $f$ l'endomorphisme dont la matrice dans la base canonique est la matrice $A$.

(9) Soient $u, v$ et $w$ les vecteurs définis par $\left\{\begin{array}{rcl} w &=& (1,0,1) = e_1 + e_3 \\ v &=& f(w) - w \\ u &=& f(v) - v \end{array}\right.$.

(a) On calcule

$$\begin{aligned}
v &= f(w) - w \\
&= Cw \\
&= (1,1,-3) \\
u &= f(v) - v \\
&= f(f(w) - w) + f(w) - w = f^2(w) - w = C^2 w \\
&= (-6,-6,0)
\end{aligned}$$

(b) Pour montrer que la famille $\mathcal{B}' = \left\{ \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ forme une base de $\mathbb{R}^3$, il suffit de montrer que ces trois vecteurs forment une famille libre. Soient alors $x, y, z \in \mathbb{R}$ tels que $xu + yv + zw = 0$. Il suffit de montrer que, nécessairement, $x = y = z = 0$. On résout donc le système, par pivot de Gauss,

$$\begin{aligned}
xu + yv + zw = 0 &\iff \left\{\begin{array}{rcl} -6x + y + z &=& 0 \\ -6x + y &=& 0 \\ -3y + z &=& 0 \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl} -6x + y + z &=& 0 \\ z &=& 0 \\ -3y + z &=& 0 \end{array}\right. \\
&\iff x = y = z = 0
\end{aligned}$$

et la famille $\mathcal{B}'$ est bien libre et forme donc une base de $\mathbb{R}^3$.

(c) Pour connaître la matrice de $f$ dans la base $\mathcal{B}'$, il faut exprimer les images, par $f$, des vecteurs de $\mathcal{B}'$ en fonction de ces mêmes vecteurs. La définition des vecteurs donne la décomposition souhaitée

$$\begin{aligned}
u = f(v) - v &\iff f(v) = u + v \\
v = f(w) - w &\iff f(w) = v + w \\
u = (-6,-6,0) &\implies f(u) = A \cdot u = (-6,-6,0) = u.
\end{aligned}$$

Il suit alors que,

$$\mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}') = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = T.$$

(d) Si on introduit $P$ la matrice de passage de la base $\mathcal{B}'$ à la base canonique, alors $P = \mathrm{Mat}(\mathrm{Id}, \mathcal{B}', \mathcal{B})$ est inversible et ses colonnes sont les vecteurs de la base $\mathcal{B}'$ exprimés dans la base canonique

$$P = \begin{pmatrix} -6 & 1 & 1 \\ -6 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{Id}(\mathcal{B}', \mathcal{B}),$$

(qui est bien inversible car les colonnes qui la composent forment une base de $\mathbb{R}^3$) on a bien

$$T = \mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}') = \mathrm{Id}(\mathcal{B}, \mathcal{B}')\mathrm{Mat}(f, \mathcal{B})\mathrm{Id}(\mathcal{B}', \mathcal{B}) = P^{-1}AP.$$

(10) Soit $N \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

(a) Si on suppose que $N^2 = T$, alors $NT = N^2 \cdot N = N^3 = N \cdot N^2 = NT$. En d'autres termes, $N$ et $T$ commutent. En notant

$$N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix},$$

on a

$$NT = TN \iff \left\{\begin{array}{rcl} a & = & a+d \\ a+b & = & b+e \\ b+c & = & c+f \\ d & = & d+g \\ d+e & = & e+h \\ e+f & = & f+i \\ g & = & g \\ g+h & = & h \\ h+i & = & i \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} a & = & e \\ d & = & 0 \\ b & = & f \\ g & = & 0 \\ e & = & i \\ g & = & 0 \\ h & = & 0 \end{array}\right.,$$

ce qui donne bien

$$N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

(b) Il est alors facile de résoudre l'équation cherchée

$$\begin{aligned} N^2 = T \quad &\iff \left\{\begin{array}{rcl} a^2 & = & 1 \\ 2ab & = & 1 \\ b^2 + 2ac & = & 0 \end{array}\right. \\ &\iff \left\{\begin{array}{rcl} a & = & \pm 1 \\ b & = & 1/2a \\ c & = & -1/8 \end{array}\right. \end{aligned}$$

