Devoir Surveillé n°3 - Sujet B

Lundi 8 Février
Solution

Exercice 1

Cet exercice provient du sujet **HEC 2005**.
La solution provient du site de Pierre Veuillez.

Dans cet exercice, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2. Le but est d'étudier les endomorphismes f de $\mathbb{R}^n$ vérifiant

$$f \circ f \circ f \circ f = 4\mathrm{Id} \qquad (\star)$$

Partie I - Étude du cas $n = 2$

Soient f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \sqrt{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

et u le vecteur de $\mathbb{R}^2$ défini par $u = (\sqrt{2} - 2, \sqrt{2})$.

(1) $f \circ f = 4\mathrm{Id}$ si et seulement si on a l'égalité sur les matrices associée : $A^2 = 4I$

$$A^2 = 2\left(\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{array}\right) = 2\left(\begin{array}{cc} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{array}\right) = 4I$$

donc $f \circ f = 4\mathrm{Id}$.

Comme $A\frac{1}{4}A = \frac{1}{4}A\,A = I$ alors A est inversible et $A^{-1} = \frac{1}{4}A$.

Donc f est bijective et donc $\mathrm{Ker}\,(f) = \{0\}$ et $\mathrm{Im}\,(\mathrm{f}) = \mathbb{R}^2$

(2) On note $F = \mathrm{Ker}\,(f - 2\mathrm{Id})$ et $G = \mathrm{Im}\,(\mathrm{f} - 2\mathrm{Id})$.

(a) La matrice de $f - 2\mathrm{Id}$ est

$$A - 2I = \sqrt{2}\left(\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{array}\right) - 2\left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc} \sqrt{2} - 2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} - 2 \end{array}\right).$$

On a donc $f\,(1, 0) = u$.

Pour que l'image soit engendrée par u, il faudrait que $f(0,1)$ soit également proportionnel à u :

$$\left(-1-\sqrt{2}\right)\begin{pmatrix}\sqrt{2}-2\\ \sqrt{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\ -\sqrt{2}-2\end{pmatrix}.$$

Donc

$$f(0,1)=\left(-1-\sqrt{2}\right)u/$$

Comme

$$\begin{aligned}G &= \left\{f(x,y)\,/\,(x,y)\in\mathbb{R}^2\right\}=\left\{x\,f(1,0)+y\,f(0,1)\,/\,(x,y)\in\mathbb{R}^2\right\}\\ &= \left\{\left(x+y\left(-1-\sqrt{2}\right)\right)u/\,(x,y)\in\mathbb{R}^2\right\}\\ &\subset \operatorname{Vect}(u)\end{aligned}$$

Et comme $u\in G$ alors $\operatorname{Vect}(u)\subset G$.

Donc G est le sous espace engendré par (u).

Donc (u) est une base de G (génératrice et libre car formée d'un seul vecteur non nul) donc $\dim(G)=1$.

Et le théorème du rang donne alors $\dim(\mathrm{Imf}-2\mathrm{Id})=2-\dim(\mathrm{Ker}f-2\mathrm{Id})=1$
Et donc $\dim(F)=1$.

Et il reste à trouver un vecteur non nul pour en avoir une base :

$$(A-2I)\begin{pmatrix}\sqrt{2}+1\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sqrt{2}-2 & \sqrt{2}\\ \sqrt{2} & -\sqrt{2}-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{2}+1\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}.$$

Donc $\left(\sqrt{2}+1,1\right)$ est une base de F.

(b) On vérifie que $u\neq 0$ est bien vecteur propre associé à 2:

$$\begin{aligned}(A-2I)\begin{pmatrix}\sqrt{2}-2\\ \sqrt{2}\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}\sqrt{2}+2 & \sqrt{2}\\ \sqrt{2} & -\sqrt{2}+2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{2}-2\\ \sqrt{2}\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}2-4+2\\ 2-2\sqrt{2}-2+2\sqrt{2}\end{pmatrix}\\ &= 0.\end{aligned}$$

Donc u est vecteur propre associé à la valeur propre 2.

Si $\mathrm{Ker}(f+2\mathrm{Id})$ était de dimension 2, on aurait $\mathrm{Ker}(f+2\mathrm{Id})=\mathbb{R}^2$ donc $f+2\mathrm{Id}=0$ et $f=2\mathrm{Id}$ ce qui n'est pas le cas.

Donc $\dim(\mathrm{Ker}(f+2\mathrm{Id}))\leq 1$ et donc $\dim(\mathrm{Ker}(f+2\mathrm{Id}))=1$ et u en est une base.

Ainsi $\mathrm{Ker}(f+2\mathrm{Id})=\operatorname{Vect}(u)=G\neq\{0\}$ et donc G est le sous espace propre associé à -2.

(3) On a vu que -2 était valeur propre de f.

Comme $\mathrm{Ker}(f-2\mathrm{Id})\neq\{0\}$ alors 2 est également valeur propre.

Donc dans $\mathbb{R}^2$ de dimension 2, f qui a deux valeurs propres distinctes est diagonalisable sur la base obtenue en concaténant deux vecteurs propres associés à -2 et 2 : $u = \left(\sqrt{2}-2, \sqrt{2}\right)$ et $v = \left(\sqrt{2}+1, 1\right)$.

La matrice de passage de la base canonique à la base (u, v) est alors

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2}-2 & \sqrt{2}+1 \\ \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Partie II - Étude du cas général

On suppose maintenant que $n \geq 2$ et que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ vérifiant $(\star)$.

