EML 2021

Problème 1

On considère la fonction φ définie sur $]-\infty, 1]$ par :

$$\forall x \in]-\infty, 1], \quad \varphi(x) = \begin{cases} x + (1-x)\ln(1-x) & \text{si } x < 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

Partie A : Étude de la fonction φ

1. Montrer que la fonction φ est continue sur $]-\infty, 1]$.

Démonstration.
La fonction φ est continue :

- sur $]-\infty, 1[$ en tant que somme et produit de fonctions continues sur $]-\infty, 1[$.
  Notons que la fonction $g : x \mapsto \ln(1-x)$ est continue sur $]-\infty, 1[$ car elle est la composée $g = g_2 \circ g_1$ de :
  - × $g_1 : x \mapsto 1 - x$ qui est :
    - continue sur $]-\infty, 1[$,
    - telle que : $g_1(]-\infty, 1[) \subset]0, +\infty[$.
  - × $g_2 : x \mapsto \ln(x)$ qui est continue sur $]0, +\infty[$.
- en 1. En effet :
  - × d'une part, avec le changement de variable $u = 1 - x$:

    $$\lim_{x \to 1} (1-x)\ln(1-x) = \lim_{u \to 0} u \ln(u) = 0 \qquad \textit{(par croissances comparées)}$$

    D'où : $\lim\limits_{x \to 1} \varphi(x) = 1 + 0 = 1$.
  - × d'autre part : $\varphi(1) = 1$.

  On obtient bien : $\lim\limits_{x \to 1} \varphi(x) = \varphi(1)$.

$$\boxed{\text{La fonction } \varphi \text{ est donc continue sur }]-\infty, 1].}$$

□

2. a) Justifier que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, 1[$ et calculer, pour tout $x \in]-\infty, 1[$, $\varphi'(x)$.

Démonstration.

- La fonction φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, 1[$ en tant que somme et produit de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, 1[$.
- Soit $x \in]-\infty, 1[$.

$$\varphi'(x) = 1 + (-1) \times \ln(1-x) + (1-x) \times \left(-\frac{1}{1-x}\right) = \cancel{1} - \ln(1-x) - \cancel{1}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \varphi' : x \mapsto -\ln(1-x).}$$

□

b) En déduire les variations de φ sur $]-\infty, 1]$.

Démonstration.

- Soit $x \in\,]-\infty, 1[$.

$$\begin{array}{rcl} \varphi'(x) > 0 & \Leftrightarrow & -\ln(1-x) > 0 \\ & \Leftrightarrow & \ln(1-x) < 0 \\ & \Leftrightarrow & 1 - x < \mathrm{e}^0 = 1 \quad \textit{(par stricte croissance de la fonction } \exp \textit{ sur } \mathbb{R}\textit{)} \\ & \Leftrightarrow & 0 < x \end{array}$$

- On obtient le tableau de variations suivant.

x	$-\infty$		0		1
Signe de $\varphi'(x)$		$-$	0	$+$	
φ		$\searrow$	0	$\nearrow$	1

Détaillons le calcul de $\varphi(0)$:

$$\varphi(0) \ = \ 0 + (1-0)\ln(1-0) \ = \ \ln(1) \ = \ 0$$

□

c) La fonction φ est-elle dérivable en 1 ?

Démonstration.
Soit $x \in\,]-\infty, 1[$.

$$\begin{array}{rcl} \tau_1(\varphi)(x) & = & \dfrac{\varphi(x) - \varphi(1)}{x-1} \\[2mm] & = & \dfrac{x + (1-x)\ln(1-x) - 1}{x-1} \\[2mm] & = & \dfrac{x - 1 - (x-1)\ln(1-x)}{x-1} \\[2mm] & = & \dfrac{\cancel{(x-1)}\big(1 - \ln(1-x)\big)}{\cancel{x-1}} \\[2mm] & = & 1 - \ln(1-x) \end{array}$$

Or, avec le changement de variable $u = 1 - x$:

$$\lim_{x \to 1} 1 - \ln(1-x) \ = \ \lim_{u \to 0} 1 - \ln(u) \ = \ +\infty$$

La fonction taux d'accroissement $\tau_1(\varphi)$ n'admet donc pas de limite finie en 1.

$$\boxed{\text{On en conclut que la fonction } \varphi \text{ n'est pas dérivable en } 1.}$$

□

3. Calculer la limite de φ en $-\infty$.

Démonstration.
Soit $x \in]-\infty, 0[$.

$$\begin{array}{rcl} \varphi(x) & = & x + (1-x)\ \ln(1-x) \\ & = & x + \ln(1-x) - x\ \ln(1-x) \\ & = & x\ \ln(1-x) \left(\dfrac{1}{\ln(1-x)} + \dfrac{1}{x} - 1 \right) \end{array}$$

(la mise en facteur est licite car, comme $x < 0$: $x\ \ln(1-x) \neq 0$)

Or :

- avec le changement de variable $u = 1 - x$: $\lim\limits_{x \to -\infty} \ln(1-x) = \lim\limits_{u \to +\infty} \ln(u) = +\infty$.

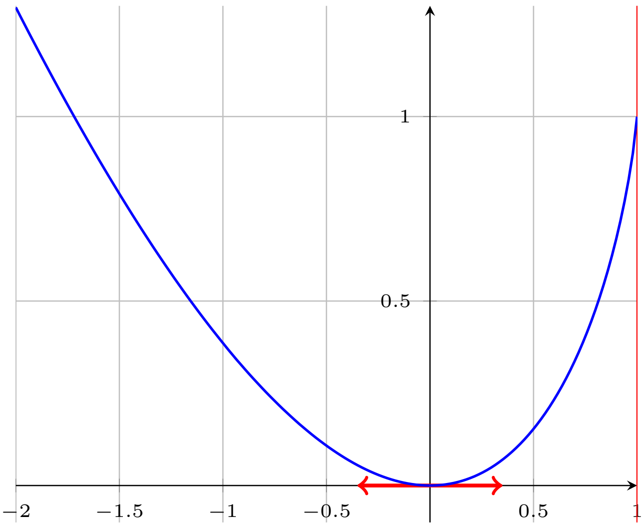
  D'où : $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{\ln(1-x)} = 0$.
- $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x} = 0$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} x\ \ln(1-x) = -\infty$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \lim_{x \to -\infty} \varphi(x) = +\infty.}$$

□

4. Tracer l'allure de la courbe représentative de φ en soignant le tracé aux voisinages de 0 et 1.

Démonstration.



Commentaire

- D'après la question ***2.c)*** : $\lim\limits_{x \to 1} \tau_1(\varphi)(x) = +\infty$. On en déduit que la droite d'équation $x = 1$ est tangente à la courbe représentative de φ en 1.
- Comme la fonction φ est seulement définie à gauche de 1, il s'agit même d'une demi-tangente en 1.