et on a deux solutions:

$$N_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -1/8 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad N_2 = \begin{pmatrix} -1 & -1/2 & -1/8 \\ 0 & -1 & -1/2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(11) On utilise le fait que $T = P^{-1}AP$ ce qui, étant équivalent à $A = PTP^{-1}$, donne

$$\begin{aligned} M^2 = A &\iff M^2 = PTP^{-1} \\ &\iff P^{-1}M^2P = T \\ &\iff \left(P^{-1}MP\right)^2 = T \\ &\iff P^{-1}MP = N_1 \quad \text{ou} \quad P^{-1}MP = N_2 \\ &\iff M = PN_1P^{-1} \quad \text{ou} \quad M = PN_2P^{-1} \end{aligned}$$

et on a bien exhibé les deux solutions souhaitées.

(12) Il est facile de voir que l'ensemble des solutions n'est pas un sous-espace vectoriel (de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$). Il existe une multitude de contre-arguments. Le plus simple est de mentionner que la matrice nulle n'en est pas un élément.

# Exercice 2

Cet exercice provient du sujet **EDHEC 2020** mais il a été augmenté d'une partie `SciLab` non présente à l'origine.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in ]0;1[$. On pose $q = 1 - p$.
On dispose de deux urnes: l'urne $U$ qui contient $n$ boules numérotées de 1 à $n$ et l'urne $V$ qui contient des boules blanches en proportion $p$.

On pioche une boule au hasard dans $U$ et on note $X$ la variable aléatoire égale au numéro de la boule tirée.

Si $X$ prend la valeur $k$, on pioche $k$ boules dans $V$, une par une, avec remise à chaque fois de la boule tirée, et on appelle $Y$ la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues.

(1) Si $n = 1$, $X$ prend nécessairement la valeur 1, c'est la variable certaine (ou constante) égale à 1 et on pioche ainsi une seule boule dans l'urne $V$. La probabilité de tirer une boule blanche est alors $p$ et on reconnait une loi de Bernoulli

$$Y \hookrightarrow \mathcal{B}(p).$$

On revient au cas général.

(2) L'urne $U$ contient des boules numérotées de 1 à $n$ et on tire chaque boule avec la même probabilité $1/n$, on reconnait donc une loi uniforme

$$X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1;n]\!]).$$

D'après le cours, on peut alors expliciter sans calcul

$$E(X) = \frac{n+1}{2}, \qquad V(X) = \frac{n^2-1}{12}.$$

(3) Soit $k \in [\![1;n]\!]$. Sachant $[X = k]$, on pioche donc $k$ boules, avec remise, dans l'urne $V$. À chaque tirage, on a la même probabilité de succès (tirer une boule blanche) avec une probabilité $p$. On reconnait donc une loi binomiale de paramètre $n$ et $p$. Ceci permet d'écrire

$$P_{[X=k]}(Y = i) = \begin{cases} \binom{k}{i} p^i (1-p)^{k-i}, & \text{si } 0 \leq i \leq k \\ 0, & \text{si } i > k \end{cases}$$

car on ne peut pas piocher davantage de boules blanches qu'on ne réalise de tirages.

(4) Les remarques précédentes et les rappels sur les commandes `grand( )` permettent d'écrire

```
function [X, Y] = tirages(p,n)
    X=grand(1,1, 'uin', 1, n)
    Y=grand(1,1, 'bin', X, p)
endfunction
```

(5) On complète la fonction précédente par le programme suivant et on joint les figures obtenues pour différentes valeurs de $n$.

```
n=input('n=?')
function m=mystere(p)
Y=zeros(1,1000)
for k=1:1000
    [x,Y(k)]=tirages(p,n)
end
m=mean(Y)
endfunction
```

Ces instructions demandent à l'utilisateur de choisir le nombre de boules dans l'urne U. La fonction `mystere` prend en argument la proportion de boules $p$ de l'urne V, simule ensuite 1000 fois les variables $X$ et $Y$ (avec le $n$ fixé précédemment) mais ne stocke dans le vecteur ligne `Y` que les réalisations de $Y$, puis renvoie enfin la *moyenne* (avec la commande `mean`) des composantes de `Y`.
Admettant que la *moyenne empirique* d'un échantillon donne une *estimation* de l'espérance de la variable échantillonnée, la fonction `mystere` renvoie donc, en fonction de $p$, une estimation de l'espérance de $Y$, pour $n$ fixé.

```
P=0.01:0.01:0.99
E=feval(P, mystere)
plot2d(P, E)
plot2d(P, (n+1)*P/2, style=5) //style=5 correspond à la couleur rouge
```

