EDHEC 2021 Voie E Corrigé

Corrigé proposé par laurent FOUBERT (ECE2 à Mulhouse)pour l'APHEC.
Toute correction ou suggestion permettant de l'améliorer est la bienvenue!!!

Exercice 1 :

Soit f la fonction de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}, f(x,y)=x^3+y^3-3xy$$

Partie 1

1) f est une fonction polynomiale en x et y , donc elle de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$.

2) a) On a $\partial_1 f(x,y)=3x^2-3y$ et $\partial_2 f(x,y)=3y^2-3x$ et le gradient : $\nabla f(x,y)=\begin{pmatrix}3x^2-3y\\3y^2-3x\end{pmatrix}$.

   b) Les points critiques de f sont les couples (x,y) qui annulent le gradient :
   On doit donc résoudre :

$$\left\{\begin{array}{l}\partial_1 f(x,y)=0\\ \partial_2 f(x,y)=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}3x^2-3y=0\\ 3y^2-3x=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}y=x^2\\ x^4-x=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}y=x^2\\ x(x^3-1)=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}y=x^2\\ x=0 \text{ ou } x=1\end{array}\right.$$

<u>Donc f admet deux points critiques : $(0,0)$ et $(1,1)$.</u>

3) a) On a $\partial^2_{1,1}f(x,y)=6x$, $\partial^2_{2,2}f(x,y)=6y$ et $\partial^2_{1,2}f(x,y)=-3$.
   Et la matrice Hessienne en (x,y) vaut : $H(x,y)=\nabla^2 f(x,y)=\begin{pmatrix}6x&-3\\-3&6y\end{pmatrix}$

   b) Les valeurs propres d'une matrice H sont les réels λ pour lesquels $H-\lambda I$ est non inversible.

— Au point $(0,0)$:

$$H\,(0,0)-\lambda I=\begin{pmatrix}0&3\\3&0\end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\lambda&-3\\-3&-\lambda\end{pmatrix}.$$

Ainsi, λ est valeur propre de $H\,(0;0)$ ssi

$$det(H\,(0,0)-\lambda I)=\lambda^2-9=0\Leftrightarrow\lambda^2=9\Leftrightarrow\lambda=\pm3$$

Les deux valeurs propres de $H\,(0;0)$ sont 3 et -3 qui sont de signe opposés et donc :

<u>f n'a pas d'extremum au point $(0;0)$.</u>

— Au point $(1,1)$:

$$\text{On a : } H(1,1)=\nabla^2 f(1,1)=\begin{pmatrix}6&-3\\-3&6\end{pmatrix}$$

dont les valeurs propres sont les racines du polynôme :

$$det\,(H(1,1)-\lambda I_2)=det\left(\begin{pmatrix}6-\lambda&-3\\-3&6-\lambda\end{pmatrix}\right)=(6-\lambda)^2-3^2=(6-\lambda-3).(6-\lambda+3)=(3-\lambda)(9-\lambda)$$

Les deux valeurs propres de $H\,(0;0)$ sont 3 et 9 et sont strictement positives donc :

<u>f admet un minimum local en $(1,1)$ qui vaut $f(1,1)=-1$</u> .

4) <u>$f(1,1)=-1$ n'est pas un minimum global</u> puisque $f(0,-2)=-8<f(1,1)$.

Partie 2 : $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = f(x,1) = x^3 - 3x + 1.$

5) g étant un polynôme dérivable sur $\mathbb{R}$, ses variations sont données par le signe de sa dérivée :

$$\text{or : } : g'(x) = 3x^2 - 3 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \geq 1 \Leftrightarrow x \notin [-1,1]$$

D'où le tableau :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

On en déduit donc que :

* $\forall x \leqslant -1$, on a $g(x) \leqslant 3$ et donc que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 4 :
<u>l'équation $g(x) = n$ n'a pas de solution dans $]-\infty, 1]$</u>

* g réalise une bijection (car continue et strictement croissante sur cet intervalle) de $]1, +\infty[$ sur $]-1, +\infty[$.
Et comme tout entier naturel n supérieur ou égal à 4 appartient à $]-1, +\infty[$,
<u>l'équation $g(x) = n$ possède une unique solution dans $]1, +\infty[$, que l'on notera u_n.</u>

6) On note h la restriction de g à $[1, +\infty[$.

a) h réalise une bijection , continue et strictement croissante sur $]1, +\infty[$, sa bijection réciproque h^{-1} est elle aussi strictement croissante sur $]-1, +\infty[$, d'où son tableau de variation :

x	-1		$+\infty$
$h^{-1}(x)$	1	$\nearrow$	$+\infty$

b) Comme $u_n \in]1, +\infty[$, on a $g(u_n) = h(u_n) = n \Leftrightarrow u_n = h^{-1}(n)$, part conséquent :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} h^{-1}(n) = +\infty}$$

c) La définition de u_n donne $n = g(u_n) = u_n^3 - 3u_n + 1 = u_n^3 \left(1 - \dfrac{3}{u_n^2} - \dfrac{1}{u_n^3}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n^3$.