(4) (a) Comme $f \circ f = 4\mathrm{Id}$ alors $\frac{1}{4}f \circ f = \mathrm{Id}$ et $f \circ \frac{1}{4}f = \mathrm{Id}$ par linéarité de f.
Donc f est bijective donc un automorphisme de $\mathbb{R}^n$et $f^{-1} = \frac{1}{4}f$.
(b) Comme f vérifie la relation polynômiale $f^2 - 4\mathrm{Id} = 0$, $X^2 - 4$ (dont les racines sont 2 et -2) est un polynôme annulateur de f. Ainsi, les seules valeurs propres possibles de f sont 2 et -2.
(c) On a $(2\mathrm{Id})^2 = 4\mathrm{Id}$ et $(-2\mathrm{Id})^2 = (-2)^2\,\mathrm{Id} = 4\mathrm{Id}$.
Donc $2\mathrm{Id}$ et $-2\mathrm{Id}$ satisfont l'équation $(\star)$.

On suppose dans la suite de l'exercice que $f \neq 2\mathrm{Id}$ et $f \neq -2\mathrm{Id}$ et on note $F = \mathrm{Ker}\,(f - 2\mathrm{Id})$ et $G = \mathrm{Im}\,(\mathrm{f} - 2\mathrm{Id})$.

(5) Soit x un élément de E.

Pour montrer que $(f(x) - 2x)$ appartient à $\mathrm{Ker}\,(f + 2\mathrm{Id})$ on calcule son image par $f + 2\mathrm{Id}$:

$$(f + 2\mathrm{Id})\,(f(x) - 2x) = (f + 2\mathrm{Id})\,(f - 2\mathrm{Id})\,(x) = \left(f^2 - 4\mathrm{Id}\right)(x) = 0$$

car $f^2 = 4\mathrm{Id}$. Donc $f(x) - 2x \in \mathrm{Ker}\,(f + 2\mathrm{Id})$. De même :

$$(f - 2\mathrm{Id})\,(f(x) + 2x) = \left(f^2 - 4\mathrm{Id}\right)(x) = 0.$$

Ainsi, $(f(x) + 2x)$ appartient à $\mathrm{Ker}\,(f - 2\mathrm{Id}) = F$. Donc si $u \in G = \mathrm{Im}\,(\mathrm{f} - 2\mathrm{Id})$ alors il existe $v \in \mathbb{R}^n$ tel que $u = (f(v) - 2v)$ et donc $u \in \mathrm{Ker}\,(f + 2\mathrm{Id})$.

On a donc $G \subset \mathrm{Ker}\,(f + 2\mathrm{Id})$.

Et de même si $u \in \mathrm{Im}\,(\mathrm{f} + 2\mathrm{Id})$ alors il existe $v \in \mathbb{R}^n$ tel que $u = f(v) + 2v$ et donc $u \in \mathrm{Ker}\,(f - 2\mathrm{Id})$, ce qui donne

$$\mathrm{Im}\,(f + 2\mathrm{Id}) \subset \mathrm{F} = \mathrm{Ker}\,(f - 2\mathrm{Id}).$$

Pour montrer que 2 et -2 sont les valeurs propres de f, il faut monter que ni $\mathrm{Ker}\,(f - 2\mathrm{Id})$, ni $\mathrm{Ker}\,(f + 2\mathrm{Id})$ ne sont réduits à $\{0\}$.

On raisonne par l'absurde.

Si $\mathrm{Ker}\,(f - 2\mathrm{Id}) = \{0\}$, comme $\mathrm{Im}\,(f + 2\mathrm{Id}) \subset \mathrm{Ker}\,(f - 2\mathrm{Id})$ alors $\mathrm{Im}\,(f + 2\mathrm{Id}) = \{0\}$ et le théorème du rang donne $\dim\left(\mathrm{Ker}\,(f + 2\mathrm{Id})\right) = n$.

D'où $\mathrm{Ker}\,(f + 2\mathrm{Id}) = \mathbb{R}^n$ et pour tout u, $(f + 2\mathrm{Id})\,(u) = 0$ soit $f = 2\mathrm{Id}$, ce qui est contradictoire avec l'hypothèse de départ. Donc on a $\mathrm{Ker}\,(f - 2\mathrm{Id}) \neq \{0\}$ et 2 est bien valeur propre de f.

Et de même $\mathrm{Ker}\,(f + 2\mathrm{Id}) \neq \{0\}$. Donc -2 est également valeur propre de f.

(6) Soit x un vecteur de $\operatorname{Ker}(f+2\mathrm{Id})$.

(a) On a $(f+2\mathrm{Id})(x)=0$ donc $f(x)=-2x$.

D'où $(f-2\mathrm{Id})(x)=f(x)-2x=-4x$.
Pour montrer que x appartient à G, il faut montrer qu'il est une image par $(f-2\mathrm{Id})$:
Or $x=-\frac{1}{4}(f-2\mathrm{Id})(x)=(f-2\mathrm{Id})\left(-\frac{1}{4}x\right)$ par linéarité. Donc $x\in G$.

On avait déjà l'inclusion $G\subset\operatorname{Ker}(f+2\mathrm{Id})$. On vient de montrer $\operatorname{Ker}(f+2\mathrm{Id})\subset G$. On a bien

$$G=\operatorname{Ker}(f+2\mathrm{Id}).$$

(b) Il reste à voire si la somme des dimensions des sous espaces propres est égale à n.

Comme $G=\operatorname{Im}(f-2\mathrm{Id})=\operatorname{Ker}(f+2\mathrm{Id})$ alors $\dim\operatorname{Im}(f-2\mathrm{Id})=\dim(\operatorname{Ker}(f+2\mathrm{Id}))$.

Le théormème du rang donne $\dim(\operatorname{Ker}(f-2\mathrm{Id}))=n-\dim\operatorname{Im}(f-2\mathrm{Id})=n-\dim(\operatorname{Ker}(f+2\mathrm{Id}))$.