Le vecteur ligne `P` correspond à une subdivision de l'intervalle $]0;1[$ de pas 0.01. On applique la fonction `mystere` à cette subdivision dans le but de représenter graphiquement la fonction `mystere` en fonction de $p$ variant sur $]0;1[$.
Sur le même graphique, on représente en rouge la droite d'équation

$$y = \frac{n+1}{2}p.$$

Les figures obtenues et fournies sur le sujet permette d'observer que la courbe de la fonction `mystere` (qui correspond à une estimation de l'espérance de $Y$ en fonction de $p$) semble coïncider avec la droite précédente, ce qui permet de conjecturer la formule suivante

$$E(Y) = \frac{(n+1)p}{2}.$$

(6) (a) Au maximum, on fait $n$ tirages dans l'urne V et pourrait donc obtenir $n$ boules blanches, mais on pourrait n'en tirer aucune. Toutes les valeurs intermédiaires correspondent à des évènements de probabilités non nulles, donc on a bien $Y(\Omega) = [\![0;n]\!]$. On connait la loi conditionnelle de $Y$ sachant $[X=k]$, on utilise donc la formule des probabilités conditionnelles appliquée au système complet d'évènements $\{[X=k] :\ 1 \leq k \leq n\}$.

$$\begin{aligned}
P(Y=0) &= \sum_{k=1}^{n} P_{[X=k]}(Y=0)P(X=k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \binom{k}{0} p^0 q^k \frac{1}{n} \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(1-p)^k = \frac{q}{n}\sum_{k=1}^{n} q^{k-1} = \frac{q}{n}\sum_{j=0}^{n-1} q^j \\
&= \frac{q}{n} \times \frac{1-q^n}{1-q} \\
&= \frac{q(1-q^n)}{n(1-q)}
\end{aligned}$$

(b) Soit $i \in [\![1;n]\!]$. Avec la même méthode (la formule des probabilités totales et le même s.c.e) , on obtient

$$\begin{aligned} P(Y=i) &= \sum_{k=1}^{n} P_{[X=k]}(Y=i)P(X=k) = \sum_{k=i}^{n} P_{[X=k]}(Y=i)P(X=k) \\ &= \sum_{k=i}^{n} \binom{k}{i} p^i q^{k-i} \frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=i}^{n} \binom{k}{i} p^i q^{k-i}, \end{aligned}$$

expression qu'on ne cherche pas à simplifier.

(7) (a) Soient $i$ et $k$ deux entiers naturels tels que $1 \leq i \leq k \leq n$. Comme $k-i = (k-1)-(i-1)$, on a

$$i\binom{k}{i} = i \times \frac{k!}{i!(k-i)!} = k \times \frac{(k-1)!}{(i-1)!(k-i)!} = k \times \frac{(k-1)!}{(i-1)!(k-1-(i-1))!} = k\binom{k-1}{i-1}.$$

(b) La variable $Y$ est *finie*, elle admet donc une espérance, donnée par la formule

$$E(Y) = \sum_{i=0}^{n} iP(Y=i) = \sum_{i=1}^{n} iP(Y=i).$$

On utilise alors l'expression de la loi de $Y$ trouvée précédemment, et une permutation de l'ordre de sommation

$$\begin{cases} 1 \leq i \leq n \\ i \leq k \leq n \end{cases} \iff \begin{cases} 1 \leq k \leq n \\ 1 \leq i \leq k \end{cases}$$

ce qui donne donc

$$\begin{aligned} E(Y) &= \sum_{i=1}^{n} iP(Y=i) = \sum_{i=1}^{n} i \frac{1}{n} \sum_{k=i}^{n} \binom{k}{i} p^i q^{k-i} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=i}^{n} i \binom{k}{i} p^i q^{k-i} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{k} i \binom{k}{i} p^i q^{k-i} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{k} (k-1) \binom{k-1}{i-1} p^i q^{k-i} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} k \sum_{i=1}^{k} \binom{k-1}{j} p^i q^{k-i} \end{aligned}$$

ce qui est bien la formule attendue.