Par conséquent : $u_n^3 \underset{n\to+\infty}{\sim} n$ et, puisque l'équivalence est compatible avec les puissances : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n^{\frac{1}{3}}$

$\boxed{\text{Le réel } \alpha \text{ pour lequel on a : } u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n^\alpha \text{ est donc } \alpha = \dfrac{1}{3}}$.

Exercice 2

1) a) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{x^3}\exp\left(-\dfrac{1}{x^2}\right) & \text{si } x>0\\ 0 & \text{si } x\leqslant 0\end{cases}$

On vérifie les 3 conditions pour que f soit une fonction de densité :

• La fonction f est continue sur $]-\infty;0]$ car elle y est nulle, et elle est continue sur $]0;+\infty[$ par produits, quotients et composée de fonctions continues (les dénominateurs x^3 et x^2 ne s'annulent pas sur $\mathbb{R}^{+*}$ et exp est continue sur $\mathbb{R}$) .
Elle est donc continue sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, qui est $\mathbb{R}$ privé d'un nombre fini de points.

• Elle est positive sur $\mathbb{R}$ car elle est nulle sur $\mathbb{R}^-$ et positive sur $\mathbb{R}^+$ (comme produit de $\dfrac{2}{x^3}>0$ par une exponentielle).

• étude de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$:

Comme f est nulle sur $\mathbb{R}^-$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt=\int_0^{+\infty} f(t)dt=\int_0^{+\infty}\frac{2}{t^3}\exp\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt.$

On a affaire à une intégrale impropre en 0 et en ∞ car la fonction à intégrer est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Soient donc ϵ et A deux réels strictement positifs :

$$\int_\epsilon^A\frac{2}{t^3}\exp\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt=\left[\exp\left(-\frac{1}{t^2}\right)\right]_\epsilon^A=\exp\left(-\frac{1}{A^2}\right)-\exp\left(-\frac{1}{\epsilon^2}\right)\underset{\substack{\varepsilon\to 0\\ A\to+\infty}}{\longrightarrow} 1-0=1$$

L'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ est donc bien convergente est égale à 1 .

remarque : Pour respecter le programme à la lettre , il aurait fallu couper l'intégrale en 2 intégrales une seule fois impropre : $\int_0^{+\infty}\frac{2}{t^3}\exp\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt=\int_0^1\frac{2}{t^3}\exp\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt+\int_1^{+\infty}\frac{2}{t^3}\exp\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt.$

• $\boxed{f \text{ peut donc être considérée comme une densité d'une certaine variable aléatoire } Y}$.

b) On note F la fonction de répartition de Y. Par définition $F(x)=\displaystyle\int_{-\infty}^x f(t)dt.$

• Si $x\leqslant 0$: $F(x)=\displaystyle\int_{-\infty}^x 0\,dt=0.$

• Si $x>0$: $F(x)=\displaystyle\int_{-\infty}^0 f(t)\,dt+\int_0^x f(t)dt=\int_0^x\frac{2}{t^3}\exp\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt$ (intégrale impropre en 0).

Soit $\varepsilon>0$: $\displaystyle\int_\varepsilon^x\frac{2}{t^3}\exp\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt=\left[\exp\left(-\frac{1}{t^2}\right)\right]_\varepsilon^x=\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)-\exp\left(-\frac{1}{\epsilon^2}\right)\underset{\varepsilon\to0}{\longrightarrow}\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)-0.$

$$\boxed{\text{En conclusion : } F(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x\leqslant 0\\ \exp\left(-\dfrac{1}{x^2}\right) & \text{si } x>0\end{cases}}$$

On pourra remarquer au passage que F est alors continue en 0 , ce qui est de bonne augure pour une fonction de répartition de variable à densité . Et pour conforter encore un peu plus ce résultat obtenu , on remarquera que ses limite en $\pm\infty$ sont compatibles avec celles d'une fonction de répartition.

2) a) $g(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{x^3} & \text{si } x\geq 1\\ 0 & \text{si } x<1\end{cases}$. On vérifie les 3 conditions pour que f soit une fonction de densité :

• La fonction g est continue sur $]-\infty;1[$ car elle y est nulle, et elle est continue sur $[1;+\infty[$ en tant qu' inverse d'une fonction continue (x^3 ne s'annule pas sur $[1;+\infty[$) .

Elle est donc continue sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$, qui est $\mathbb{R}$ privé d'un nombre fini de points.

- Elle est <u>positive sur $\mathbb{R}$</u> car elle est nulle sur $]-\infty;1[$ et positive sur $[1;+\infty[$ (puisque $\dfrac{2}{x^3}>0$).
- étude de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\,dt$:

  Comme g est nulle sur $]-\infty;1[$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\,dt=\int_{1}^{+\infty} f(t)dt=\int_{1}^{+\infty}\frac{2}{t^3}\,dt.$

  On a ici affaire à une intégrale <u>impropre en ∞</u> car la fonction à intégrer est continue sur $[1;+\infty[$.