Donc $\dim(\operatorname{Ker}(f-2\mathrm{Id}))+\dim(\operatorname{Ker}(f+2\mathrm{Id}))=n$.

La somme des dimensions des sous espaces propres est égale à la dimension de l'espace, donc f est bien diagonalisable.

Exercice 2

Cet exercice provient du sujet **EDHEC 2007**.
La solution est celle proposée par Pierre Veuillez.

On admet que si Z_1 et Z_2 sont deux variables aléatoires **à densité**, définies sur le même espace probabilisé, alors leur covariance, si elle existe, est définie par :

$$\operatorname{Cov}(Z_1,Z_2)=E(Z_1Z_2)-E(Z_1)E(Z_2).$$

On **admet** également que si Z_1 et Z_2 sont indépendantes alors leur covariance est nulle.

On considère deux variables aléatoires réelles X et U définies sur le même espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},\mathrm{P})$, indépendantes, X suivant la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$ et U prenant ses valeurs dans $\{-1;1\}$ et telle que

$$P(U=1)=P(U=-1)=\frac{1}{2}.$$

On pose $Y=UX$ et on admet que Y est une variable aléatoire à densité, définie elle aussi sur l'espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},\mathrm{P})$.

(1) (a) $((U=-1),\ (U=1))$ est un système complet d'événements donc

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(Y\le x) &= \mathrm{P}(Y\le x\cap U=-1)+\mathrm{P}(Y\le x\cap U=1)\\ &= \mathrm{P}(UX\le x\cap U=-1)+\mathrm{P}(UX\le x\cap U=1)\\ &= \mathrm{P}(X\ge -x\cap U=-1)+\mathrm{P}(X\le x\cap U=1)\end{aligned}$$

(b) Comme U et X sont indépendantes,

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(Y \leq x) &= \mathrm{P}(X \geq -x)\,\mathrm{P}(U=-1) + \mathrm{P}(X \leq x)\,\mathrm{P}(U=1) \\
&= \frac{1}{2}(1-\Phi(-x)) + \frac{1}{2}\Phi(x) \\
&= \frac{1}{2}\Phi(x) + \frac{1}{2}\Phi(x) \\
&= \Phi(x)
\end{aligned}$$

avec Φ la fonction de répartition de $\mathcal{N}(0,1)$.

Conclusion : $\boxed{Y \text{ suit la même loi que } X}$

(2) (a) On a $E(U) = -1\mathrm{P}(U=-1) + 1\mathrm{P}(U=1) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$

(b) On a $XY = X^2U$ donc $E(XY) = E(X^2U)$ et comme U et X^2 sont indépendantes, $E(X^2U) = E(X^2)\,E(U) = 0$

(X^2 a une espérance car X a une variance !)

Conclusion : $\boxed{E(XY) = 0}$

(c) On a donc $\mathrm{Cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)\,E(Y) = 0$ (espérance nulle pour $\mathcal{N}(0,1)$)

(3) (a) On a $E(X^2) = V(X) + E(X)^2 = 1$

Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} t^2 e^{-t^2/2} = 1$ et par parité $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} t^2 e^{-t^2/2} = \frac{1}{2}$ et

Conclusion : $\boxed{\int_0^{+\infty} t^2 e^{-t^2/2} = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}}$

(b) Dans $\int_0^A x^4 e^{-x^2/2}dx$ on pose $u'(x) = xe^{-x^2/2}$: $u(x) = -e^{-x^2/2}$: $v(x) = x^3$: $v'(x) = 3x^2$ avec u et v de classe C^1 donc

$$\begin{aligned}
\int_0^A x^4 e^{-x^2/2}dx &= \left[-x^3 e^{-x^2/2}\right]_0^A - \int_0^A -e^{-x^2/2}3x^2dx \\
&= -A^3 e^{-A^2/2} + 3\int_0^A x^2 e^{-x^2/2}dx
\end{aligned}$$

(c) Quand A tend vers $+\infty$, on a $A^3 e^{-A^2/2} = \exp\left(-\frac{A^2}{2} + 3\ln(A)\right)$ avec $-\frac{A^2}{2} + 3\ln(A) = A^2\left(-\frac{1}{2} + 3\ln(A)/A\right) \to -\infty$ et donc $A^3 e^{-A^2/2} \to 0$

D'autre part, $\int_0^A x^2 e^{-x^2/2}dx \to \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t^2/2} = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}$ donc

$\int_0^A x^4 e^{-x^2/2}dx \to \frac{3\sqrt{2\pi}}{2}$

Conclusion : $\boxed{\int_0^{+\infty} x^4 e^{-x^2/2}dx \text{ converge et vaut } \frac{3\sqrt{2\pi}}{2}}$

(d) X a un moment d'ordre 4 si $\int_{-\infty}^{+\infty} x^4 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}dx$ converge.

Or $\int_0^{+\infty} x^4 e^{-x^2/2}dx$ converge, donc par parité $\int_{-\infty}^0 x^4 e^{-x^2/2}dx$ converge également et vaut la même chose.

Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} x^4 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}dx$ converge et vaut $2\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{3\sqrt{2\pi}}{2} = 3$.

Conclusion : $\boxed{X \text{ a un moment d'ordre 4 et } E(X^4) = 3}$

(4) (a) On a $X^2Y^2 = X^4U^2$ avec $U^2 = 1$ donc $X^2Y^2 = X^4$ et

Conclusion : $\boxed{E(X^2Y^2) = E(X^4) = 3}$

(b) Comme X^2, Y^2 et X^2Y^2 ont une espérance alors (X^2, Y^2) a une covariance et $\mathrm{Cov}(X^2,Y^2) = E(X^2Y^2) - E(X^2)\,E(Y^2) = 3 - 1\cdot 1$

Conclusion : $\boxed{\mathrm{Cov}(X^2,Y^2) = 2}$

(c) **Si** X^2 et Y^2 sont indépendantes **alors** $\mathrm{Cov}(X^2,Y^2) = 0$ donc (contraposée) **comme** $\mathrm{Cov}(X^2,Y^2) \neq 0$ **alors** X^2 et Y^2 ne sont pas indépendantes.