(c) Par la formule du binôme, on obtient

$$\begin{aligned} E(Y) &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} k \sum_{i=1}^{k} \binom{k-1}{j} p^i q^{k-i} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} kp \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k-1}{j} p^j q^{k-1-j} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} kp(p+q)^{k-1} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} kp = \frac{p}{n} \sum_{k=1}^{n} k \\ &= \frac{p}{n} \times \frac{n(n+1)}{2} \\ &= \frac{p(n+1)}{2}, \end{aligned}$$

ce qui est l'égalité voulue (et correspond bien à la conjecture émise en début d'exercice).

(8) (a) Soit $n \geq 2$. Commençons par observer que, pour $k \geq 2$, par un calcul analogue au précédent, que

$$i(i-1)\binom{k}{i} = (i-1)k\binom{k-1}{i-1} = k(k-1)\binom{k-2}{i-2}.$$

Ainsi, d'après le théorème de transfert et une permutation de l'ordre de sommation

$$\begin{aligned} E(Y(Y-1)) &= \sum_{i=1}^{n} i(i-1)P(Y=i) = \sum_{i=2}^{n} i(i-1)P(Y=i) \\ &= \sum_{i=2}^{n} i(i-1)\frac{1}{n}\sum_{k=i}^{n}\binom{k}{i}p^i q^{k-i} \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n} k(k-1)\sum_{i=2}^{k}\binom{k-2}{i-2}p^i q^{k-i}. \end{aligned}$$

(b) Avec un changement d'indice $j = i-2$ et la formule du binôme, on obtient (car $(p+q)^{k-2} = 1$),

$$\begin{aligned} E(Y(Y-1)) &= \frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n} k(k-1)\sum_{i=2}^{k}\binom{k-2}{i-2}p^i q^{k-i} = \frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n} k(k-1)p^2\sum_{j=0}^{k}\binom{k-2}{j}p^j q^{k-2-j} \\ &= \frac{p^2}{n}\sum_{k=2}^{n} k(k-1) = \frac{p^2}{n}\sum_{k=0}^{n} k(k-1) = \frac{p^2}{n}\left(\sum_{k=0}^{n} k^2 - \sum_{k=0}^{n} k\right) \\ &= \frac{p^2}{n}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2}\right) \\ &= \frac{p^2(n+1)}{2}\left(\frac{2n+1}{3} - 1\right) = \frac{p^2(n+1)(n-1)}{3} \\ &= \frac{p^2(n^2-1)}{3}, \end{aligned}$$

comme attendu.

(c) Pour $n = 1$, $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ et il est alors facile de calculer

$$E(Y(Y-1)) = 1 \times 0 \times P(Y=1) + 0 \times 1 \times P(Y=0) = 0 = \frac{p^2(1^2-1)}{3}$$

et l'expression précédente reste valable pour $n = 1$.

(d) On utilise la formule de König-Huygens pour la variance et la linéarité de l'espérance, comme $Y(Y-1) = Y^2 - Y$,

$$V(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2 = E(Y(Y-1)+Y) - E(Y)^2 = E(Y(Y-1)) + E(Y) - E(Y)^2.$$

# Exercice 3

Cet exercice s'inspire librement d'un exercice du sujet **EDHEC 2019**.

On rappelle, pour cet exercice, qu'est admise, dans le cours la valeur de l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2}\mathrm{d}x = \sqrt{2\pi}$$

dont on sait en revanche démontrer la convergence.