  Soit donc un réel $A>1$: $\displaystyle\int_1^A \frac{2}{t^3}\,dt=\left[-\frac{1}{t^2}\right]_1^A=-\frac{1}{A^2}-(-1)\underset{A\to+\infty}{\longrightarrow}1$

  L'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\,dt$ est donc bien <u>convergente est égale à 1</u> .
- $\boxed{g \text{ peut donc être considérée comme une densité d'une certaine variable aléatoire } X}$.

b) On note G la fonction de répartition de X. Par définition $G(x)=\displaystyle\int_{-\infty}^{x} g(t)\,dt.$

- Si $x<1$: $G(x)=\displaystyle\int_{-\infty}^{x} 0\,dt=0.$
- Si $x\geqslant 1$: $G(x)=\displaystyle\int_{-\infty}^{1} g(t)\,dt+\int_1^x g(t)dt=\int_1^x\frac{2}{t^3}\,dt=\left[-\frac{1}{t^2}\right]_1^x=1-\frac{1}{x^2}.$

$$\boxed{\text{En conclusion : } G(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x<1\\ 1-\dfrac{1}{x^2} & \text{si } x\geq 1\end{cases}}$$

On pourra remarquer au passage que G est alors (en autres propriétés) croissante sur $\mathbb{R}$ et continue en 1 , ce qui est de bonne augure pour une fonction de répartition de variable à densité .

3) On pose $M_n=max(X_1,\dots,X_n)$ et on note G_n sa fonction de répartition .

a) Par définition, on a :

$$\begin{aligned}\forall x\in\mathbb{R}, G_n(x)&=P(M_n\leqslant x)=P(max(X_1,\dots,X_n)\leqslant x)\\&=P([X_1\leqslant x]\cap\dots\cap[X_n\leqslant x])\\&=P(X_1\leqslant x)\times\dots\times P(X_n\leqslant x)\qquad\text{car les } X_i \text{ sont indépendantes}\\&=G(x)\times\dots\times G(x)=(G(x))^n\qquad\text{car les } X_i \text{ suivent la loi de } X\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Par conséquent : } G_n(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x<1\\ \left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)^n & \text{si } x\geq 1\end{cases}}$$

b) On pose $Y_n=\dfrac{M_n}{\sqrt{n}}$. La fonction de répartition F_n de Y_n est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x\in\mathbb{R}, F_n(x)=P(Y_n\leqslant x)=P(\frac{M_n}{\sqrt{n}}\leqslant x)=P(M_n\leqslant\sqrt{n}x)=G_n(\sqrt{n}.x)$$

Or $\forall x\in\mathbb{R}$, $\quad\sqrt{n}.x\geq 1\quad$ si, et seulement si, $\quad x\geq\dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

Donc • si $x<\dfrac{1}{\sqrt{n}}$, alors $F_n(x)=G_n(\sqrt{n}.x)=0$

et • si $x\geq\dfrac{1}{\sqrt{n}}$, alors $F_n(x)=G_n(\sqrt{n}.x)=\left(1-\dfrac{1}{(\sqrt{n}.x)^2}\right)^n$

$$\boxed{\text{Finalement : } \forall x\in\mathbb{R}, F_n(x)=\begin{cases}\left(1-\dfrac{1}{nx^2}\right)^n & \text{si } x\geq\dfrac{1}{\sqrt{n}}\\ 0 & \text{si } x<\dfrac{1}{\sqrt{n}}\end{cases}}$$

4) Pour tout réel x négatif ou nul , on a $x < \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} F_n(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} 0 = 0}$

5) a) Soit x un réel strictement positif.
On aura $F_n(x) = \left(1 - \dfrac{1}{nx^2}\right)^n$ dès que $x \geq \dfrac{1}{\sqrt{n}} \Leftrightarrow n \geq \dfrac{1}{x^2} \Leftrightarrow n \geq \dfrac{1}{x^2}$.

Comme $n \in \mathbb{N}$, dès que n est supérieur strictement à la partie entière de $\dfrac{1}{x^2}$, on aura $\boxed{F_n(x) = \left(1 - \dfrac{1}{nx^2}\right)^n}$

b) L' équivalent est usuel : $\boxed{\ln(1+u) \underset{u \to 0}{\sim} u}$.

