Devoir Surveillé n°3 - Sujet A

Lundi 8 Février
Durée : 4 heures

Exercice 1

On définit, pour tous réels a et b, $M(a,b)$ la matrice carrée d'ordre 4 par :

$$M(a,b) \; = \; \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & a \\ a & 0 & 0 & a \\ a & 0 & 0 & a \\ b & b & b & b \end{pmatrix}$$

et on note : $E = \{M(a,b) \; : \; (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$.
L'objectif de cet exercice est de déterminer les matrices de E qui sont diagonalisables.

(1) (a) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_4$.
Déterminer une base de E et sa dimension.
(b) Le produit de deux matrices quelconques de E appartient-il encore à E ?

(2) **Étude du cas** $a = 0$ **et** $b = 0$.

Justifier que la matrice $M(0,0)$ est diagonalisable.

(3) **Étude du cas** $a \neq 0$ **et** $b = 0$.

Soit a un réel non nul. On note A la matrice $M(a,0)$.

(a) Calculer A^2 et déterminer un polynôme annulateur de A.
(b) En déduire les valeurs propres de la matrice A et préciser une base de chacun des sous-espaces propres associés.
(c) En déduire que la matrice A est diagonalisable. Déterminer une matrice P de $\mathcal{M}_4$ inversible et une matrice D de $\mathcal{M}_4$ diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$.

(4) **Étude du cas** $a = 0$ **et** $b \neq 0$.

Soit b un réel non nul. On note B la matrice $M(0,b)$.

(a) Déterminer le rang des matrices B et $B - bI_4$, I_4 désignant la matrice identité d'ordre 4.
(b) En déduire l'ensemble des valeurs propres de B en précisant la dimension des sous-espaces propres associés.

(c) La matrice B est-elle diagonalisable ?

(5) **Étude du cas $a \neq 0$ et $b \neq 0$.**

Soient a et b deux réels non nuls. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ est $M(a,b)$. On pose :

$$v_1 = (1,1,1,0), \qquad v_2 = (0,0,0,1) \qquad \text{et} \qquad T = \begin{pmatrix} a & a \\ 3b & b \end{pmatrix}.$$

(a) Montrer que $\mathrm{Ker}(f)$ est de dimension 2 et en préciser une base (v_3, v_4).
(b) Montrer que la famille $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ est une base de $\mathbb{R}^4$.
(c) Déterminer la matrice notée N de l'endomorphisme f dans la base $\mathcal{B}'$.
(d) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \text{ est vecteur propre de } N \text{ associé à } \lambda \iff \begin{cases} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ est vecteur propre de } T \text{ associé à } \lambda \\ \\ z = t = 0 \end{cases}$$

(e) On suppose dans cette question **uniquement** que $(a,b) = (1,1)$.
Déterminer les valeurs propres de T. En déduire que la matrice $M(1,1)$ est diagonalisable.
(f) On suppose dans cette question **uniquement** que $(a,b) = (1,-1)$.
Justifier que T n'admet aucune valeur propre. La matrice $M(1,-1)$ est-elle diagonalisable?
(g) Montrer l'équivalence :

$$M(a,b) \text{ est diagonalisable } \iff a^2 + 10\,ab + b^2 > 0$$

Exercice 2

Dans tout cet exercice, f désigne la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad f(x) = x - \ln(x).$$

Partie I : Étude de la fonction f

(1) Dresser le tableau de variations de f en précisant ses limites en 0 et en $+\infty$.
(2) Montrer que l'équation $f(x) = 2$, d'inconnue $x \in]0,+\infty[$, admet exactement deux solutions, que l'on note a et b, telles que $0 < a < 1 < b$.
(3) Montrer que: $b \in [2;4]$. *On donne* $\ln(2) \approx 0,7$.

Partie II : Étude d'une suite

On pose : $u_0 = 4$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \ln(u_n) + 2$.

(4) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in [b,+\infty[$.

(5) Déterminer la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. En déduire qu'elle converge et préciser sa limite.

(6) (a) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - b \leq \dfrac{1}{2}(u_n - b)$.
(b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n - b \leq \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

(7) (a) Écrire une fonction `SciLab` d'en-tête `function u = suite(n)` qui, prenant en argument un entier n de $\mathbb{N}$, renvoie la valeur de u_n.