Et **si** X et Y sont indépendantes **alors** une fonction de X est indépendante d'une fonction de Y.
ici avec la fonction carré;
Comme X^2 et Y^2 ne sont pas indépendantes **alors** X et Y ne le sont pas.

(d) *Conclusion :* Si X et Y sont indépendantes alors la covariance est nulle
Mais la réciproque est fausse.

Exercice 3

Cet exercice est extrait du sujet **EDHEC 1999**.

Pour tout réel $a \in \mathbb{R} \setminus \left\{0; -\frac{1}{2}\right\}$, on considère la fonction f_a, définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f_a(x, y) = \left(1 + y + xy + ax^2\right) e^y.$$

(1) La fonction $(x, y) \mapsto 1 + y + xy + ax^2$ est polynomiale et donc de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$. La fonction coordonnée $(x, y) \mapsto y$ l'est également, et par composition avec la fonction exponentielle (de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$), la fonction $(x, y) \mapsto e^y$ est aussi $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$. Ainsi, par produit, f_a est bien de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

(2) (a) On applique les formules de dérivation.

$$\begin{aligned} \partial_1 f_a(x,y) &= (y + 2ax)e^y \\ \\ \partial_2 f_a(x,y) &= (1+x)e^y + (1 + y + xy + ax^2)e^y \\ &= (2 + x + y + xy + ax^2)e^y \end{aligned}$$

(b) Par définition

$$\begin{aligned} (x,y) \text{ point critique de } f_a &\iff \left\{ \begin{array}{rcl} \partial_1 f_a(x,y) &=& 0 \\ \partial_2 f_a(x,y) &=& 0 \end{array} \right. \\ &\iff \left\{ \begin{array}{rcl} y + 2ax &=& 0 \\ 2 + x + y + xy + ax^2 &=& 0 \end{array} \right. \\ &\iff \left\{ \begin{array}{rcl} y &=& -2ax \\ 2 + x - 2ax - 2ax^2 + ax^2 &=& 0 \end{array} \right. \\ &\iff \left\{ \begin{array}{rcl} y &=& -2ax \\ 2 + (1-2a)x - ax^2 &=& 0 \end{array} \right. \end{aligned}$$

Afin de résoudre l'équation $2 + (1 - 2a)x - ax^2 = 0$, on calcule le discriminant du polynôme du second degré en présence, $\Delta = (1 - 2a)^2 + 8a = (1 + 2a)^2$. Ainsi, on a deux solutions pour x

$$x = \frac{-(1-2a) + (1+2a)}{-2a} = -2, \qquad \text{ou} \qquad x = \frac{-(1-2a) - (1+2a)}{-2a} = \frac{1}{a}.$$

Au final,

$$(x,y) \text{ point critique de } f_a \iff \left\{ \begin{array}{rcl} x &=& -2 \\ y &=& 4a \end{array} \right. \quad \text{ou} \quad \left\{ \begin{array}{rcl} x &=& 1/a \\ y &=& -2 \end{array} \right.$$

et f_a possède deux points critiques dont les coordonnées sont

$$\left(\frac{1}{a}, -2\right), \quad \text{et} \quad (-2, 4a).$$

(3) On dérive à nouveau. Observons que, comme f_a est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$, le théorème de Schwarz assure l'égalité des dérivées partielles *croisées* d'ordre 2, *i.e.*, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\partial^2_{1,2} f_a(x, y) = \partial^2_{2,1} f_a(x, y)$. Les formules de dérivation donnent

$$\begin{aligned} \partial_1^2 f_a(x,y) &= 2ae^y \\ \\ \partial^2_{1,2} f_a(x,y) &= \partial^2_{2,1} f_a(x,y) \\ &= (1 + y + 2ax)e^y \\ \\ \partial_2^2 f_a(x,y) &= (1 + x + 2 + x + y + xy + ax^2)e^y \\ &= (3 + 2x + y + xy + ax^2)e^y \end{aligned}$$

(4) Si λ_1 et λ_2 sont les racines d'un trinôme de la forme $x^2 - sx + p$ alors, par factorisation par $(x - \lambda_i)$ - $i = 1, 2$ - le coefficient de degré 2 étant égal à 1, on a, pour tout x réel

$$x^2 - sx + p = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2) = x^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)x + \lambda_1\lambda_2.$$

Par identification, on a bien

$$\left\{ \begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 &= s \\ \lambda_1\lambda_2 &= p \end{aligned} \right.$$

(5) (a) On forme la matrice en chacun des deux points critiques. On a d'après les calculs des dérivées partielles d'ordre 2

$$\nabla^2 f_a(-2, 4a) = e^{4a} \begin{pmatrix} 2a & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = e^{4a} H_1.$$

Le signe des valeurs propres de $\nabla^2 f_a(-2, 4a)$ (qui permet de conclure à la présence d'un éventuel extremum en $(-2, 4a)$ est le même que celui de celles de la matrice H_1. Notant λ_1 et λ_2 les valeurs propres de H_1, celles-ci sont solutions de l'équation

$$\begin{aligned} \det(H_1 - xI) = 0 &\iff (2a - x)(-1 - x) - 1 = 0 \\ &\iff x^2 - (2a - 1)x + (-1 - 2a) = 0. \end{aligned}$$

D'après la question précédente, les valeurs propres de H_1 vérifient donc les équations du système

$$\left\{ \begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 &= 2a - 1 \\ \lambda_1\lambda_2 &= -(1 + 2a) \end{aligned} \right.$$

Afin de présenter un extremum en $(-2, 4a)$, les valeurs propres doivent être non nulles et de même signe ou encore leur produit doit être strictement positif. Or

$$\lambda_1\lambda_2 > 0 \iff 1 + 2a < 0 \iff a < -\frac{1}{2}.$$

Dans ce cas, on a donc un extremum. Le signe de la somme des deux valeurs propres donne ensuite le signe des deux valeurs propres (car elles sont de même signe et non nulles). Mais, si $a < -(1/2)$, alors $2a - 1 < 0$ et celles-ci sont donc toutes deux négatives et f_a présente alors un maximum local en $(-2, 4a)$.