Pour tout réel x strictement positif , si n est supérieur strictement à la partie entière de $\dfrac{1}{x^2}$:

$$F_n(x) = \left(1 - \frac{1}{nx^2}\right)^n = exp\left(n \ln\left(1 - \frac{1}{nx^2}\right)\right)$$

Et lorsque $n \to +\infty$, on a $u = -\dfrac{1}{nx^2} \to 0$, donc $\ln\left(1 - \dfrac{1}{nx^2}\right) \underset{n \to \infty}{\sim} -\dfrac{1}{nx^2}$.
On en conclut : $n \ln\left(1 - \dfrac{1}{nx^2}\right) \underset{n \to \infty}{\sim} -n\dfrac{1}{nx^2} = -\dfrac{1}{x^2} \underset{n \to +\infty}{\to} -\dfrac{1}{x^2}$.

$$\boxed{\text{et enfin : } \lim_{n \to +\infty} F_n(x) = exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)}$$

6) D'après ce qui précède , $\lim\limits_{n \to +\infty} F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \exp\left(-\dfrac{1}{x^2}\right) & \text{si } x > 0 \end{cases}$.
On a donc : $\forall x \in \mathbb{R}, \lim\limits_{n \to +\infty} F_n(x) = F(x)$, où F est la fonction de répartition de Y.

On peut en conclure que la suite $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire dont la loi est celle de Y.

Exercice 3

On considère un nombre réel a élément de $]0, 1[$ et l'endomorphisme f_a de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est $M_a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1-a & a & 0 \\ 0 & 1-a & a \end{pmatrix}$.

1) a) M_a est une matrice triangulaire donc ses valeurs propres ont sur sa diagonale .
1 et a sont donc les valeurs propres de M_a. On rappelle que $a \neq 1$.

b) • Notons $E_1 = \{X \in \mathbb{R}^3 / M_a X = X\}$, l'espace propre associé à la valeur propre 1 .

$$M_a X = X \Leftrightarrow (M_a - I)X = 0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 0x + 0y + 0z = 0 \\ (1-a)x + (a-1)y + 0z = 0 \\ 0x + (1-a)y + (a-1)z = 0 \end{array}\right. \underset{a \neq 1}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{l} 0 = 0 \\ x - y = 0 \\ y - z = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \{x = y = z$$

Donc 1 est bien valeur propre de M_a et son sous-espace propre associé est

$$E_1 = \left\{\begin{pmatrix} x \\ x \\ x \end{pmatrix} / x \in \mathbb{R}\right\} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

• Notons de même $E_a = \{X \in \mathbb{R}^3 / M_a X = aX\}$, l'espace propre associé à la valeur propre 1 .

$$M_a X = aX \Leftrightarrow (M_a - aI)X = 0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} (1-a)x + 0y + 0z = 0 \\ (1-a)x + 0y + 0z = 0 \\ 0x + (1-a)y + 0z = 0 \end{array}\right. \underset{a \neq 1}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 0 \\ y = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \\ z \in \mathbb{R} \end{array}\right.$$

Donc a est bien valeur propre de M_a et son sous-espace propre associé est

$$E_a = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} / z \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

c) Comme M_a admet 2 valeurs propres distinctes et que $\dim(E_1) + \dim(E_a) = 1 + 1 \neq 3$,alors $\underline{M_a \text{ n'est pas diagonalisable}}$.

2) On note $E = \text{Vect}\left(I, M_a, M_a^2\right)$.

a) La dimension de E est le rang de la famille $\left(I, M_a, M_a^2\right)$. Cette famille est-elle libre ?

On a $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $M_a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1-a & a & 0 \\ 0 & 1-a & a \end{pmatrix}$ et $M_a^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1-a^2 & a^2 & 0 \\ (1-a)^2 & 2a(1-a) & a^2 \end{pmatrix}$.

On peut tout écrire mais aussi ne considérer que la première colonne des matrices :

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ , \ xI + yM_a + zM_a^2 = 0 \underset{(*)}{\Longrightarrow} \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 0x + (1-a)y + (1-a^2)z = 0 \\ 0x + 0y + (1-a)^2 z = 0 \end{cases}$$

(*) : Comme on n'a pris que la première colonne , on n'a pas l'équivalence mais l'implication nous suffit .

Ce système étant triangulaire avec 3 pivots non nuls (car $a \neq 1$), sa seule solution est $x = y = z = 0$.

Ce qui montre que $\boxed{\text{la famille } \left(I, M_a, M_a^2\right) \text{ est libre}}$. On en déduit que c'est une base de E.

Et comme elle est constituée de 3 éléments, on a $\boxed{\dim(E) = 3}$.

b) Si $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $K = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ alors $K^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $JK^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Pour calculer $(M_a - I)(M_a - aI)^2$, on remarque que $M_a - I = (1-a)J$ et $M_a - aI = (1-a)K$.

Ce qui donne alors $\boxed{(M_a - I)(M_a - aI)^2 = (1-a)J(1-a)^2K^2 = (1-a)^3JK^2 = 0}$.

c) On a

$$\begin{aligned} 0 = (M_a - I)(M_a - aI)^2 &= (M_a - I)(M_a^2 - 2aM_a + a^2 I) \\ &= M_a^3 - 2aM_a^2 + a^2 M_a - M_a^2 + 2aM_a - a^2 I \\ &= M_a^3 - (2a+1)M_a^2 + (a^2 + 2a)M_a - a^2 I \end{aligned}$$

Donc $M_a^3 = (2a+1)M_a^2 - a(a+2)M_a + a^2 I$. Et $\boxed{M_a^3 \text{ appartient bien à } E}$.