# Partie A : Un équivalent par télescopage

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose
$$u_n = \frac{n^n e^{-n}\sqrt{n}}{n!}, \qquad \text{et} \qquad v_n = \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right).$$

(1) On **admet** la formule de Taylor à l'ordre 3 énoncé comme suit. Si $f$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^3$ au voisinage de 0, alors
$$f(t) = f(0) + f'(0)t + \frac{f''(0)}{2}t^2 + \frac{f'''(0)}{3!}t^3 + o(t^3), \qquad t \to 0.$$
La fonction $\varphi : t \mapsto \ln(1+t)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ donc $\mathcal{C}^3$ au voisinage de 0, on peut donc lui appliquer la formule de Taylor-Young à l'ordre 3. Comme
$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi'(0) = \frac{1}{1+0} = 1, \quad \varphi''(0) = -\frac{1}{(1+0)^2} = -1, \quad \varphi'''(0) = \frac{2}{(1+0)^3} = 2,$$
on a
$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{2}{6}t^3 + o(t^3) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + o(t^3).$$

(2) Commençons par voir que
$$\begin{aligned}
\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{(n+1)^{n+1}e^{-n-1}\sqrt{n+1}n!}{(n+1)!n^n e^{-n}\sqrt{n}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n e^{-1}\sqrt{\frac{n+1}{n}} \\
&= \frac{1}{e}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1/2} = \frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1/2}
\end{aligned}$$
Ainsi, comme $u = 1/n \to 0$, $n \to +\infty$,
$$\begin{aligned}
v_n &= \ln(u_n) = \ln\left(\frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1/2}\right) \\
&= -1 + \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \\
&= -1 + \left(n+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \\
&= -1 + 1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n^2} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{4n^2} o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\
&= \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)
\end{aligned}$$
et on peut donc conclure que
$$v_n \sim \frac{1}{12n^2}, \qquad n \to +\infty.$$

(3) Par le critère de Riemann, la série $\sum 1/n^2$ converge. Par critère d'équivalence (pour les séries à termes positifs car $v_n \geq 0$), on peut donc affirmer que la série $\sum v_n$ est également convergente. Mais alors, par télescopage,
$$\ln(u_n) - \ln(u_1) = \sum_{k=1}^{n-1}(\ln(u_{k+1}) - \ln(u_k)) = \sum_{k=1}^{n-1} v_k$$
et
$$u_n = \exp(\ln(u_n)) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \kappa = \exp\left(\ln(u_1) + \sum_{k=1}^{+\infty} v_k\right) > 0,$$
ce qui se réécrit
$$\frac{n^n e^{-n}\sqrt{n}}{n!} \times \frac{1}{\kappa} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1,$$

ou encore

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{n}e^{-n}n^n}{\kappa}.$$

## Partie B : Une première suite d'intégrales

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n = \int_0^1 (1-t^2)^n \mathrm{d}t.$$

(4) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $t \mapsto (1-t^2)^n$ est continue sur $[0;1]$, donc l'intégrale $I_n$ est bien définie. De plus

$$\begin{aligned} I_{n+1} - I_n &= \int_0^1 (1-t^2)^{n+1}\mathrm{d}t - \int_0^1 (1-t^2)^n \mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \left((1-t^2)^{n+1} - (1-t^2)^n\right)\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 (1-t^2)^n(-t^2)\mathrm{d}t \\ &\leq 0, \end{aligned}$$

par positivité de l'intégrale, car, pour tout $t \in [0;1]$, $-t^2(1-t^2)^n \leq 0$. On a bien que $I_{n+1} \leq I_n$ et donc, la suite $(I_n)$ est décroissante.

(5) Pour l'inégalité de gauche, c'est trivial; si $u \in [0;1]$, alors $1-u \geq 0$. Concernant celle de droite, c'est une inégalité classique dont on a déjà montré plusieurs variantes. On propose ici un argument de convexité. En effet, $u \mapsto e^{-u}$ est convexe sur $\mathbb{R}$ (donc sur $[0;1]$) car sa dérivée seconde est strictement positive. Sa courbe est alors au dessus de toutes ses tangentes, en particulier celle au point $u=0$ dont l'équation est $y = 1-u$ donnant ainsi l'inégalité voulue.