□

5. a) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 t\ \ln(t)\ dt$ converge et calculer sa valeur.

Démonstration.

- La fonction $t \mapsto t\ \ln(t)$ est continue sur $]0,1]$.
  L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 t\ \ln(t)\ dt$ est donc uniquement impropre en 0.
- Soit $A \in\ ]0,1]$.
  On procède par intégration par parties (IPP).

$$\left|\begin{array}{rclrcl} u(t) & = & \ln(t) & u'(t) & = & \dfrac{1}{t} \\[2ex] v'(t) & = & t & v(t) & = & \dfrac{1}{2}\ t^2 \end{array}\right.$$

  Cette IPP est valide car les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[A,1]$.
  On obtient :

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\int_A^1 t\ \ln(t)\ dt & = & \left[\ \dfrac{1}{2}\ t^2\ \ln(t)\ \right]_A^1 - \displaystyle\int_A^1 \dfrac{1}{t} \times \dfrac{1}{2}\ t^2\ dt \\[2ex] & = & \dfrac{1}{2}\ \big(\cancel{1^2\ \ln(1)} - A^2\ \ln(A)\big) - \dfrac{1}{2}\ \displaystyle\int_A^1 t\ dt \\[2ex] & = & -\dfrac{1}{2}\ A^2\ \ln(A) - \dfrac{1}{2}\ \left[\ \dfrac{1}{2}\ t^2\ \right]_A^1 \\[2ex] & = & -\dfrac{1}{2}\ A^2\ \ln(A) - \dfrac{1}{4}\ (1 - A^2) \end{array}$$

- On sait de plus :
  × d'une part, par croissances comparées : $\lim\limits_{A \to 0}\ A^2\ \ln(A) = 0$,
  × d'autre part : $\lim\limits_{A \to 0}\ A^2 = 0$.

> On en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 t\ \ln(t)\ dt$ est convergente et :
> $$\int_0^1 t\ \ln(t)\ dt = -\frac{1}{2} \times 0 - \frac{1}{4}\ (1-0) = -\frac{1}{4}.$$

□

b) En déduire : $\displaystyle\int_0^1 \varphi(x)\ dx\ =\ \frac{1}{4}.$

Démonstration.

- D'après la question ***1.***, la fonction φ est continue sur le segment $[0,1]$.
  L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \varphi(t)\ dt$ est donc bien définie.

- On calcule :

$$\begin{aligned}\int_0^1 \varphi(t)\, dt &= \int_0^1 t + (1-t)\,\ln(1-t)\, dt \\ &= \int_0^1 t\, dt + \int_0^1 (1-t)\,\ln(1-t)\, dt\end{aligned}$$

Notons qu'on peut bien appliquer la linéarité de l'intégrale car les intégrales $\displaystyle\int_0^1 \varphi(t)\, dt$ et $\displaystyle\int_0^1 t\, dt$ sont convergentes, et donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 (1-t)\,\ln(1-t)\, dt$ est bien convergente.

- Tout d'abord :

$$\int_0^1 t\, dt = \left[\frac{1}{2}\, t^2\right]_0^1 = \frac{1}{2}\,(1^2 - 0^2) = \frac{1}{2}$$

- Pour calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 (1-t)\,\ln(1-t)\, dt$ (dont on sait qu'elle est convergente), on effectue le changement de variable $\boxed{u = 1-t}$.

$$\left|\begin{array}{l} u = 1-t \quad \text{(et donc } t = 1-u) \\ \hookrightarrow du = -dt \quad \text{et} \quad dt = -du \\ \bullet\ t = 0 \ \Rightarrow\ u = 1 \\ \bullet\ t = 1 \ \Rightarrow\ u = 0 \end{array}\right.$$

Ce changement de variable est valide car $\varphi : u \mapsto 1-u$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$.
On obtient alors :

$$\int_0^1 (1-t)\,\ln(1-t)\, dt = \int_1^0 u\,\ln(u)\,(-\,du) = \int_0^1 u\,\ln(u)\, du = -\frac{1}{4}$$

où la dernière égalité est obtenue grâce à la question précédente.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \int_0^1 \varphi(t)\, dt = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}.}$$

Commentaire

- Le programme officiel stipule que « les changements de variable affines pourront être utilisés directement sur des intégrales sur un intervalle quelconque ». Pour autant, ce type de changement de variable ne peut se faire qu'après avoir démontré la convergence (ce qu'on a bien fait en premier lieu).
- Cela signifie aussi que, de manière générale, on ne peut effectuer de changement de variable directement sur une intégrale impropre : on doit se ramener au préalable sur une intégrale sur un segment.

□

Partie B : Étude de deux séries

Soit x un réel appartenant à $[0,1[$.

6. a) Vérifier, pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et tout t de $[0,x]$: $\dfrac{1}{1-t} - \sum\limits_{k=0}^{n-1} t^k \ = \ \dfrac{t^n}{1-t}$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $t \in [0,x]$. Comme $t \neq 1$:

$$\sum_{k=0}^{n-1} t^k \ = \ \frac{1-t^n}{1-t} \ = \ \frac{1}{1-t} - \frac{t^n}{1-t}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in [0,x], \ \frac{1}{1-t} - \sum_{k=0}^{n-1} t^k = \frac{t^n}{1-t}.}$$

□

b) En déduire, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $-\ln(1-x) - \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{x^k}{k} \ = \ \displaystyle\int_0^x \frac{t^n}{1-t}\, dt$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On intègre l'égalité de la question précédente entre 0 et x. On obtient :

$$\int_0^x \left(\frac{1}{1-t} - \sum_{k=0}^{n-1} t^k \right) dt \ = \ \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\, dt$$

Étudions le membre de gauche. Par linéarité de l'intégrale :

$$\begin{aligned}
\int_0^x \left(\frac{1}{1-t} - \sum_{k=0}^{n-1} t^k \right) dt \ &= \ \int_0^x \frac{1}{1-t}\, dt - \sum_{k=0}^{n-1} \left(\int_0^x t^k\, dt \right) \\
&= \ \Big[-\ln(1-t) \Big]_0^x - \sum_{k=0}^{n-1} \left[\frac{1}{k+1}\, t^{k+1} \right]_0^x \\
&= \ -\ln(1-x) + \cancel{\ln(1-0)} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1} \left(x^{k+1} - 0^{k+1} \right) \\
&= \ -\ln(1-x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^{k+1}}{k+1} \\
&= \ -\ln(1-x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} \qquad \textit{(par décalage d'indice)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \forall n \in \mathbb{N}^*, \ -\ln(1-x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} \ = \ \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\, dt.}$$

□

7. Montrer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $0 \leqslant \displaystyle\int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt \leqslant \frac{1}{(n+1)(1-x)}$.