3) a) La question aurait due être posée ainsi : Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \text{on a } \mathcal{P}(n) : \exists ! (u_n, v_n, w_n) \text{ tel que } M_a^n = u_n M_a^2 + v_n M_a + w_n I$$

Raisonnons par récurrence :

• Pour $n = 0$, On a $M_a^0 = I = 0M_a^2 + 0M_a + 0I$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie avec $(u_0, v_0, w_0) = (0, 0, 1)$.
(On vérifierait aisément aussi que $(u_1, v_1, w_1) = (0, 1, 0)$ et $(u_2, v_2, w_2) = (1, 0, 0)$.)

• Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie. Alors

$$\begin{aligned} \text{alors } M_a^{n+1} = M_a . M_a^n &= M_a(u_n M_a^2 + v_n M_a + w_n I) \quad (\text{ car} \mathcal{P}(n) \text{ est vraie }) \\ &= u_n M_a^3 + v_n M_a^2 + w_n M_a \\ &= u_n \left((2a+1)M_a^2 - a(a+2)M_a + a^2 I\right) + v_n M_a^2 + w_n M_a \\ &= \left((2a+1)u_n + v_n\right) M_a^2 + \left(-a(a+2)u_n + w_n\right) M_a + a^2 u_n I \\ &= u_{n+1} M_a^2 + v_{n+1} M_a + w_{n+1} I \end{aligned}$$

Ce qui montre que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, en posant $\begin{cases} u_{n+1} = (2a+1)u_n + v_n \\ v_{n+1} = -a(a+2)u_n + w_n \\ w_{n+1} = a^2 u_n \end{cases}$

Ainsi la propriété est bien vérifiée pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) Et pourtant les relation de récurrence et l'initialisation à $(u, v, w) = (0, 0, 1)$ semblent correctes!!

```
1. n=input('entrez une valeur pour n :')
2. a=input('entrez une valeur pour a :')
3. u=0
4. v=0
5. w=1
6. for k=1 :n
7. u=(2*a+1)*u+v
8. v=-a*(a+2)*u+w
9. w=a*a*u 10. end
11. disp(w,v,u)
```

Ce qui cloche c'est que, aux lignes 8 et 9 , pour calculer les nouvelles valeurs de v et w , on utilise la valeur de u qui a déjà été changée à la ligne 7 .
Et donc au lieu de calculer $v_{n+1} = -a(a+2)u_n + w_n$ et $w_{n+1} = a^2 u_n$,
on calcule $v_{n+1} = -a(a+2)u_{\mathbf{n+1}} + w_n$ et$w_{n+1} = a^2 u_{n+1}$!!!

c) Il aurait fallu sauvegarder la valeur de u qui sert à calculer .

```
n=input('entrez une valeur pour n :')
a=input('entrez une valeur pour a :')
u=0
v=0
w=1
for k=1 :n
sauv=u
u=(2*a+1)*u+v
v=-a*(a+2)*sauv +w
w=a*a*sauv end
disp(w,v,u)
```

4)

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, \text{ on a : } u_{n+3} &= (2a+1)u_{n+2} + v_{n+2} \\ &= (2a+1)u_{n+2} - a(a+2)u_{n+1} + w_{n+1} \\ &= (2a+1)u_{n+2} - a(a+2)u_{n+1} + a^2 u_n \end{aligned}$$

On admet que l'on peut en déduire u_n, pour tout entier naturel n, sous la forme :

$$u_n = \frac{(n-1)a^n - na^{n+1} + 1}{(a-1)^2}$$

5) a) On a admis : $u_n = \dfrac{(n-1)a^n - na^{n+1} + 1}{(a-1)^2}$, donc pour déterminer $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$, il nous faut déterminer $\lim\limits_{n\to\infty} (n-1)a^n$ et $\lim\limits_{n\to\infty} na^{n+1}$.

De façon classique, on a : $(n-1)a^n = e^{\ln(n-1)} e^{n\ln(a)} = e^{\ln(n-1)+n\ln(a)} = e^{n\left(\frac{\ln(n-1)}{n} + \ln(a)\right)}$

Or $\frac{\ln(n-1)}{n} + \ln(a) \longrightarrow \ln a < 0$ donc $n\left(\frac{\ln(n-1)}{n} + \ln(a)\right) \longrightarrow -\infty$ et donc $\boxed{(n-1)a^n =\!\!\longrightarrow 0}$.