(6)

(7) Pour tout $x \geq 0$, $e^{-x^2} \geq 0$ et, au voisinage de $+\infty$, on a $e^{-x^2} = o(1/x^2)$. Par critère de négligeabilité pour les intégrales de fonctions positives et par comparaison à une intégrale de Riemann convergente, on peut conclure que

$$\int_1^{+\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x \text{ converge.}$$

Sur $[0;1]$, la fonction $x \mapsto e^{-x^2}$ est continue et l'intégrale est alors bien définie.
De plus, en considérant le changement de variable affine $\sqrt{2}x = t$ (qui donne $x^2 = t^2/2$ et $\sqrt{2}\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$, on a

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x \quad &\underset{A\to+\infty}{\longleftarrow} \quad \int_0^A e^{-x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\sqrt{2}\cdot A} e^{-t^2/2}\mathrm{d}t \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{+\infty} e^{-t^2/2}\mathrm{d}t \\ \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x &= \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{+\infty} e^{-t^2/2}\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2}\mathrm{d}t \qquad \text{(par parité)} \\ &= \frac{\sqrt{2\pi}}{2\sqrt{2}} \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} = C. \end{aligned}$$

(8) Commençons par utiliser l'encadrement de la question (2). Soit $t \in [0;1]$, par croissance de la fonction $u \mapsto u^n$,

$$0 \leq (1-t^2)^n \leq \left(e^{-t^2}\right)^n = e^{-nt^2}.$$

Par croissance de l'intégrale, puis par changement de variables affine $x = \sqrt{n} \cdot t$ (qui donne $\mathrm{d}x = \sqrt{n}\mathrm{d}t$, on obtient donc

$$0 \leq I_n \leq \int_0^1 e^{-nt^2}\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{\sqrt{n}} e^{-x^2}\mathrm{d}x.$$

Comme $e^{-x^2} > 0$, on a

$$\int_0^{\sqrt{n}} e^{-x^2}\mathrm{d}x \leq \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x = C,$$

et on en déduit bien l'encadrement

$$0 \leq I_n \leq \frac{C}{\sqrt{n}}.$$

(9) Le théorème des gendarmes permet de déduire de l'encadrement précédent que

$$\lim_{n \to +\infty} I_n = 0.$$

(10) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En remarquant que

$$(1-t^2)^n = (1-t^2)(1-t^2)^{n-1} = (1-t \times t)(1-t^2)^{n-1},$$

il suit que, par linéarité de l'intégrale

$$\int_0^1 (1-t^2)^n\mathrm{d}t = \int_0^1 (1-t^2)^{n-1}\mathrm{d}t - \int_0^1 t \times t(1-t^2)^{n-1}\mathrm{d}t = I_{n-1} - \int_0^1 t \times t(1-t^2)^{n-1}\mathrm{d}t.$$

On pose alors

$$\left\{ \begin{array}{rcl} u' & = & t(1-t^2)^{n-1} \\ v & = t & \end{array} \right. \rightsquigarrow \left\{ \begin{array}{rcl} u & = & -\frac{1}{2n}(1-t^2)^n \\ v' & = & 1 \end{array} \right.$$

Les fonctions $u$ et $v$ étant bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;1]$, l'intégration par parties est licite et donne

$$\begin{aligned} I_n &= I_{n-1} - \int_0^1 t \times t(1-t^2)^{n-1}\mathrm{d}t \\ &= I_{n-1} - \left[-\frac{t(1-t^2)^n}{2n}\right]_0^1 - \frac{1}{2n}\int_0^1 (1-t^2)^n\mathrm{d}t \\ &= I_{n-1} - \frac{1}{2n}I_n \end{aligned}$$

ou encore

$$I_n + \frac{1}{2n}I_n = I_{n-1} \Longleftrightarrow I_n = \frac{2n}{2n+1}I_{n-1}.$$

(11) Comme l'énoncé le demande, on procède par récurrence.

- <u>initialisation.</u> Pour $n = 0$

$$I_0 = \int_0^1 (1-t^2)^0\mathrm{d}t = \int_0^1 \mathrm{d}t = 1 = \frac{(2^0 0!)^2}{(2 \times 0 + 1)!}.$$

- <u>hérédité.</u> Supposons que, pour un certain $n \in \mathbb{N}$, on ait

$$I_n = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}.$$

Mais alors

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \frac{2(n+1)}{2(n+1)+1} I_n && \text{(d'après (6))} \\ &= \frac{2(n+1)}{2n+3} \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!} && \text{(d'après (HR))} \\ &= \frac{2(n+1)(2n+2)(2^n n!)^2}{(2n+3)(2n+2)(2n+1)!} \\ &= \frac{2^2(n+1)^2(2^n n!)^2}{(2n+3)!} \\ &= \frac{(2^{n+1}(n+1)!)^2}{(2n+3)!}, \end{aligned}$$

ce qui est bien la formule au rang $n+1$ et termine la récurrence.