En déduire la limite de $\displaystyle\int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt$ lorsque l'entier n tend vers $+\infty$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Soit $t \in [0,x]$.

$$\begin{array}{lccccccl}
\text{Alors} & 0 & \leqslant & t & \leqslant & x & & \\
\text{donc} & 0 & \geqslant & -t & \geqslant & -x & & \\
\text{d'où} & 1 & \geqslant & 1-t & \geqslant & 1-x & & \\
\text{alors} & 1 & \leqslant & \dfrac{1}{1-t} & \leqslant & \dfrac{1}{1-x} & & \textit{(par décroissance de la fonction inverse sur }]0,+\infty[\textit{)} \\
\text{ainsi} & t^n & \leqslant & \dfrac{t^n}{1-t} & \leqslant & \dfrac{t^n}{1-x} & & \textit{(car } t^n \geqslant 0\textit{)}
\end{array}$$

$$\boxed{\text{Par transitivité : } \forall t \in [0,x],\ 0 \leqslant \frac{t^n}{1-t} \leqslant \frac{t^n}{1-x}.}$$

- Par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant ($0 \leqslant x$) :

$$0 \leqslant \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt \leqslant \int_0^x \frac{t^n}{1-x}\,dt$$

Or :

$$\int_0^x \frac{t^n}{1-x}\,dt = \frac{1}{1-x}\int_0^x t^n\,dt = \frac{1}{1-x}\left[\frac{1}{n+1}\,t^{n+1}\right]_0^x = \frac{1}{1-x}\,\frac{x^{n+1}}{n+1}$$

On obtient :

$$0 \leqslant \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt \leqslant \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1-x)}$$

- De plus :

$$\begin{array}{lcccl}
 & x & < & 1 & \\
\text{donc} & x^{n+1} & \leqslant & 1 & \textit{(par croissance de } t \mapsto t^{n+1} \textit{ sur } \mathbb{R}_+ \textit{ (car } x \geqslant 0\textit{))} \\
\text{d'où} & \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)(1-x)} & \leqslant & \dfrac{1}{(n+1)(1-x)} & \textit{(car } (n+1)(1-x) > 0\textit{)}
\end{array}$$

$$\boxed{\text{On en conclut, par transitivité : } 0 \leqslant \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt \leqslant \frac{1}{(n+1)(1-x)}}$$

Commentaire

- Le schéma de résolution de cette question est plutôt classique.
  Afin d'encadrer une intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\, dt$:
  1) on cherche d'abord à encadrer l'intégrande, c'est-à- dire montrer :
  $$\forall t \in [a,b],\ m \leqslant f(t) \leqslant M$$
  où m et M sont deux réels à déterminer grâce à l'étude de la fonction f,
  2) on utilise ensuite la croissance de l'intégration (si les bornes a et b sont dans l'ordre croissant, c'est-à-dire $a \leqslant b$) pour conclure :
  $$m(b-a) = \int_a^b m\ dt \ \leqslant\ \int_a^b f(t)\ dt \ \leqslant\ \int_a^b M\ dt = M(b-a)$$
- L'idée à retenir est que pour encadrer une intégrale, on commence systématiquement par encadrer l'intégrande.

- On remarque alors :
  × $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 0 = 0$,
  × $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(n+1)\,(1-x)} = 0$.

$$\boxed{\text{Par théorème d'encadrement : } \lim_{n\to+\infty} \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\ dt = 0.}$$

□

8. Montrer alors que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{n}$ converge et que l'on a : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} \ =\ -\ln(1-x)$.

Démonstration.

- D'après la question ***6.b)***, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
  $$\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} \ =\ -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\ dt$$
  Or, d'après la question précédente : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\ dt = 0$. On en déduit que la suite $\displaystyle\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et :
  $$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} \ =\ -\ln(1-x) + 0$$
- Par ailleurs, $\displaystyle\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est la suite des sommes partielles de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{n}$.

$$\boxed{\text{On en déduit que la série } \sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{n} \text{ est convergente et : } \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x).}$$

□

9. a) Déterminer deux réels a et b tels que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{n\,(n+1)} = \dfrac{a}{n} + \dfrac{b}{n+1}$.

Démonstration.
Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{array}{cl}
 & \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \dfrac{1}{n\,(n+1)} = \dfrac{a}{n} + \dfrac{b}{n+1} \\[2ex]
\Longleftrightarrow & \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \dfrac{1}{n\,(n+1)} = \dfrac{a\,(n+1) + b\,n}{n\,(n+1)} \\[2ex]
\Longleftrightarrow & \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 1 = a\,(n+1) + b\,n \\[2ex]
\Longleftrightarrow & \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 1 = a + (a+b)\,n \\[2ex]
\Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcr} a & & & = & 1 \\ a & + & b & = & 0 \end{array} \right. \qquad \textit{(par identification)} \\[2ex]
\overset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcrcr} a & & & = & 1 \\ & & b & = & -1 \end{array} \right.
\end{array}$$

$$\boxed{\text{Finalement, en choisissant } a = 1 \text{ et } b = -1, \text{ on a bien : } \forall n \in \mathbb{N}^*, \ \dfrac{1}{n\,(n+1)} = \dfrac{a}{n} + \dfrac{b}{n+1}.}$$

Commentaire

- Détaillons l'étape d'identification.
  On introduit pour cela le polynôme Q défini par : $Q(X) = (a-1) + (a+b)\,X$. Alors :

$$\begin{array}{cl}
 & \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 1 = a + (a+b)\,n \\[1.5ex]
\Leftrightarrow & \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 = (a-1) + (a+b)\,n \\[1.5ex]
\Leftrightarrow & \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 = Q(n) \\[1.5ex]
\Leftrightarrow & \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \text{ l'entier } n \text{ est racine de } Q
\end{array}$$

  Or Q est un polynôme de degré 1. D'où :

$$Q \text{ admet une infinité de racines} \quad \Leftrightarrow \quad Q = 0_{\mathbb{R}[X]}$$

  Précisons que, comme Q est de degré 1, on a même :

$$Q \text{ admet au moins 2 racines} \quad \Leftrightarrow \quad Q = 0_{\mathbb{R}[X]}$$

  Ainsi :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \text{ l'entier } n \text{ est racine de } Q \quad \Leftrightarrow \quad Q = 0_{\mathbb{R}[X]} \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcrcr} a & & & = & 1 \\ a & + & b & = & 0 \end{array} \right.$$

- Notons que l'on pouvait effectuer la recherche de a et b au brouillon et se contenter de fournir la réponse obtenue sur la copie, sans détails. D'autant plus qu'il s'agit presque ici d'une question de cours puisque la décomposition demandée est utilisé de manière classique pour faire apparaître une somme télescopique (ce que l'on fera dans les questions suivantes).

$\square$

b) En déduire que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{x^{n+1}}{n\,(n+1)}$ converge et que l'on a : $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^{n+1}}{n\,(n+1)} \ = \ \varphi(x)$.