On fait la même chose pour le second point critique, à commencer par la hessienne

$$\nabla^2 f_a \left(\frac{1}{a}, -2 \right) = e^{-2} \begin{pmatrix} 2a & 1 \\ 1 & 1 + \frac{1}{a} \end{pmatrix} = e^{-2} H_2.$$

Les valeurs propres μ_1 et μ_2 de H_2 vérifient

$$\left\{ \begin{aligned} \mu_1 + \mu_2 &= \frac{2a^2 + a + 1}{a} \\ \mu_1\mu_2 &= 2a + 1 \end{aligned} \right.$$

Il y aura donc un extremum si et seulement si $2a+1>0$ ou encore $a>-1/2$. Dans ce cas, c'est le signe de $\mu_1+\mu_2$ qui en précise la nature. Celui-ci étant déterminé par le signe de a (car le numérateur est toujours strictement positif à cause de son discriminant strictement négatif), on aura donc un maximum local si $a\in]-1/2;0[$ et un minimum local si $a\in]0,+\infty[$.

(b) La question précédente nous permet de faire le bilan et de distinguer en effet 3 cas:

- Si $a<-\frac{1}{2}$, f_a présente un maximum local en $(-2,4a)$, celui-ci vaut
$$f_a(-2,4a)=e^{4a}.$$
- Si $-\frac{1}{2}<a<0$, f_a présente aussi un maximum local, mais cette fois en $(1/a,-2)$, celui-ci vaut
$$f_a\left(\frac{1}{a},-2\right)=-\left(\frac{1}{a}+1\right)e^{-2}$$
- Si $a>0$, f_a présente au point précédent un minimum local, qui vaut encore
$$f_a\left(\frac{1}{a},-2\right)=-\left(\frac{1}{a}+1\right)e^{-2}.$$

Problème

Ce problème provient du sujet **EDHEC 2015**.
La solution est celle proposée par un.e collègue de l'APHEC.

Partie I

(1) (a) Pour tout $t\in[0;x]$, on a $t^2\leqslant x^2$, donc $1-t^2\geqslant 1-x^2$. Or, on a également $1-x^2>0$ (car $0<x<1$, qui implique $x^2<1$). Donc $1-t^2\geqslant 1-x^2>0$. Par conséquent, on peut passer à l'inverse et on obtient : $0<\dfrac{1}{1-t^2}\leqslant\dfrac{1}{1-x^2}$, ce qui donne, en multipliant par t^m (qui est positif ou nul) : $0\leqslant\dfrac{t^m}{1-t^2}\leqslant\dfrac{t^m}{1-x^2}$.
On intègre cet encadrement sur l'intervalle $[0;x]$:
$$\int_0^x 0dt\leqslant\int_0^x\frac{t^m}{1-t^2}dt\leqslant\int_0^x\frac{t^m}{1-x^2}dt$$
C'est-à-dire :
$$0\leqslant\int_0^x\frac{t^m}{1-t^2}dt\leqslant\frac{1}{1-x^2}\int_0^x t^m dt$$
Or, $\displaystyle\int_0^x t^m dt=\left[\frac{t^{m+1}}{m+1}\right]_0^x=\frac{x^{m+1}}{m+1}$. On en déduit :
$$0\leqslant\int_0^x\frac{t^m}{1-t^2}dt\leqslant\frac{1}{1-x^2}\times\frac{x^{m+1}}{m+1}$$
Et donc, comme $x\leqslant 1$:
$$\boxed{0\leqslant\int_0^x\frac{t^m}{1-t^2}dt\leqslant\frac{1}{1-x^2}\times\frac{1}{m+1}}$$

(b) On a sans difficulté : $\dfrac{1}{1-x^2} \times \dfrac{1}{m+1} \underset{m \to +\infty}{\longrightarrow} 0$. On en déduit, par encadrement :

$$\boxed{\int_0^x \frac{t^m}{1-t^2}dt \underset{m \to +\infty}{\longrightarrow} 0}$$

(2) (a) Pour tout $j \in \mathbb{N}$, on a $t^{2j} = (t^2)^j$. On reconnaît donc la somme des k premiers termes d'une suite géométrique de raison t^2, avec $t^2 \neq 1$. D'où :

$$\boxed{\sum_{j=0}^{k-1} t^{2j} = \frac{1-(t^2)^k}{1-t^2} = \frac{1-t^{2k}}{1-t^2}}$$

(b) On intègre l'égalité ci-dessus sur l'intervalle $[0; x]$:

$$\int_0^x \sum_{j=0}^{k-1} t^{2j} dt = \int_0^x \frac{1-t^{2k}}{1-t^2}dt$$

C'est-à-dire, par linéarité de l'intégrale :

$$\sum_{j=0}^{k-1} \int_0^x t^{2j} dt = \int_0^x \frac{1}{1-t^2}dt - \int_0^x \frac{t^{2k}}{1-t^2}dt$$

