ECE 2 - Année 2020-2021
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Devoir Surveillé n°3 - Sujet B

Lundi 8 Février
Durée : 4 heures

Exercice 1

Dans cet exercice, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2. Le but est d'étudier les endomorphismes f de $\mathbb{R}^n$ vérifiant

$$f \circ f = 4\mathrm{Id} \qquad (\star)$$

Partie I - Étude du cas $n = 2$

Soient f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \sqrt{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

et u le vecteur de $\mathbb{R}^2$ défini par $u = (\sqrt{2} - 2, \sqrt{2})$.

(1) Montrer que f vérifie la relation $(\star)$ puis déterminer le noyau et l'image de f.

(2) On note $F = \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id})$ et $G = \mathrm{Im}(f - 2\mathrm{Id})$.
  (a) Montrer que G est engendré par u.
  En déduire la dimension de F puis expliciter une base (v) de F.
  (b) Montrer que $G = \mathrm{Ker}(f + 2\mathrm{Id})$.

(3) Montrer que f est diagonalisable; préciser les valeurs propres de f et expliciter la matrice de passage de la base canonique vers une base de vecteurs propres.

Partie II - Étude du cas général

On suppose maintenant que $n \geq 2$ et que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ vérifiant $(\star)$.

(4) (a) Justifier que f est un automorphisme et exprimer f^{-1} en fonction de f.
  (b) Déterminer les valeurs propres possibles de f.
  (c) Vérifier que les endomorphismes $2\mathrm{Id}$ et $-2\mathrm{Id}$ satisfont l'équation $(\star)$.

Dans toute la suite, on suppose que $f \neq 2\mathrm{Id}$ et $f \neq -2\mathrm{Id}$ et comme précédemment, on note

$$F = \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id}), \quad \text{et} \quad G = \mathrm{Im}(f - 2\mathrm{Id}).$$

(5) Soit $x \in \mathbb{R}^n$ quelconque. Montrer que $f(x) - 2x \in \mathrm{Ker}(f + 2\mathrm{Id})$ et que $f(x) + 2x \in F$.
En déduire que $G \subset \mathrm{Ker}(f + 2\mathrm{Id})$ et que $\mathrm{Im}(f + 2\mathrm{Id}) \subset F$.
Montrer que 2 et -2 sont les seules valeurs propres de f.

(6) Soit x un vecteur de $\mathrm{Ker}(f + 2\mathrm{Id})$.
(a) Exprimer $(f - 2\mathrm{Id})(x)$ en fonction de x uniquement.
En déduire que $x \in G$ puis que $G = \mathrm{Ker}(f + 2\mathrm{Id})$.
(b) Montrer que f est diagonalisable.

Exercice 2

On admet que si Z_1 et Z_2 sont deux variables aléatoires **à densité**, définies sur le même espace probabilisé, alors leur covariance, si elle existe, est définie par :

$$\mathrm{Cov}\left(Z_1, Z_2\right) = E\left(Z_1 Z_2\right) - E\left(Z_1\right) E\left(Z_2\right).$$

On **admet** également que si Z_1 et Z_2 sont indépendantes alors leur covariance est nulle.

On considère deux variables aléatoires réelles X et U définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$, indépendantes, X suivant la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$ et U prenant ses valeurs dans $\{-1; 1\}$ et telle que

$$P(U = 1) = P(U = -1) = \frac{1}{2}.$$

On pose $Y = UX$ et on admet que Y est une variable aléatoire à densité, définie elle aussi sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$.

(1) (a) En utilisant la formule des probabilités totales, montrer que :

$$\mathrm{P}\left(Y \leq x\right) = \mathrm{P}\left([U = 1] \cap [X \leq x]\right) + \mathrm{P}\left([U = -1] \cap [X \geq -x]\right).$$

(b) En déduire que Y suit la même loi que X.

(2) (a) Calculer l'espérance de U puis montrer que $E\left(XY\right) = 0$.
(b) En déduire que $\mathrm{Cov}\left(X, Y\right) = 0$.

(3) (a) Rappeler la valeur de $E\left(X^2\right)$ et en déduire que

$$\int_0^{+\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sqrt{2\pi}.$$

(b) Montrer, grace à une intégrationpar parties que, pour tout $A > 0$,

$$\int_0^A x^4 e^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x = -A^3 e^{-\frac{A^2}{2}} + 3\int_0^A x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x.$$

(c) En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^4 e^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x$ converge et vaut $\dfrac{3}{2}\sqrt{2\pi}$.
(d) Établir finalement que X possède un moment d'ordre 4 et que $E\left(X^4\right) = 3$.

(4) (a) Vérifier que $E\left(X^2 Y^2\right) = 3$.
(b) Déterminer $\mathrm{Cov}\left(X^2, Y^2\right)$.
(c) En déduire que X^2 et Y^2 ne sont pas indépendantes. Montrer alors que X et Y ne le sont pas non plus.
(d) Cet exercice a permis de montrer qu'un résultat classique concernant les variables discrètes est encore valable pour les variabales à densité. Lequel ?

Exercice 3

Pour tout réel $a \in \mathbb{R} \setminus \left\{0; -\frac{1}{2}\right\}$, on considère la fonction f_a, définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f_a(x,y) = \left(1 + y + xy + ax^2\right) e^y.$$

(1) Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

(2) (a) Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de f_a.
  (b) En déduire que f_a possède deux points critiques dont on précisera les coordonnées.

(3) Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de f_a.