Démonstration.

- Soit $N \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{array}{rcll}
\sum\limits_{n=1}^{N} \dfrac{x^{n+1}}{n\,(n+1)} & = & \sum\limits_{n=1}^{N} x^{n+1} \left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}\right) & \textit{(d'après \textbf{9.a})} \\
& = & \sum\limits_{n=1}^{N} \dfrac{x^{n+1}}{n} - \sum\limits_{n=1}^{N} \dfrac{x^{n+1}}{n+1} & \\
& = & x \sum\limits_{n=1}^{N} \dfrac{x^{n}}{n} - \sum\limits_{n=1}^{N} \dfrac{x^{n+1}}{n+1} & \\
& = & x \sum\limits_{n=1}^{N} \dfrac{x^{n}}{n} - \sum\limits_{n=2}^{N+1} \dfrac{x^{n}}{n} & \textit{(par décalage d'indice)} \\
& = & x \sum\limits_{n=1}^{N} \dfrac{x^{n}}{n} - \left(\sum\limits_{n=1}^{N+1} \dfrac{x^{n}}{n} - \dfrac{x^1}{1}\right) & \\
& = & x + x \sum\limits_{n=1}^{N} \dfrac{x^{n}}{n} - \sum\limits_{n=1}^{N+1} \dfrac{x^{n}}{n} &
\end{array}$$

- Or, d'après la question ***8.***, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{x^n}{n}$ est convergente.

$$\boxed{\text{On en déduit que la série } \sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{x^{n+1}}{n\,(n+1)} \text{ est convergente.}}$$

- De plus, toujours d'après la question ***8.*** :

$$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^{n+1}}{n\,(n+1)} \ = \ x + x \times \big(-\ln(1-x)\big) - \big(-\ln(1-x)\big)$$

$$\boxed{\text{On obtient : } \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^{n+1}}{n\,(n+1)} = x + (1-x)\,\ln(1-x) = \varphi(x).}$$

□

10. Montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n\,(n+1)}$ converge et que l'on a encore : $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n\,(n+1)} \ = \ \varphi(1)$.

Démonstration.
Soit $N \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{array}{rcll}
\sum\limits_{n=1}^{N} \dfrac{1}{n(n+1)} & = & \sum\limits_{n=1}^{N} \left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}\right) & \textit{(d'après \textbf{9.a)})} \\
& = & 1 - \dfrac{1}{N+1} & \textit{(par télescopage)} \\
& \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} & 1 &
\end{array}$$

$$\boxed{\text{On en déduit que la série } \sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n(n+1)} \text{ est convergente et : } \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n\,(n+1)} = 1 = \varphi(1).}$$

□

Partie C : Application en probabilité

Dans cette partie, toutes les variables aléatoires sont supposées définies sur un même espace probabilisé noté $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

On considère une urne contenant initialement une boule bleue et une boule rouge. On procède à des tirages successifs d'une boule au hasard selon le protocole suivant :

× si on obtient une boule bleue, on la remet dans l'urne et on ajoute une boule bleue supplémentaire ;

× si on obtient une boule rouge, on la remet dans l'urne et on arrête l'expérience.

On suppose que toutes les boules sont indiscernables au toucher et on admet que l'expérience s'arrête avec une probabilité égale à 1. On note N la variable aléatoire égale au nombre de boules présentes dans l'urne à la fin de l'expérience.

11. a) Montrer soigneusement : $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}, \mathbb{P}\big([N=n]\big) = \dfrac{1}{n\,(n-1)}$.

Démonstration.

- Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note :

$$B_k \quad : \quad \text{« on obtient une boule bleue au } k^{\text{ème}} \text{ tirage »}$$

$$R_k \quad : \quad \text{« on obtient une boule rouge au } k^{\text{ème}} \text{ tirage »}$$

- Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$.
L'événement $[N=n]$ est réalisé si et seulement si lorsque l'expérience s'arrête, l'urne contient n boules, c'est-à-dire $n-1$ boules bleues et 1 boules rouges. Autrement dit, $[N=n]$ est réalisé si et seulement si, lorsque l'expérience s'arrête on a ajouté $n-1-1 = n-2$ boules bleues dans l'urne, c'est-à-dire si et seulement si on a pioché $n-2$ boules bleues puis la boule rouge. Ainsi :

$$[N=n] \; = \; B_1 \cap \ldots \cap B_{n-2} \cap R_{n-1}$$

On en déduit par la formule des probabilités composées :

$$\begin{array}{cl} & \mathbb{P}\big([N=n]\big) \\ = & \mathbb{P}\big(B_1 \cap \ldots \cap B_{n-2} \cap R_{n-1}\big) \\ = & \mathbb{P}(B_1) \times \mathbb{P}_{B_1}(B_2) \times \mathbb{P}_{B_1 \cap B_2}(B_3) \times \cdots \times \mathbb{P}_{B_1 \cap \cdots \cap B_{n-3}}(B_{n-2}) \times \mathbb{P}_{B_1 \cap \cdots \cap B_{n-2}}(R_{n-1}) \\ = & \dfrac{1}{2} \times \dfrac{2}{3} \times \dfrac{3}{4} \times \cdots \times \dfrac{n-2}{n-1} \times \dfrac{1}{n} \end{array}$$

Précisons cette dernière égalité :

× $\mathbb{P}(B_1) = \dfrac{1}{2}$.

× $\mathbb{P}_{B_1 \cap \cdots \cap B_{n-2}}(R_{n-1}) = \dfrac{1}{n}$ car chaque boule a même probabilité d'être tirée.

Plus précisément, si l'événement $B_1 \cap \cdots \cap B_{n-2}$ est réalisé, c'est que les $n-2$ permiers tirages ont donné une boule bleue.

Dans ce cas, l'événement R_{n-1} est réalisé si et seulement si lors du $(n-1)^{\text{ème}}$ tirage la boule rouge est tirée dans l'urne contenant n boules.

Finalement, en procédant à des simplifications successives, on obtient :

$$\mathbb{P}\big([N=n]\big) \; = \; \frac{1}{(n-1)\,n}$$

$$\boxed{\text{Finalement, pour tout } n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}, \; \mathbb{P}\big([N=n]\big) \; = \; \dfrac{1}{n\,(n-1)}.}$$

□

b) La variable aléatoire N admet-elle une espérance ?

Démonstration.

- La v.a.r. N admet une espérance si et seulement si la série $\sum\limits_{n \geqslant 2} n\,\mathbb{P}([N=n])$ est absolument convergente. Cette série étant à termes positifs, cela revient à démontrer qu'elle est convergente.
- Soit $N \geqslant 2$.