On démontrerait de même que : $\boxed{na^{n+1} =\!\!\longrightarrow 0}$

En compilant ces résultats , il vient $\boxed{\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \dfrac{(n-1)a^n - na^{n+1}+1}{(a-1)^2} = \dfrac{1}{(a-1)^2}}$

Ensuite, $w_{n+1} = a^2 u_n \to a^2 \dfrac{1}{(a-1)^2}$ donne $\boxed{\lim_{n\to\infty} w_n = \dfrac{a^2}{(a-1)^2}}$

et enfin : $v_{n+1} = -a(a+2)u_n + w_n \to \dfrac{-a(a+2)}{(a-1)^2} + \dfrac{a^2}{(a-1)^2}$ donne $\boxed{\lim_{n\to\infty} v_n = \dfrac{-2a}{(a-1)^2}}$

b)

$$\begin{aligned}
\text{On a alors : } L_a = \lim_{n\to\infty} M_a^n &= \left(\lim_{n\to\infty} u_n\right) M_a^2 + \left(\lim_{n\to\infty} v_n\right) M_a + \left(\lim_{n\to\infty} w_n\right) I \\
&= \frac{1}{(a-1)^2} M_a^2 + \frac{-2a}{(a-1)^2} M_a + \frac{a^2}{(a-1)^2} I \\
&= \frac{1}{(a-1)^2}\left(M_a^2 - 2aM_a + a^2 I\right) \\
&= \frac{1}{(a-1)^2}(M_a - aI)^2
\end{aligned}$$

c) calcul de L_a^2 : On se souvient (non ?) que $M_a - aI = (1-a)K$, donc

$$L_a = \frac{1}{(a-1)^2}(M_a - aI)^2 = \left(\frac{M_a - aI}{a-1}\right)^2 = K^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Un calcul simple donne alors

$$\boxed{L_a^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = L_a}$$

6) Soit φ_a l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est L_a.
En utilisant les correspondances dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ entre f_a et M_a, entre φ_a et L_a, puis entre x et X .

a) « $\forall x \in \mathrm{Ker}\,(f_a - Id)\,, \varphi_a(x) = x$ » signifie : « $\forall X \in \mathbb{R}^3, (M_a - I)X = 0 \Rightarrow L_a X = X$ ».

Soit donc un vecteur $X \in \mathbb{R}^3$ tel que $M_a X = X$,

$$\begin{aligned}
\text{On a alors : } L_a X &= \frac{1}{(a-1)^2}\left(M_a^2 - 2aM_a + a^2 I\right) X = \frac{1}{(a-1)^2}\left(M_a^2 X - 2aM_a X + a^2 X\right) X \\
&= \frac{1}{(a-1)^2}\left(X - 2aX + a^2 X\right) = \frac{1}{(a-1)^2}\left(1 - 2a + a^2\right) X \\
&= \frac{1}{(a-1)^2}(1-a)^2 X = X
\end{aligned}$$

b) $\forall x \in \mathrm{Im}\,(f_a - Id)\,, \varphi_a(x) = 0$ signifie :

$$\forall X \in \mathbb{R}^3, \quad \text{« il existe } Y \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } (M_a - I)Y = X \text{ »} \Longrightarrow \text{« } L_a X = 0 \text{ »}$$

Soit donc un vecteur $X \in \mathbb{R}^3$ tel qu' il existe $Y \in \mathbb{R}^3$ vérifiant $(M_a - I)Y = X$.

En se souvenant que $M_a - I = (1-a)J$, on obtient $X = (M_a - I)Y = (1-a)JY$ et donc

$$\boxed{L_a X = L_a.(1-a)JY = K^2.(1-a)JY = (1-a)K^2 JY = 0}$$

(car on vérifie aisément que $K^2 J$ est aussi égale à0) .

Problème

On dispose de deux pièces identiques donnant pile avec la probabilité p, élément de $]0,1[$, et face avec la probabilité $q = 1 - p$.

Partie 1 : un jeu naïf

1) Étude de la première manche.

a) • Les variables aléatoires X_1 et Y_1 correspondent au rang d'apparition pour la première fois de l'événement « obtenir pile » , qui est de probabilité p, au cours d'une succession d'épreuves identiques.

X_1 et Y_1 suivent donc la loi géométrique de paramètre p :

$$X_1(\Omega) = Y_1(\Omega) = \mathbb{N}^* \qquad \forall k \in \mathbb{N}^* \quad P(X_1 = k) = P(Y_1 = k) = (1-p)^{k-1}p = q^{k-1}p$$

La première manche dure éternellement si, et seulement si, A et B n'obtiennent jamais pile .