Or, $\displaystyle\int_0^x t^{2j}dt = \left[\frac{t^{2j+1}}{2j+1}\right]_0^x = \frac{x^{2j+1}}{2j+1}$. Donc finalement :

$$\boxed{\sum_{j=0}^{k-1} \frac{x^{2j+1}}{2j+1} = \int_0^x \frac{1}{1-t^2}dt - \int_0^x \frac{t^{2k}}{1-t^2}dt}$$

(c) D'après la question 1.(b) : $\displaystyle\int_0^x \frac{t^{2k}}{1-t^2}dt \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} 0$. Par conséquent :

$$\sum_{j=0}^{k-1} \frac{x^{2j+1}}{2j+1} \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} \int_0^x \frac{1}{1-t^2}dt$$

Conclusion : la série de terme général $\dfrac{x^{2j+1}}{2j+1}$ converge et on a :

$$\boxed{\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{x^{2j+1}}{2j+1} = \int_0^x \frac{1}{1-t^2}dt}$$

(d) Soit $k \in \mathbb{N}$ quelconque. Alors :

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{x^{2j+1}}{2j+1} = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{x^{2j+1}}{2j+1} + \sum_{j=k}^{+\infty} \frac{x^{2j+1}}{2j+1}$$

C'est-à-dire, d'après les questions 2.(b) et 2.(c) :

$$\int_0^x \frac{1}{1-t^2}dt = \int_0^x \frac{1}{1-t^2}dt - \int_0^x \frac{t^{2k}}{1-t^2}dt + \sum_{j=k}^{+\infty} \frac{x^{2j+1}}{2j+1}$$

Les $\displaystyle\int_0^x \frac{1}{1-t^2}dt$ se simplifient de chaque côté, et on en déduit :

$$\boxed{\sum_{j=k}^{+\infty} \frac{x^{2j+1}}{2j+1} = \int_0^x \frac{t^{2k}}{1-t^2}dt}$$

Partie II

(1) La variable aléatoire N représente le temps d'attente du premier succès (obtenir pile) à une succession d'épreuves de Bernoulli indépendantes (les lancers de pièce), chacune ayant une probabilité de succès égale à p.

Par conséquent, $\boxed{N \text{ suit une loi géométrique de paramètre } p}$.

(2) (a) La commande `floor` renvoie la partie entière d'un nombre. Il faut donc montrer que $2\lfloor \frac{m}{2} \rfloor$ est égal à m si et seulement si m est pair. Pour cela, on fait une disjonction de cas :

- Si m est pair, alors il existe un entier naturel k tel que $m = 2k$. Ceci implique $\frac{m}{2} = k$, et donc $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor = k$ également. Par conséquent, $2\lfloor \frac{m}{2} \rfloor = 2k = m$.
- Si m est impair, alors il existe un entier naturel k tel que $m = 2k-1$. Ceci implique $\frac{m}{2} = k - \frac{1}{2}$, et donc $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor = k-1$. Par conséquent, $2\lfloor \frac{m}{2} \rfloor = 2k-2 = m-1 \neq m$.

Ainsi, on a montré que $2\lfloor \frac{m}{2} \rfloor = m$ si et seulement si m est pair.

Conclusion : la commande `2*floor(m/2)` renvoie donc la valeur de m si et seulement si m est pair.

(b) Là aussi (cf question 3.(c) de l'exercice 2), la question posée n'entre pas tout à fait dans le cadre du programme officiel d'informatique, puisque la syntaxe précise de la fonction `grand` n'est pas admissible. On pouvait cependant compléter la fin à partir de la question précédente.

La réponse attendue était :

```
p=input('donner la valeur de p')
N=grand(1,1,'geom', p) // 'geom' désigne une loi géométrique
X=grand(1,1,'uin', 1, N) // 'uin' désigne une loi uniforme discrète
if 2*floor(X/2)==X then
   disp('le joueur a perdu')
else
   disp('le joueur a gagné')
end
```

(3) (a) Si $k \geqslant j$, alors $2k+1 > 2j$. Il est donc impossible de tirer une boule numérotée $2k+1$ dans une urne qui ne contient que des boules numérotées de 1 à $2j$. Par conséquent : $\boxed{P_{(N=2j)}(X = 2k+1) = 0 \text{ si } k \geqslant j}$.

(b) De même, si $k \geqslant j+1$, alors $k > j$ et donc $2k+1 > 2j+1$. Par conséquent, il est impossible de tirer une boule numérotée $2k+1$ dans une urne qui ne contient que des boules numérotées de 1 à $2j+1$. On en déduit que $\boxed{P_{(N=2j+1)}(X = 2k+1) = 0 \text{ si } k \geqslant j+1}$.

(c) Si k appartient à $[\![0; j-1]\!]$, alors $1 \leqslant 2k+1 \leqslant 2j-1$ et donc, en particulier : $1 \leqslant 2k+1 \leqslant 2j$. De plus, une fois l'urne remplie avec les boules numérotées de 1 à $2j$, chaque boule a la même probabilité d'être tirée. Par conséquent : $\boxed{P_{(N=2j)}(X = 2k+1) = \frac{1}{2j} \text{ si } k \leqslant j-1}$.

(d) De même, si k appartient à $[\![0; j]\!]$, alors $1 \leqslant 2k+1 \leqslant 2j+1$. En remplissant l'urne avec des boules numérotées de 1 à $2j+1$, la boule numérotée $2k+1$ peut donc être tirée. Et comme il y a équiprobabilité : $\boxed{P_{(N=2j+1)}(X = 2k+1) = \frac{1}{2j+1} \text{ si } k \leqslant j}$.