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{N} n\,\mathbb{P}([N=n]) &= \sum_{n=2}^{N} \cancel{n}\,\frac{1}{\cancel{n}(n-1)} && \textit{(d'après la question précédente)} \\ &= \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n} && \textit{(par décalage d'indice)} \end{aligned}$$

- Or la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} \frac{1}{n}$ est une série de Riemann d'exposant 1 ($1 \not> 2$). Elle est donc divergente.

  Ainsi, la série $\sum\limits_{n \geqslant 2} n\,\mathbb{P}([N=n])$ est divergente.

$$\boxed{\text{On en déduit que la v.a.r. } N \text{ n'admet pas d'espérance.}}$$

□

12. Recopier et compléter les lignes incomplètes de la fonction **Scilab** suivante de façon à ce qu'elle renvoie une simulation de la variable aléatoire N.

```
function N = simuleN()
    b = 1 // b désigne le nombre de boules bleues dans l'urne
    while rand() < .........
        b = b+1
    end
    N = .........
endfunction
```

Démonstration.
On propose la fonction **Scilab** suivante.

```
function N = simuleN()
    b = 1 // b désigne le nombre de boules bleues dans l'urne
    while rand() < b / (b+1)
        b = b + 1
    end
    N = b + 1
endfunction
```

Détaillons les éléments de ce script.

- **Début de la fonction**

  On commence par préciser la structure de la fonction :

  × cette fonction se nomme `simuleN`,

  × elle ne prend pas de paramètre en entrée,

  × elle admet pour variable de sortie la variable `N`.

```
function N = simuleN()
```

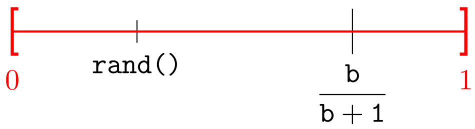
En ligne 2, la variable `b`, qui contient le nombre de boules bleues dans l'urne à chaque tirage, est initialisée à 1 (initialement l'urne contient une seule boule bleue).

```
2    b = 1
```

- **Structure itérative**
  - × Les lignes 3 à 5 consistent, au fur et à mesure des tirages, à mettre à jour la variable `b` (désignant le nombre de boules bleues dans l'urne) jusqu'à l'obtention d'une boule rouge. Autrement dit, on doit effectuer une mise à jour de `b` tant que l'on pioche une boule bleue.
    Pour cela on met en place une structure itérative (boucle while) :

```
3    while rand() < b / (b+1)
```

  - × Détaillons l'obtention de la ligne 3.
    On utilise ici la commande `rand`. Cette instruction renvoie un réel choisi aléatoirement dans $[0, 1]$.
    Plus formellement, il s'agit de simuler une v.a.r. U telle que $U \hookrightarrow \mathcal{U}([0, 1])$.
  - × Cette valeur choisie aléatoirement dans $[0, 1]$ permet d'obtenir une simulation d'un tirage dans l'urne.



Deux cas se présentent.

– Si `rand()` $< \dfrac{\mathtt{b}}{\mathtt{b}+1}$: alors, on considère qu'on a obtenu une boule bleue.
Ce cas se produit avec la probabilité :

$$\mathbb{P}\left(\left[0 \leqslant U \leqslant \frac{\mathtt{b}}{\mathtt{b}+1}\right]\right) = \mathbb{P}\left(\left[U \leqslant \frac{\mathtt{b}}{\mathtt{b}+1}\right]\right) = \frac{\mathtt{b}}{\mathtt{b}+1}$$

ce qui correspond bien à la probabilité d'obtenir une boule bleue dans une urne contenant `b` boule bleues et 1 boule rouge.
Dans ce cas, on met à jour la variable `b` en l'incrémentant de 1.

```
4        b = b + 1
```

– Si `rand()` $\geqslant \dfrac{\mathtt{b}}{\mathtt{b}+1}$: alors, on considère qu'on a obtenu la boule rouge.
Ce cas se produit avec la probabilité :

$$\mathbb{P}\left(\left[\frac{\mathtt{b}}{\mathtt{b}+1} \leqslant U \leqslant 1\right]\right) = \mathbb{P}\left(\left[\frac{\mathtt{b}}{\mathtt{b}+1} \leqslant U\right]\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\left[U < \frac{\mathtt{b}}{\mathtt{b}+1}\right]\right) = 1 - \frac{\mathtt{b}}{\mathtt{b}+1} = \frac{1}{\mathtt{b}+1}$$

ce qui correspond bien à la probabilité d'obtenir la boule rouge dans une urne contenant `b` boule bleues et 1 boule rouge.
Dans ce cas, on ne met pas à jour la variable `b` et on arrête les tirages dans l'urne.

- **Fin de la fonction**
  À l'issue de la boucle while, la variable `b` contient le nombre de boules bleues à la fin de l'expérience.
  Il faut donc lui ajouter 1 pour obtenir le nombre total de boules dans l'urne à la fin de l'expérience.
  Il ne reste qu'à stocker cette valeur `b + 1` dans la variable de sortie `N`.

```
6    N = b + 1
```

Commentaire

Afin de permettre une bonne compréhension des mécanismes en jeu, on a détaillé la réponse à cette question. Cependant, compléter correctement le programme **Scilab** démontre la bonne compréhension de la simulation demandée et permet certainement d'obtenir tous les points alloués à cette question.
On procèdera de même dans les autres questions **Scilab**. □

On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes et de même loi. On suppose que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ et N sont mutuellement indépendantes.
On note F la fonction de répartition commune aux variables aléatoires X_n pour n appartenant à $\mathbb{N}^*$.
On définit la variable aléatoire $T = \max(X_1, \ldots, X_N)$, ce qui signifie :

$$\forall \omega \in \Omega,\ T(\omega) \ = \ \max\big(X_1(\omega), \ldots, X_{N(\omega)}(\omega)\big)$$

Ainsi par exemple, si N prend la valeur 3, alors $T = \max(X_1, X_2, X_3)$; si N prend la valeur 5, alors $T = \max(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)$; etc.

Commentaire

- L'énoncé prend ici le temps de détailler précisément et rigoureusement la définition de la v.a.r. T :

  $$\forall \omega \in \Omega,\ T(\omega) \ = \ \max\big(X_1(\omega), \ldots, X_{N(\omega)}(\omega)\big)$$

  On peut regretter que cette rigueur ne se prolonge pas aux exemples proposés. En effet, l'écriture $T = \max(X_1, X_2, X_3)$ ne convient pas car elle confond une variable aléatoire et sa réalisation.
  - × Une première manière d'écrire les choses est la suivante.