(12) On rappelle que, sous `SciLab`, si `v` est un vecteur, la commande `prod(v)` renvoie le produit des composantes de `v`. On complète alors sans difficulté le programme permettant le calcul de $I_n$ à partir de la formule ci-dessus, séparant numérateur et dénominateur.

```
function u=I(n)
x = 1:n
m = 2*n +1
y = 1:m
v = prod(x)
w =prod(y)
u = 4^n*v^2/w
endfunction
```

(13) Il est clair qu'on peut écrire

$$I_n = \frac{4^n (n!)^2}{(2n+1)(2n)!}.$$

L'équivalent obtenu à la question (3) permet d'écrire

$$n! \sim \frac{\sqrt{n} e^{-n} n^n}{\kappa}, \qquad (2n)! \sim \frac{\sqrt{2n} e^{-2n} (2n)^{2n}}{\kappa},$$

ce qui donne

$$I_n \sim \frac{4^n}{2n+1} \times \left( \frac{\sqrt{n} e^{-n} n^n}{\kappa} \right)^2 \times \frac{\kappa}{\sqrt{2n} e^{-2n} (2n)^{2n}} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}\kappa(2n+1)} \sim \frac{1}{2\sqrt{2}\kappa} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

En posant $\alpha = \dfrac{1}{2\sqrt{2}\kappa}$, on a bien

$$I_n \sim \frac{\alpha}{\sqrt{n}}.$$

(14) Par critère d'équivalence pour les séries à termes positifs et comparaison à une série de Riemann divergente ($\sum 1/\sqrt{n}$), on peut affirmer que la série $\sum I_n$ diverge.

(15) Les instructions données permettent de représenter graphiquement la suite $(I_n \cdot \sqrt{n})$ qui, d'après ce qui précède, est censée converger (cela découle de l'équivalent) vers $\alpha$.
La présente de la droite rouge, d'équation $y = \sqrt{\pi}/2$ semble laisser penser que

$$\alpha = \lim_{k \to +\infty} \sqrt{k} I_k = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

On peut alors également conjecturer que

$$\kappa = \frac{1}{2\sqrt{2}\alpha} = \frac{2}{2\sqrt{2}\sqrt{\pi}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

# Partie C : Détermination des constantes $\kappa$ et $\alpha$

On introduit maintenant, pour $n \in \mathbb{N}$, la suite

$$J_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} \mathrm{d}x$$

(15) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $x \mapsto x^n e^{-x}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc sur $[0;1]$ donnant un sens à l'intégrale sur ce même intervalle. Par croissance comparée, on peut voir que

$$x^n e^{-x} = o\left(\frac{1}{x^2}\right), \qquad x \to +\infty$$

ce qui permet, par un argument de négligeabilité et une comparaison à une intégrale de Riemann convergente que

$$\int_1^{+\infty} x^n e^{-x} \mathrm{d}x$$

puis $J_n$ converge. Pour $n = 0$, on peut faire le calcul. Soit $A > 0$,

$$\int_0^A e^{-x} \mathrm{d}x = [-e^{-x}]_0^A = -e^{-A} + 1 \underset{A \to +\infty}{\longrightarrow} 1$$

ce qui donne $J_0 = 1$.

(16) Soit $A > 0$. On introduit

$$\left\{ \begin{array}{rcl} u' & = & e^{-x} \\ v & = & x^{n+1} \end{array} \right. \rightsquigarrow \left\{ \begin{array}{rcl} u & = & -e^{-x} \\ v' & = & (n+1)x^n \end{array} \right.$$

Les fonctions $u$ et $v$ sont toutes les deux de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;A]$, donc par intégration par parties, on a

$$\begin{aligned} \int_0^A x^{n+1} e^{-x} \mathrm{d}x &= \left[-x^{n+1}e^{-x}\right]_0^A + (n+1)\int_0^A x^n e^{-x} \mathrm{d}x \\ &= -A^{n+1}e^{-A} + (n+1)\int_0^A x^n e^{-x} \mathrm{d}x \end{aligned}$$

Or,

$$\int_0^A x^{n+1} e^{-x} \mathrm{d}x \underset{A \to +\infty}{\longrightarrow} J_{n+1}, \qquad \int_0^A x^n e^{-x} \mathrm{d}x \underset{A \to +\infty}{\longrightarrow} J_n$$

et, par croissance comparée,

$$-A^{n+1}e^{-A} \underset{A \to +\infty}{\longrightarrow} 0,$$

ce qui donne bien

$$J_{n+1} = (n+1)J_n.$$

(17) Une récurrence quasi-immédiate donne alors $J_n = n!$.