(4) (a) Comme N suit une loi géométrique, on a $N(\Omega) = \mathbb{N}^*$. Donc $\Big([N = n]\Big)_{n \geqslant 1}$ est un système complet d'événements. Par conséquent, d'après la formule des probabilités totales, on a,

pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{P(X = 2k+1) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(N = n) P_{(N=n)}(X = 2k+1)}$$

Maintenant, on sépare la somme en deux (comme indiqué dans l'énoncé) entre, d'un côté les n pairs (qui s'écrivent sous la forme $2j$) et d'un autre côté les termes impairs (qui s'écrivent sous la forme $2j+1$) :

$$\begin{aligned} P(X = 2k+1) = &\sum_{j=1}^{+\infty} P(N = 2j) P_{(N=2j)}(X = 2k+1) \\ &+ \sum_{j=1}^{+\infty} P(N = 2j+1) P_{(N=2j+1)}(X = 2k+1) \end{aligned}$$

On remplace $P(N = 2j)$ et $P(N = 2j+1)$ en se servant de la loi de N :

$$\begin{aligned} P(X = 2k+1) &= \sum_{j=1}^{+\infty} pq^{2j-1} P_{(N=2j)}(X = 2k+1) \\ &\quad + \sum_{j=1}^{+\infty} pq^{2j} P_{(N=2j+1)}(X = 2k+1) \\ &= \frac{p}{q} \sum_{j=1}^{+\infty} q^{2j} P_{(N=2j)}(X = 2k+1) \\ &\quad + \frac{p}{q} \sum_{j=1}^{+\infty} q^{2j+1} P_{(N=2j+1)}(X = 2k+1) \end{aligned}$$

Enfin, on remplace $P_{(N=2j)}(X = 2k+1)$ et $P_{(N=2j+1)}(X = 2k+1)$ en se servant de la question 3 :

$$\begin{aligned} P(X = 2k+1) &= \frac{p}{q} \sum_{j=k+1}^{+\infty} q^{2j} P_{(N=2j)}(X = 2k+1) \\ &\quad + \frac{p}{q} \sum_{j=k}^{+\infty} q^{2j+1} P_{(N=2j+1)}(X = 2k+1) \quad \text{(questions 3.a et 3.b)} \\ &= \frac{p}{q} \sum_{j=k+1}^{+\infty} q^{2j} \frac{1}{2j} \\ &\quad + \frac{p}{q} \sum_{j=k}^{+\infty} q^{2j+1} \frac{1}{2j+1} \quad \text{(questions 3.c et 3.d)} \end{aligned}$$

D'où, en mettant $\dfrac{p}{q}$ en facteur :

$$\boxed{P(X = 2k+1) = \frac{p}{q} \left(\sum_{j=k+1}^{+\infty} \frac{q^{2j}}{2j} + \sum_{j=k}^{+\infty} \frac{q^{2j+1}}{2j+1} \right)}$$

(b) D'après la question I.2.d et la partie admise juste après, on a (en remplaçant dans l'égalité ci-dessus) :

$$P(X = 2k+1) = \frac{p}{q} \left(\int_0^q \frac{t^{2k+1}}{1-t^2} dt + \int_0^q \frac{t^{2k}}{1-t^2} dt \right)$$

(on peut bien remplacer x par q car q appartient à $[0;1[$).
On simplifie :

$$P(X=2k+1) = \frac{p}{q}\left(\int_0^q \frac{t^{2k+1}}{1-t^2}dt + \int_0^q \frac{t^{2k}}{1-t^2}dt\right)$$
$$= \frac{p}{q}\int_0^q \frac{t^{2k+1}+t^{2k}}{1-t^2}dt \quad \text{(linéarité de l'intégrale)}$$
$$= \frac{p}{q}\int_0^q \frac{t^{2k}(t+1)}{(1-t)(1+t)}dt$$

Ce qui donne bien (en simplifiant par $t+1$) :

$$\boxed{P(X=2k+1) = \frac{p}{q}\int_0^q \frac{t^{2k}}{1-t}dt}$$

(5) (a) Pour tout $t \in [0;q]$, on a $t \leqslant q < 1$, donc $1-t \geqslant 1-q > 0$, et donc, en prenant l'inverse :

$$0 < \frac{1}{1-t} \leqslant \frac{1}{1-q}$$

D'où, en multipliant par $\dfrac{t^{2n+2}}{(1-t)(1+t)}$ (qui est positif ou nul car $t \geqslant 0$, $1-t \geqslant 0$ et $1+t \geqslant 0$) :

$$0 \leqslant \frac{t^{2n+2}}{(1-t)^2(1+t)} \leqslant \frac{1}{1-q} \times \frac{t^{2n+2}}{(1-t)(1+t)}$$

On intègre cet encadrement sur l'intervalle $[0;q]$:

$$0 \leqslant \int_0^q \frac{t^{2n+2}}{(1-t)^2(1+t)}dt \leqslant \frac{1}{1-q}\int_0^q \frac{t^{2n+2}}{(1-t)(1+t)}dt$$

Or, on sait que $\displaystyle\int_0^q \frac{t^{2n+2}}{(1-t)(1+t)}dt \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ (question I.1.b). On en déduit, par encadrement :

$$\boxed{\int_0^q \frac{t^{2n+2}}{(1-t)^2(1+t)}dt \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0}$$

(b) On fait la somme en se servant du résultat de la question 4.(b) :

$$\sum_{k=0}^{n} P(X=2k+1) = \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{p}{q}\int_0^q \frac{t^{2k}}{1-t}dt\right)$$
$$= \frac{p}{q}\int_0^q \left(\sum_{k=0}^{n}\frac{t^{2k}}{1-t}\right)dt \quad \text{(linéarité de l'intégrale)}$$
$$= \frac{p}{q}\int_0^q \left(\frac{1}{1-t}\sum_{k=0}^{n} t^{2k}\right)dt$$