    Si N prend la valeur 3, alors la valeur prise T est la valeur prise par $\max(X_1, X_2, X_3)$
    (qui est d'ailleurs le maximum des valeurs prises par les v.a.r. X_1, X_2 et X_3).
  - × Plus précisément, dire que N prend la valeur 3, c'est dire qu'il existe un tirage $\omega \in \Omega$ tel que : $N(\omega) = 3$. Pour ce tirage ω particulier :

    $$T(\omega) \ = \ \max\big(X_1(\omega), \ldots, X_{N(\omega)}(\omega)\big) \ = \ \max\big(X_1(\omega), \ldots, X_3(\omega)\big)$$

    On ne peut par contre en aucun cas écrire l'égalité entre **variables aléatoires** : $T \cancel{=} \max(X_1, X_2, X_3)$.
- L'intuition derrière la définition de la v.a.r. T est que la valeur de T dépend de la valeur de N. Ainsi, pour connaître la valeur prise par T, il faut passer en revu toutes les valeurs prises par N. Cette disjonction de cas sur les valeurs de N est d'ailleurs amorcée dans l'énoncé (« si N prend la valeur 3, ... »). Nous sommes donc ici dans un contexte où :
  - × on souhaite déterminer la probabilité qu'une v.a.r. prenne certaines valeurs (la v.a.r. T ici),
  - × ces valeurs dépendent de celles prises par une autre v.a.r. (la v.a.r. N ici).

  Dans ce contexte, le réflexe à adopter est l'utilisation de la formule des probabilités totales (et même de l'appliquer au système complet d'événements associé à N). C'est d'ailleurs exactement ce qui est attendu en question ***13.b)***.

13. a) Montrer : $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, $\mathbb{P}_{[N=n]}\big([T \leqslant x]\big) \ = \ \big(F(x)\big)^n$.

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.

- Notons tout d'abord que la probabilité $\mathbb{P}_{[N=n]}([T \leqslant x])$ est bien définie car, d'après la question ***11.a)*** : $\mathbb{P}([N = n]) \neq 0$.

- Ensuite :

$$\mathbb{P}_{[N=n]}([T \leqslant x]) = \frac{\mathbb{P}([N=n] \cap [T \leqslant x])}{\mathbb{P}([N=n])}$$

- Déterminons alors $\mathbb{P}([N=n] \cap [T \leqslant x])$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([N=n] \cap [T \leqslant x]) &= \mathbb{P}([N=n] \cap [\max(X_1, \ldots, X_N) \leqslant x]) \\
&= \mathbb{P}([N=n] \cap [\max(X_1, \ldots, X_n) \leqslant x]) \\
&= \mathbb{P}\left([N=n] \cap \left(\bigcap_{k=1}^{n} [X_k \leqslant x]\right)\right) \\
&= \mathbb{P}([N=n]) \times \left(\prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}([X_k \leqslant x])\right) && \textit{(car les v.a.r. } X_1, \ldots, X_n \textit{ et } N \textit{ sont indépendantes)} \\
&= \mathbb{P}([N=n]) \times \left(\prod_{k=1}^{n} F_{X_k}(x)\right) \\
&= \mathbb{P}([N=n]) \times \big(F(x)\big)^n && \textit{(car les v.a.r. } X_1, \ldots, X_n \textit{ ont même loi)}
\end{aligned}$$

- On obtient alors :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_{[N=n]}([T \leqslant x]) &= \frac{\mathbb{P}([N=n] \cap [T \leqslant x])}{\mathbb{P}([N=n])} \\
&= \frac{\cancel{\mathbb{P}([N=n])} \times \big(F(x)\big)^n}{\cancel{\mathbb{P}([N=n])}} \\
&= \big(F(x)\big)^n
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}, \mathbb{P}_{[N=n]}([T \leqslant x]) = \big(F(x)\big)^n}$$

□

b) En déduire : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}\big([T \leqslant x]\big) = \varphi\big(F(x)\big)$.

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}$.
La famille $\big([N=n]\big)_{n \geqslant 2}$ forme un système complet d'événements.
Ainsi, par formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([T \leqslant x]) &= \sum_{n=2}^{+\infty} \mathbb{P}([N=n] \cap [T \leqslant x]) \\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} \mathbb{P}([N=n]) \times \big(F(x)\big)^n && \textit{(d'après la question précédente)} \\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n\,(n-1)} \big(F(x)\big)^n && \textit{(d'après \textbf{11.a)})} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\big(F(x)\big)^{n+1}}{(n+1)\,n} && \textit{(par décalage d'indice)} \\
&= \varphi\big(F(x)\big) && \textit{(d'après \textbf{9.} et \textbf{10.}, car, comme } F \textit{ est une fonction de répartition : } F(x) \in [0,1])
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \mathbb{P}([T \leqslant x]) = \varphi\big(F(x)\big)}$$

□

14. On suppose **dans cette question uniquement** que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, la variable aléatoire X_n suit la loi uniforme sur $[0, 1]$.

a) On rappelle que l'instruction `grand(n, p, 'unf', 0, 1)` renvoie une matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ où les coefficients sont des réalisations de variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $[0, 1]$.

Écrire une fonction **Scilab** d'en-tête `function T = simuleT()` qui renvoie une simulation de la variable aléatoire T.

Démonstration.
On propose la fonction **Scilab** suivante.

```
function T = simuleT()
    N = simuleN()
    X = grand(1, N, 'unf', 0, 1)
    T = max(X)
endfunction
```

Détaillons les éléments de ce script.

- **Début de la fonction**
  On commence par préciser la structure de la fonction :
  × cette fonction se nomme `simuleT`,
  × elle ne prend pas de paramètre en entrée,
  × elle admet pour variable de sortie la variable `T`.

```
function T = simuleT()
```

- **Contenu de la fonction**
  Les valeurs prises par la v.a.r. T dépendent des valeurs prises par la v.a.r. N. On commence donc par simuler la v.a.r. N. Pour cela, on utilise la fonction `simuleN` définie en question ***12.*** et on stocke le résultat obtenu dans une variable `N`.

```
    N = simuleN()
```

La valeur n prise par N est donc stockée dans la variable `N`. Dans ce cas, la valeur prise par T est la valeur prise par $\max(X_1, \dots, X_n)$. On commence donc par simuler le n-échantillon $(X_1, \dots, X_n)$ de loi $\mathcal{U}([0, 1])$ et on stocke le résultat obtenu dans une variable `X`. Pour cela, on utilise la commande rappelée dans l'énoncé.

```
    X = grand(1, N, 'unf', 0, 1)
```

Pour obtenir une simulation de T, il ne reste alors qu'à prendre le maximum des éléments du vecteur `X`.

```
    T = max(X)
```

□

b) On considère la fonction **Scilab** suivante :

```
1  function m = mystere()
2      m = zeros(1, 3)
3      for k = 1 : 3
4          s = zeros(1, 1000)
5          for j = 1 : 1000
6              s(j) = simuleT()
7          end
8          m(k) = mean(s)
9      end
10 endfunction
```

À son appel, on obtient :

```
ans  =
    0.7474646    0.7577248    0.7470916
```

Que renvoie la fonction `mystere` ? Que peut-on conjecturer sur la variable aléatoire T ?