- Pour $n = 0$, on a $J_0 = 1 = 0!$.
- Si, pour un certain $n \in \mathbb{N}$, on a $J_n = n!$, alors $J_{n+1} = (n+1)J_n = (n+1)n! = (n+1)!$, ce qui termine la récurrence et prouve bien la formule qui peut aussi s'écrire, par définition de $J_n$ sous la forme :

$$n! = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} \mathrm{d}x.$$

(18) Soit $A > 0$. En posant le changement de variable affine $x = n + y\sqrt{n}$, on a $y = (x-n)/\sqrt{n}$ et $\mathrm{d}x = \sqrt{n}\mathrm{d}y$. De plus,

$$e^{-x} = \exp\left(-n - y\sqrt{n}\right) = \frac{1}{e^n} e^{-y\sqrt{n}}$$

et

$$x^n = \left(n + y\sqrt{n}\right)^n = n^n \left(1 + \frac{\sqrt{n}}{n} y\right)^n = n^n \left(1 + \frac{y}{\sqrt{n}}\right)^n.$$

Ainsi, la formule de changement de variable donne

$$\int_0^A x^n e^{-x} \mathrm{d}x = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n} \int_{-\sqrt{n}}^{A/\sqrt{n}-\sqrt{n}} \left(1 + \frac{y}{n}\right)^n e^{-y\sqrt{n}} \mathrm{d}y.$$

L'intégrale de gauche étant convergente, celle de droite aussi, et par passage à la limite lorsque $A \to +\infty$, on a donc bien

$$n! = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} \mathrm{d}x = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n} \int_{-\sqrt{n}}^{+\infty} \left(1 + \frac{y}{\sqrt{n}}\right)^n e^{-y\sqrt{n}} \mathrm{d}y.$$

(19) On note $g_n(y) = \left(1 + \dfrac{y}{\sqrt{n}}\right)^n e^{-y\sqrt{n}}$.

(a) Soit $y \in \mathbb{R}$ fixé. Observant que $y/\sqrt{n} \to 0$, $n \to +\infty$, on peut utiliser des DL pour obtenir la limite.

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{y}{\sqrt{n}}\right)^n e^{-y\sqrt{n}} &= \exp\left(n \ln\left(1 + \frac{y}{\sqrt{n}}\right) - y\sqrt{n}\right) \\ &= \exp\left(n\left(\frac{y}{\sqrt{n}} - \frac{y^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) - y\sqrt{n}\right) \\ &= \exp\left(-\frac{y^2}{2} + o(1)\right) \\ &\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right). \end{aligned}$$

(b) En **admettant** la permutation des limites proposée, on peut écrire

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} n! \times \frac{e^n}{n^n\sqrt{n}} &= \lim_{n\to+\infty} \int_{-\sqrt{n}}^{+\infty} \left(1 + \frac{y}{\sqrt{n}}\right)^n e^{-y\sqrt{n}} \mathrm{d}y \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{n\to+\infty} g_n(y) \mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2/2} \mathrm{d}y \\ &= \sqrt{2\pi}. \end{aligned}$$

Ainsi, d'après la première partie et la définition de $\kappa$, on peut écrire que

$$\frac{1}{\kappa} = \sqrt{2\pi} \Longleftrightarrow \kappa = \frac{1}{\sqrt{2\pi}},$$

ce qu'on avait au préalable conjecturé, ce qui confirme bien que $\alpha = \sqrt{\pi}/2$.

☞ Cet exercice a permis de démontrer[1] la très importante et utile **formule de Stirling**

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

[1]Enfin presque, on admet quand même la valeur de l'intégrale de Gauss et une permutation de limites....