Donc $P($« première manche éternelle »$) = P\left(\text{« A jamais pile »}\right) \cap$ « B jamais pile »$)$.
Comme chacun sait (?) : $P\left(\text{« A n'a jamais pile »}\right) = 0$.
En effet :

$$\begin{aligned} P\left(\text{« A n'a jamais pile »}\right) &= 1 - P\left(\text{« A obtient un pile »}\right) \\ &= 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} P(X_1 = k) \\ &= 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} q^{k-1}p \\ &= 1 - p\sum_{k=1}^{+\infty} q^{k-1} \\ &= 1 - p\frac{1}{1-q} = 1 - 1 = 0 \end{aligned}$$

On en déduit alors

$$\boxed{P(\text{« première manche éternelle »}) = 0}$$

b) L'événement E_1 est réalisé si, et seulement si , X_1 et Y_1 prennent la même valeur, donc $\boxed{E_1 = [X_1 = Y_1]}$.

c) D'après la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $([Y_1 = i])_{i\in\mathbb{N}^*}$, :

$$P(E_1) = \sum_{i=1}^{+\infty} P(E_1 \cap [Y_1 = i] = \sum_{i=1}^{+\infty} P([X_1 = Y_1] \cap [Y_1 = i] = \sum_{i=1}^{+\infty} P([X_1 = i] \cap [Y_1 = i] = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X_1 = i)P(Y_1 = i).$$

La dernière égalité étant obtenue par indépendance de X_1 et Y_1 .

$$\text{On en déduit : } \underline{P(E_1)} = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X_1 = i)P(Y_1 = i) = \sum_{k=1}^{+\infty} q^{k-1}pq^{k-1}p = p^2\sum_{k=1}^{+\infty}\left(q^2\right)^{k-1} = p^2\frac{1}{1-q^2}$$
$$= \frac{p^2}{(1-q)(1+q)} = \boxed{\frac{p}{1+q}}$$

d) Les joueurs A et B ont les mêmes pièces et les lancent dans les mêmes conditions , donc les probabilités que A ou B gagnent sont les mêmes .

On a donc $P(G_1) = P(H_1)$ et $\boxed{G_1 \text{ et } H_1 \text{ sont équiprobables}}$.

A ou B gagne ou alors il y a égalité , donc les événements G_1,H_1 et E_1 forment un système complets d'événements .
On en déduit

$$1 = P(G_1) + P(H_1) + P(E_1) = 2P(G_1) + P(E_1)$$

Et par conséquent :

$$\underline{P(G_1)} = \frac{1}{2}(1 - P(E_1)) = \frac{1}{2}(1 - \frac{p}{1+q}) = \frac{1}{2}(\frac{1+q-p}{1+q}) = \frac{1}{2}(\frac{2q}{1+q}) = \boxed{\frac{q}{1+q}}$$

2) Calcul de la probabilité de l'événement G.

a) L'événement G_n est réalisé si, et seulement si, les n-1 premières manches ont donné égalité et si A obtient pile avant B à la n-ième manche, donc : $\boxed{G_n = E_1 \cap \ldots \cap E_{n-1} \cap (X_n \leqslant Y_n).}$

b) Pour entier $k \geq 2$,

$$P_{E_1 \ldots E_{k-1}}(E_k) = P(\text{ « égalité à la k-ième manche »}) = P(E_1) = \boxed{\frac{p}{1+q}}$$

D'après la formule des probabilités composées :

$$\begin{aligned}
\forall n \geq 2, \quad P(G_n) &= P(E_1 \cap \ldots \cap E_{n-1} \cap (X_n \leqslant Y_n)) \\
&= P(E_1)P_{E_1}(E_2) \ldots P_{E_1 \ldots E_{n-2}}(E_{n-1})P_{E_1 \ldots E_{n-1}}(X_n \leqslant Y_n) \\
&= \frac{p}{1+q} \cdots \frac{p}{1+q}\frac{q}{1+q} \\
&= \left(\frac{p}{1+q}\right)^{n-1} \frac{q}{1+q}
\end{aligned}$$

c) Pour $n = 1$, on a bien $\left(\frac{p}{1+q}\right)^{1-1} \frac{q}{1+q} = \frac{q}{1+q} = P(G_1)$.

d) A gagne lorsque qu'il gagne une manche numéro n, pour un n dans $\mathbb{N}^*$, on a donc $\boxed{G = \overset{+\infty}{\underset{n=1}{\cup}} G_n}$.

Les événements $(G_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont 2 à 2 incompatibles (car A ne peut pas gagner à deux manche différentes) , on a donc

$$\begin{aligned}
\underline{P(G)} = P(\overset{+\infty}{\underset{n=1}{\cup}} G_n) &= \sum_{n=1}^{+\infty} P(G_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{p}{1+q}\right)^{n-1} \frac{q}{1+q} = \frac{q}{1+q} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{p}{1+q}\right)^{n-1} \\
&= \frac{q}{1+q} \frac{1}{1 - \frac{p}{1+q}} = \frac{q}{1+q} \frac{1}{\frac{1+q-p}{1+q}} = \frac{q}{1+q-p} = \frac{q}{2q} = \boxed{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

e) Par symétrie (A et B ont autant de chance de gagner l'un que l'autre) , on obtient la probabilisé de l'événement H :

$$P(H) = P(\text{« B gagne à ce jeu »}) = P(\text{« A gagne à ce jeu »}) = P(G) = \frac{1}{2}$$

et donc :

$$P(\text{ ce jeu a une fin }) = P(\text{A ou B gagne }) = P(G) + P(H) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

puis finalement :

$$\boxed{P(E) = P(\text{ ce jeu s'éternise }) = 0}$$

.