Démonstration.
Détaillons les éléments de ce script.

- **Début de la fonction**
  On commence par préciser la structure de la fonction :
  × cette fonction se nomme `mystere`,
  × elle ne prend pas de paramètre en entrée,
  × elle admet pour variable de sortie la variable `m`.
  En ligne 2, on commence par initialiser la variable `m` par un vecteur ligne à 3 colonnes nul.

```
2      m = zeros(1, 3)
```

- **Structure itérative**
  × Les lignes 3 à 9 permettent de mettre à jour chaque coordonnée du vecteur `m`. Pour cela on utilise une structure itérative (boucle for).

```
3      for k = 1 : 3
```

  × En ligne 4, on initialise la variable `s` par un vecteur ligne à 1000 colonnes nul.

```
4          s = zeros(1, 1000)
```

  × $2^{\text{ème}}$ structure itérative
  Les lignes 5 à 7 permettent de mettre à jour chaque coordonnée du vecteur `s` afin qu'elles contiennent une simulation de la v.a.r. T. Pour cela on met en place une structure itérative (boucle for) et on utilise la fonction `simuleT` définie en question précédente pour obtenir des simulations de la v.a.r. T.

```
5          for j = 1 : 1000
6              s(j) = simuleT()
7          end
```

  × À l'issue de cette $2^{\text{ème}}$ boucle for, la variable `s` contient 1000 simulations de la v.a.r. T. L'appel `mean(s)` renvoie alors la moyenne des 1000 simulations de T. On stocke ce résultat dans une coordonnée du vecteur `m`.

```
8          m(k) = mean(s)
```

- **Fin de la fonction**
  À l'issue de la 1ère boucle for, la variable `m` contient dans chaque coordonnée la moyenne de 1000 simulations de la v.a.r. T.

  > En notant $(T_1, \ldots, T_{1000})$ un 1000-échantillon de la v.a.r. T, la fonction `mystere` renvoie un vecteur ligne à 3 coordonnées contenant chacune une simulation de $\bar{T}_{1000} = \dfrac{1}{1000} \sum\limits_{i=1}^{1000} T_i$.

- L'idée naturelle pour obtenir une approximation de l'espérance $\mathbb{E}(T)$ est :
  × de simuler un grand nombre de fois ($N = 1000$ est ici ce grand nombre) la v.a.r. T.
  Formellement, on souhaite obtenir un N-uplet $(t_1, \ldots, t_N)$ qui correspond à l'observation d'un N-échantillon $(T_1, \ldots, T_N)$ de la v.a.r. T.
  (les v.a.r. T_i sont indépendantes et de même loi que T)
  × de réaliser la moyenne des résultats de cette observation.

  Cette idée est justifiée par la loi faible des grands nombres (LfGN) qui affirme :

$$\text{moyenne de l'observation} \;=\; \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} t_i \;\simeq\; \mathbb{E}(T)$$

- Les valeurs renvoyées par la fonction `mystere` sont donc des approximations de $\mathbb{E}(T)$.

  > On conjecture alors : $\mathbb{E}(T) \approx \dfrac{3}{4}$.

□

c) Montrer : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}\big([T \leqslant x] \big) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \varphi(x) & \text{si } x \in [0, 1[\\ 1 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$

Démonstration.

- Tout d'abord, on considère : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $X_k(\Omega) = [0, 1]$.

  > Ainsi : $T(\Omega) \subset [0, 1]$.

- Soit $x \in \mathbb{R}$. Trois cas se présentent :
  × si $x \in \,]-\infty, 0[$, alors $[T \leqslant x] = \varnothing$ (car $T(\Omega) \subset [0, 1]$). D'où :

$$F_T(x) \;=\; \mathbb{P}([T \leqslant x]) \;=\; \mathbb{P}(\varnothing) \;=\; 0$$

  × si $x \in [0, 1]$, alors, d'après la question ***13.b)*** :

$$\begin{aligned} F_T(x) \;=\; \mathbb{P}([T \leqslant x]) \;&=\; \varphi\big(F(x)\big) \\ &=\; \varphi(x) && \textit{(car } X_1 \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1]) \\ & && \textit{et } x \in [0, 1]\textit{)} \end{aligned}$$

  × si $x \in \,]1, +\infty[$, alors $[T \leqslant x] = \Omega$ (car $T(\Omega) \subset [0, 1]$). D'où :

$$F_T(x) \;=\; \mathbb{P}([T \leqslant x]) \;=\; \mathbb{P}(\Omega) \;=\; 1$$

On obtient :

$$F_T : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \varphi(x) & \text{si } x \in [0,1] \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Comme $\varphi(1) = 1$, on en déduit : $F_T : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \varphi(x) & \text{si } x \in [0,1[\\ 1 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$.

Commentaire

- Profitons-en pour faire un point sur la notation $X(\Omega)$.
  Rappelons qu'une v.a.r. X est une application $X : \Omega \to \mathbb{R}$.
  Comme la notation le suggère, $X(\Omega)$ est l'image de Ω par l'application X.
  Ainsi, $X(\Omega)$ n'est rien d'autre que l'ensemble des valeurs prises par la v.a.r. X :

$$\begin{array}{rcl} X(\Omega) & = & \{X(\omega) \mid \omega \in \Omega\} \\ & = & \{x \in \mathbb{R} \mid \exists \omega \in \Omega,\ X(\omega) = x\} \end{array}$$

  Il faut bien noter que dans cette définition aucune application probabilité $\mathbb{P}$ n'apparaît.
- Il est toujours correct d'écrire : $X(\Omega) \subseteq\ ]-\infty, +\infty[$.
  En effet, cette propriété signifie que toute v.a.r. X est à valeurs dans $\mathbb{R}$, ce qui est toujours le cas par définition de la notion de variable aléatoire réelle.
- Dans le cas des v.a.r. discrètes, il est d'usage relativement courant de confondre :
  - × l'ensemble des valeurs possibles de la v.a.r. X (*i.e.* l'ensemble $X(\Omega)$),
  - × l'ensemble $\{x \in \mathbb{R} \mid \mathbb{P}\big([X = x]\big) \neq 0\}$, ensemble des valeurs que X prend avec probabilité non nulle. Dans le cas qui nous intéresse ici, à savoir X est une v.a.r. discrète, cet ensemble est appelé support de X et est noté $\text{Supp}(X)$.
- Dans le cas des v.a.r. à densité, la détermination de l'ensemble image est plus technique. Dans certains sujets, l'ensemble image des v.a.r. étudiées sera précisé (« On considère une v.a.r. à valeurs strictement positives »). Si ce n'est pas le cas :
  - × si X suit une loi usuelle, on peut se référer à l'ensemble image donné en cours. Par exemple, si $X \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1])$, on se permet d'écrire :

    « Comme $X \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1])$, on **considère** : $X(\Omega) = [0,1]$. »

  - × si X ne suit pas une loi usuelle, on étudie l'ensemble : $I = \{x \in \mathbb{R} \mid f_X(x) > 0\}$.
    On se permet alors d'écrire :

    « Dans la suite, on **considère** : $X(\Omega) = I$. »

  En **décrétant** la valeur de $X(\Omega)$, on ne commet pas une erreur mais on décide d'ajouter une hypothèse qui ne fait pas partie de l'énoncé. Cette audace permet de travailler avec un ensemble image connu, ce qui permet de structurer certaines démonstrations (l'ensemble image étant connu, on se rappelle que la fonction de répartition, par exemple, s'obtient par une disjonction de cas).