(4) Montrer que, si λ_1 et λ_2 sont les racines d'un trinôme de la forme $x^2 - sx + p$ alors

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 &= s \\ \lambda_1 \lambda_2 &= p \end{cases}$$

(5) (a) Examiner, pour chacun des deux points critiques, à quelle condition portant sur a, f_a présente en ces points un extremum local. (*On utilisera la question précédente.*)
  (b) Déterminer, en distinguant trois cas, si f_a présente sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ un maximum local ou un minimum local et donner sa valeur en fonction de a.

Problème

Partie I

Dans cette partie, x désigne un réel de $[0, 1[$.

(1) (a) Montrer que : $\forall m \in \mathbb{N}$,

$$0 \leqslant \int_0^x \frac{t^m}{1-t^2} \mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{1-x^2} \times \frac{1}{m+1}.$$

  (b) En déduire que

$$\lim_{m \to +\infty} \int_0^x \frac{t^m}{1-t^2} \mathrm{d}t = 0.$$

(2) (a) Pour tout réel t de $[0, 1[$ et pour tout k élément de $\mathbb{N}^*$, calculer $\displaystyle\sum_{j=0}^{k-1} t^{2j}$.

  (b) En déduire que :

$$\sum_{j=0}^{k-1} \frac{x^{2j+1}}{2j+1} = \int_0^x \frac{1}{1-t^2} \mathrm{d}t - \int_0^x \frac{t^{2k}}{1-t^2} \mathrm{d}t.$$

  (c) Utiliser la Question (1) pour montrer que la série de terme général $\dfrac{x^{2j+1}}{2j+1}$ converge et exprimer

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{x^{2j+1}}{2j+1}$$

sous forme d'une intégrale que l'on ne cherchera pas à calculer.

(d) Conclure que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad \sum_{j=k}^{+\infty} \frac{x^{2j+1}}{2j+1} = \int_0^x \frac{t^{2k}}{1-t^2}\mathrm{d}t.$$

On admet sans démonstration que l'on a aussi :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad \sum_{j=k+1}^{+\infty} \frac{x^{2j}}{2j} = \int_0^x \frac{t^{2k+1}}{1-t^2}\mathrm{d}t.$$

Partie II

Un joueur réalise une suite de lancers indépendants d'une pièce. Cette pièce donne pile avec la probabilité p $(0 < p < 1)$ et face avec la probabilité $q = 1 - p$.
On note N la variable aléatoire égale au rang d'apparition du premier pile.
Si N prend la valeur n, le joueur place n boules numérotées de 1 à n dans une urne, puis il extrait une boule au hasard de cette urne. On dit que le joueur a gagné si le numéro porté par la boule tirée est impair et on désigne par A l'événement : "le joueur gagne".

On appelle X la variable aléatoire égale au numéro porté par la boule extraite de l'urne.

(3) Reconnaître la loi de N.

(4) (a) Montrer que, si m est un entier naturel, la commande `2*floor(m/2)` renvoie la valeur m si et seulement si m est pair.

(b) Compléter les commandes `SciLab` suivantes pour qu'elles simules N et X puis renvoient l'un des deux messages "le joueur a gagné" ou "le joueur a perdu".

```
p=input('p=?')
N=grand(1,1,'geom', ..........) // 'geom' désigne une loi géométrique
X=grand(1,1,'uin', ......., ........) // 'uin' désigne une loi uniforme
discrète
if ............. then
    disp('........')
else
    disp('........')
end
```

(5) (a) Donner, pour tout entier naturel $k \geq j$, la valeur de $P_{(N=2j)}(X = 2k+1)$.

(b) Donner, pour tout entier naturel $k \geq j+1$, la valeur de $P_{(N=2j+1)}(X = 2k+1)$.

(c) Déterminer $P_{(N=2j)}(X = 2k+1)$ lorsque k appartient à $[\![0, j-1]\!]$.

(d) Déterminer $P_{(N=2j+1)}(X = 2k+1)$ lorsque k appartient à $[\![0, j]\!]$.

(6) (a) Justifier que

$$P(X = 2k+1) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(N = n) P_{(N=n)}(X = 2k+1).$$

En admettant que l'on peut scinder la somme précédente selon la parité de n, montrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad P(X = 2k+1) = \frac{p}{q}\left(\sum_{j=k+1}^{+\infty} \frac{q^{2j}}{2j} + \sum_{j=k}^{+\infty} \frac{q^{2j+1}}{2j+1}\right).$$

(b) En déduire que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad P(X = 2k+1) = \frac{p}{q}\int_0^q \frac{t^{2k}}{1-t}\mathrm{d}t.$$

(7) (a) Montrer que ‘

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^q \frac{t^{2n+2}}{(1-t)^2(1+t)}\mathrm{d}t = 0.$$

(b) Montrer que :

$$\sum_{k=0}^{n} P(X=2k+1) = \frac{p}{q}\left(\int_0^q \frac{1}{(1-t)^2(1+t)}\mathrm{d}t - \int_0^q \frac{t^{2n+2}}{(1-t)^2(1+t)}\mathrm{d}t\right).$$

(c) En déduire que :

$$P(A) = \frac{p}{q}\int_0^q \frac{1}{(1-t)^2(1+t)}\mathrm{d}t.$$

(8) (a) Trouver trois constantes réelles a, b et c telles que, pour tout t différent de 1 et de -1, on ait :

$$\frac{1}{(1-t)^2(1+t)} = \frac{a}{1-t} + \frac{b}{1+t} + \frac{c}{(1-t)^2}.$$

(b) Écrire $P(A)$ explicitement en fonction de q.

(c) En déduire que $P(A) > \dfrac{1}{2}$.