Partie 2 : un autre jeu

En parallèle du jeu précédent, A parie sur le fait que la manche gagnée par le vainqueur le sera par un lancer d'écart et B parie le contraire.

3) a) D'après la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $(X_1 = i)_{i\in\mathbb{N}^*}$:

$$\begin{aligned}
\underline{P\left(Y_1 = X_1 + 1\right)} &= \sum_{i=1}^{+\infty} P([Y_1 = X_1 + 1] \cap [X_1 = i]) = \sum_{i=1}^{+\infty} P([Y_1 = i + 1] \cap [X_1 = i]) \\
&= \sum_{i=1}^{+\infty} P(Y_1 = i + 1)P(X_1 = i) \quad \text{ par indépendance de} X_1 \text{ et } Y_1 \\
&= \sum_{i=1}^{+\infty} q^i p q^{i-1} p = p^2 q \sum_{i=1}^{+\infty} \left(q^2\right)^{i-1} = p^2 q \frac{1}{1-q^2} \\
&= \frac{p^2 q}{(1-q)(1+q)} = \boxed{\frac{pq}{1+q}}
\end{aligned}$$

b) La probabilité u que l'un des deux joueurs gagne à la première manche par un lancer d'écart est :

$$u = P\left(Y_1 = X_1 + 1\right) + P\left(X_1 = Y_1 + 1\right).$$

Donc, toujours par symétrie :

$$u = P\left(Y_1 = X_1 + 1\right) + P\left(X_1 = Y_1 + 1\right) = \frac{pq}{1+q} + \frac{pq}{1+q} = \frac{2pq}{1+q}.$$

4) a) On a $K_n = E_1 \cap \ldots \cap E_{n-1} \cap \left[(X_n = Y_n + 1) \ \cup (Y_n = X_n + 1)\right].$

b) Donc d'après la formule des probabilités composées :

$$\begin{aligned}
\underline{P(K_n)} &= P(E_1 \cap \ldots \cap E_{n-1} \cap ([(X_n = Y_n + 1) \ \cup (Y_n = X_n + 1)]) \\
&= P(E_1) P_{E_1}(E_2) \ldots P_{E_1 \ldots E_{n-2}}(E_{n-1}) P_{E_1 \ldots E_{n-1}}([(X_n = Y_n + 1) \ \cup (Y_n = X_n + 1)]) \\
&= \frac{p}{1+q} \cdots \frac{p}{1+q} \frac{2pq}{1+q} \\
&= \boxed{\left(\frac{p}{1+q}\right)^{n-1} \frac{2pq}{1+q}}.
\end{aligned}$$

5) A gagne ce pari s'il le gagne à une manche numéro n, pour un des n de $\mathbb{N}^*$. On a donc $\boxed{K = \bigcup_{n=1}^{+\infty} K_n}$.

Les événements $(K_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont 2 à 2 incompatibles , donc :

$$\begin{aligned}
\underline{P(K)} &= \sum_{n=1}^{+\infty} P(K_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{p}{1+q}\right)^{n-1} \frac{2pq}{1+q} = \frac{2pq}{1+q} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{p}{1+q}\right)^{n-1} \\
&= \frac{2pq}{1+q} \frac{1}{1 - \dfrac{p}{1+q}} = \frac{2pq}{1+q} \frac{1}{\dfrac{1+q-p}{1+q}} = \frac{2pq}{1+q-p} = \frac{2pq}{2q} = \boxed{p}
\end{aligned}$$

Partie 3 : informatique

On rappelle que la commande `grand(1,1,'geom',p)` permet à `Scilab` de simuler une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre p.

6) Compléter le script `Scilab` suivant pour qu'il simule l'expérience décrite dans la partie 1 et affiche le nom du vainqueur du premier jeu ainsi que le numéro de la manche à laquelle il a gagné.

```
p=input('entrez une valeur pour p')
c=1
X=grand(1,1,'geom',p)
Y=grand(1,1,'geom',p)
while X==Y                 //  tant qu'il y a égalité ...
   X=grand(1,1,'geom',p)   // ...on recommence une manche ...
   Y=grand(1,1,'geom',p)
   c=c+1        //....et on incrémente le compteur des manches
end
if X<Y then disp ('A gagne ')
       else disp ('B gagne ')
end
disp(c)
```

7) A gagne le 2-ième jeu lorsque X=Y+1 ou Y=X+1 , c'est à dire loursque $|X-Y|=1$.

   Pour simuler le deuxième jeu et en donner le nom du vainqueur, on rajoute :

if abs(X-Y)==1 then disp('A gagne le deuxième jeu') else disp('A gagne le deuxième jeu') end