(b) Recopier et compléter la ligne 3 de la fonction `SciLab` suivante afin que, prenant en argument un réel `epsilon` strictement positif, elle renvoie une valeur approchée de b à `epsilon` près.

```
function b = valeur_approchee(epsilon)
n = 0
while ........
    n = n+1
end
b = suite(n)
endfunction
```

Partie III : Étude d'une fonction définie par une intégrale

On note Φ la fonction donnée par :

$$\Phi(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{f(t)} \mathrm{d}t.$$

(8) Montrer que Φ est bien définie et dérivable sur $]0, +\infty[$, et que l'on a :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad \Phi'(x) = \frac{\ln(2) - \ln(x)}{(x - \ln(x))(2x - \ln(2x))}.$$

(9) En déduire les variations de Φ sur $]0, +\infty[$.

(10) Montrer : $\forall x \in]0, +\infty[,\ 0 \leq \Phi(x) \leq x$.

(11) (a) Montrer que Φ est prolongeable par continuité en 0.
On note encore Φ la fonction ainsi prolongée. Préciser alors $\Phi(0)$.

(b) Montrer : $\lim\limits_{x \to 0} \Phi'(x) = 0$.
On admet que la fonction Φ est alors dérivable en 0 et que $\Phi'(0) = 0$.

(12) On donne $\Phi(2) \approx 1,1$ et on admet que $\lim\limits_{x \to +\infty} \Phi(x) = \ln(2) \approx 0,7$.
Tracer l'allure de la courbe représentative de Φ ainsi que la tangente à la courbe au point d'abscisse 0.

Partie IV : Étude d'une fonction de deux variables

On considère la fonction H de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert $U =]0, +\infty[^2$ définie par :

$$\forall (x, y) \in]0, +\infty[^2, \quad H(x, y) = \frac{x^2}{2} - xy - 2x + e^y.$$

(13) (a) Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de H en tout (x, y) de U.

(b) Montrer que la fonction H admet exactement deux points critiques : $(a, \ln(a))$ et $(b, \ln(b))$, où les réels a et b sont ceux introduits dans la question **2**.

(14) (a) Écrire la matrice hessienne, notée M_a, de H au point $(a, \ln(a))$.

(b) Montrer que M_a admet deux valeurs propres distinctes, notées λ_1 et λ_2, vérifiant :

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 & = a + 1 \\ \lambda_1 \lambda_2 & = a - 1. \end{cases}$$

(c) La fonction H présente-t-elle un extremum local au point $(a, \ln(a))$?

(15) La fonction H présente-t-elle un extremum local au point $(b, \ln(b))$?

Exercice 3

Partie A : Des résultats préliminaires

Soient U et V deux variables aléatoires à densité indépendantes, de densités respectives f_U et f_V, et de fonctions de répartition respectives F_U et F_V.

On suppose que les fonctions f_U et f_V sont nulles sur $]-\infty;0[$ et continues sur $[0;+\infty[$.

(1) (a) Justifier
$$\forall t \in [0;+\infty[,\ 0 \leqslant F_U(t)f_V(t) \leqslant f_V(t).$$
(b) En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} F_U(t)f_V(t)\mathrm{d}t$ converge.

On admet le résultat suivant :
$$\int_0^{+\infty} F_U(t)f_V(t)dt = \mathbb{P}([U \leqslant V]).$$

(2) En déduire que
$$P([U > V]) = \int_0^{+\infty} (1 - F_U(t))f_V(t)\mathrm{d}t.$$

(3) **Exemple :** Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^{+*}$. On suppose dans cette question que U suit la loi exponentielle de paramètre λ et que V suit la loi exponentielle de paramètre μ.

(a) Rappeler, pour tout t de $\mathbb{R}^+$, une expression de $F_U(t)$ et de $f_V(t)$.
(b) En déduire : $P([U > V]) = \dfrac{\mu}{\lambda + \mu}$.

Partie B : Une application

Soit $\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$. On considère $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi exponentielle de paramètre λ.

On définit ensuite la variable N égale au plus petit entier k de $\mathbb{N}^*$ tel que $T_k \leqslant T_0$ si un tel entier existe et égale à 0 sinon.

(4) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit la variable aléatoire M_n par : $M_n = \min(T_1, \ldots, T_n)$.

(a) Calculer, pour tout t de $\mathbb{R}^+$, $P([M_n > t])$.
(b) En déduire la fonction de répartition de M_n sur $\mathbb{R}$. Reconnaître la loi de M_n et préciser son(ses) paramètre(s).

(5) (a) Montrer que
$$P([N = 1]) = P([T_1 \leqslant T_0]) = \frac{1}{2}.$$
(b) Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $[N > n] = [M_n > T_0]$. En déduire, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, une expression de $P([N > n])$ en fonction de n.

(c) Montrer alors que

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}, \quad P([N=n]) = \frac{1}{n(n+1)}.$$

(d) En déduire la valeur de $P([N=0])$.

(6) La variable aléatoire N admet-elle une espérance?