On reconnaît (à l'intérieur de l'intégrale) la somme des $n+1$ premiers termes d'une suite géométrique de raison t^2 (avec $t^2 \neq 1$). Donc :

$$\sum_{k=0}^{n} P(X=2k+1) = \frac{p}{q}\int_0^q \left(\frac{1}{1-t} \times \frac{1-(t^2)^{n+1}}{1-t^2}\right)dt$$
$$= \frac{p}{q}\int_0^q \frac{1-t^{2n+2}}{(1-t)(1-t^2)}dt$$
$$= \frac{p}{q}\int_0^q \frac{1-t^{2n+2}}{(1-t)^2(1+t)}dt$$

Ce qui donne bien, par linéarité de l'intégrale :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} P(X=2k+1) = \frac{p}{q}\left(\int_0^q \frac{1}{(1-t)^2(1+t)}dt - \int_0^q \frac{t^{2n+2}}{(1-t)^2(1+t)}dt\right)}$$

(c) L'événement A est l'événement "X est impair" On a donc $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ où, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, A_n est l'événement "X est impair et $X \leqslant 2n+1$". De plus, $(A_n)_{n\geqslant 1}$ est une famille croissante d'événements. Par conséquent : $P(A) = \lim_{n\to+\infty} P(A_n)$.

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(A_n)$ n'est autre que $\sum_{k=0}^{n} P(X=2k+1)$, c'est-à-dire, d'après la question précédente :

$$P(A_n) = \frac{p}{q}\left(\int_0^q \frac{1}{(1-t)^2(1+t)}dt - \int_0^q \frac{t^{2n+2}}{(1-t)^2(1+t)}dt\right)$$

On a donc :

$$P(A) = \lim_{n\to+\infty} \frac{p}{q}\left(\int_0^q \frac{1}{(1-t)^2(1+t)}dt - \int_0^q \frac{t^{2n+2}}{(1-t)^2(1+t)}dt\right)$$

C'est-à-dire, d'après la question 5.(a) :

$$\boxed{P(A) = \frac{p}{q}\int_0^q \frac{1}{(1-t)^2(1+t)}dt}$$

(6) (a) Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. Alors, pour tout $t \in \mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$, on a :

$$\begin{aligned}\frac{a}{1-t} + \frac{b}{1+t} + \frac{c}{(1-t)^2} &= \frac{a(1-t)(1+t) + b(1-t)^2 + c(1+t)}{(1-t)^2(1+t)}\\ &= \frac{a(1-t^2) + b(1-2t+t^2) + c(1+t)}{(1-t)^2(1+t)}\\ &= \frac{(-a+b)t^2 + (-2b+c)t + (a+b+c)}{(1-t)^2(1+t)}\end{aligned}$$

Par identification des coefficients, ceci est égal à $\dfrac{1}{(1-t)^2(1+t)}$ pour tout $t \in \mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$ si $\left\{\begin{array}{rcl} -a+b &=& 0\\ -2b+c &=& 0\\ a+b+c &=& 1\end{array}\right.$. On résout ce système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} -a+b &=& 0\\ -2b+c &=& 0\\ a+b+c &=& 1\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} a &=& b\\ c &=& 2b\\ a+b+c &=& 1\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} a &=& b\\ c &=& 2b\\ 4b &=& 1\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} a &=& 1/4\\ c &=& 1/2\\ b &=& 1/4\end{array}\right.$$

Conclusion : pour tout $t \in \mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$, on a :

$$\frac{1}{(1-t)^2(1+t)} = \frac{a}{1-t} + \frac{b}{1+t} + \frac{c}{(1-t)^2}$$

avec $a = \dfrac{1}{4}$, $b = \dfrac{1}{4}$ et $c = \dfrac{1}{2}$.

(b) On reprend le résultat de la question 5.(c) et on calcule l'intégrale en se servant de la question précédente :

$$\begin{aligned}
P(A) &= \frac{p}{q}\int_0^q \frac{1}{(1-t)^2(1+t)}dt \\
&= \frac{p}{q}\left(\frac{1}{4}\int_0^q \frac{1}{1-t}dt + \frac{1}{4}\int_0^q \frac{1}{1+t}dt + \frac{1}{2}\int_0^q \frac{1}{(1-t)^2}dt\right) \\
&= \frac{p}{q}\left(\frac{1}{4}\Big[-\ln(1-t)\Big]_0^q + \frac{1}{4}\Big[\ln(1+t)\Big]_0^q + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-t}\right]_0^q\right) \\
&= \frac{p}{q}\left(\frac{-1}{4}\ln(1-q) + \frac{1}{4}\ln(1+q) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-q} - 1\right)\right) \\
&= \frac{1-q}{q}\left(\frac{-1}{4}\ln(1-q) + \frac{1}{4}\ln(1+q) + \frac{1}{2}\left(\frac{q}{1-q}\right)\right) \\
&= \frac{1-q}{q}\left(\frac{1}{4}\ln\left(\frac{1+q}{1-q}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{q}{1-q}\right)\right)
\end{aligned}$$

Ce qui donne, en développant :

$$\boxed{P(A) = \frac{1-q}{4q}\ln\left(\frac{1+q}{1-q}\right) + \frac{1}{2}}$$

(c) On a $0 < 1-q < 1+q$ (car $q \in]0;1[$). On en déduit que $\frac{1+q}{1-q} > 1$, et donc $\ln\left(\frac{1+q}{1-q}\right) > 0$.
De plus, $\frac{1-q}{4q} > 0$ car $1-q > 0$ et $4q > 0$. Donc $\frac{1-q}{4q}\ln\left(\frac{1+q}{1-q}\right) > 0$.
On en déduit, avec l'expression obtenue à la question précédente :

$$\boxed{P(A) > \frac{1}{2}}$$