□

d) En déduire que T est une variable aléatoire à densité.

Démonstration.

- La fonction F_T est continue :
  - $\times$ sur $]-\infty, 0[$ et sur $]1, +\infty[$ en tant que fonction constante,
  - $\times$ sur $]0, 1[$ car, d'après la question ***1.***, la fonction φ est continue sur $]0, 1[$,
  - $\times$ en 0. En effet :
    - d'une part : $\lim\limits_{x \to 0^-} F_T(x) = 0$ (par définition de F_T),
    - d'autre part : $\lim\limits_{x \to 0^+} F_T(x) = F_T(0) = \varphi(0) = 0$ (d'après ***2.b)***).

    Ainsi :
    $$\lim_{x \to 0^-} F_T(x) \ = \ F_T(0) \ = \ \lim_{x \to 0^+} F_T(x)$$
  - $\times$ en 1. En effet :
    - d'une part : $\lim\limits_{x \to 1^-} F_T(x) = \varphi(1) = 1$ (par définition de F_T),
    - d'autre part : $\lim\limits_{x \to 1^+} F_T(x) = F_T(1) = 1$.

    Ainsi :
    $$\lim_{x \to 1^-} F_T(x) \ = \ F_T(1) \ = \ \lim_{x \to 1^+} F_T(x)$$

$$\boxed{\text{On en déduit que la fonction } F_T \text{ est continue sur } \mathbb{R}.}$$

- La fonction F_T est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, 0[$, sur $]0, 1[$ et sur $]1, +\infty[$ par des arguments similaires à ceux de la continuité sur ces intervalles.

$$\boxed{\text{On en déduit que } F_T \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ sauf éventuellement en 0 et en 1.}}$$

$$\boxed{\text{On en conclut que } T \text{ est une v.a.r. à densité.}}$$

□

e) Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que T admet une espérance et calculer $\mathbb{E}(T)$.

Démonstration.

- D'après la question précédente, la v.a.r. T est une v.a.r. à densité. De plus : $T(\Omega) \subset [0, 1]$. Il existe donc une densité de T nulle en dehors de $[0, 1]$. On la note f_T.
- La v.a.r. T admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x \, f_T(x) \, dx$ est absolument convergente, ce qui équivaut à démontrer la convergence pour ce calcul de moment du type $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^m \, f_T(x) \, dx$.
- Tout d'abord, comme la fonction f_T est nulle en dehors de $[0, 1]$:
$$\int_{-\infty}^{+\infty} x \, f_T(x) \, dx \ = \ \int_0^1 x \, f_T(x) \, dx$$
- De plus, la fonction $x \mapsto x \, f_T(x)$ est continue par morceaux sur $]0, 1[$. L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 x \, f_T(x) \, dx$ est donc impropre à la fois en 0 et en 1.

- Étudions d'abord $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} x\, f_T(x)\ dx$. Soit $A \in \left]0, \frac{1}{2}\right]$.
  On procède par intégration par parties (IPP).

$$\left| \begin{array}{rclcrcl} u(x) & = & x & & u'(x) & = & 1 \\ v'(x) & = & f_T(x) & & v(x) & = & F_T(x) \end{array} \right.$$

  Cette IPP est valide car les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[A, \frac{1}{2}]$ (d'après la question précédente). On obtient :

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\int_A^{\frac{1}{2}} x\, f_T(x)\ dx & = & \left[\ x\, F_T(x)\ \right]_A^{\frac{1}{2}} - \displaystyle\int_A^{\frac{1}{2}} F_T(x)\ dx \\ & = & \dfrac{1}{2}\,\varphi\left(\dfrac{1}{2}\right) - A\,\varphi(A) - \displaystyle\int_A^{\frac{1}{2}} \varphi(x)\ dx \qquad \textit{(par définition de } F_T \textit{ sur }]0,1[\textit{, d'après } \textbf{\textit{14.c)}}\textit{)} \end{array}$$

  Or :
  × d'après ***2.b)*** : $\displaystyle\lim_{A \to 0} A\,\varphi(A) = 0$.
  × d'après ***5.b)***, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \varphi(x)\ dx$ est convergente, donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \varphi(x)\ dx$ aussi.

  On en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} x\, f_T(x)\ dx$ est convergente et :

$$\int_0^{\frac{1}{2}} x\, f_T(x)\ dx \ = \ \frac{1}{2}\,\varphi\left(\frac{1}{2}\right) - \int_0^{\frac{1}{2}} \varphi(x)\ dx$$

- Étudions ensuite $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 x\, f_T(x)\ dx$. Soit $B \in \left[\frac{1}{2}, 1\right[$.
  Avec exactement la même intégration par parties, on obtient :

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{B} x\, f_T(x)\ dx & = & \left[\ x\, F_T(x)\ \right]_{\frac{1}{2}}^{B} - \displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{B} F_T(x)\ dx \\ & = & B\,\varphi(B) - \dfrac{1}{2}\,\varphi\left(\dfrac{1}{2}\right) - \displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{B} \varphi(x)\ dx \qquad \textit{(par définition de } F_T \textit{ sur }]0,1[\textit{, d'après } \textbf{\textit{14.c)}}\textit{)} \end{array}$$

  Or :
  × d'après ***2.b)*** : $\displaystyle\lim_{B \to 1} B\,\varphi(B) = 1 \times 1 = 1$.
  × d'après ***5.b)***, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \varphi(x)\ dx$ est convergente, donc l'intégrale $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 \varphi(x)\ dx$ aussi.

  On en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 x\, f_T(x)\ dx$ est convergente et :

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 x\, f_T(x)\ dx \ = \ 1 - \frac{1}{2}\,\varphi\left(\frac{1}{2}\right) - \int_{\frac{1}{2}}^1 \varphi(x)\ dx$$

On en conclut que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 x\, f_T(x)\ dx$ est convergente.

La v.a.r. T admet donc une espérance.

- De plus :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(T) &= \int_0^1 x\, f_T(x)\, dx \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} x\, f_T(x)\, dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 x\, f_T(x)\, dx \\
&= \cancel{\frac{1}{2}\,\varphi\left(\frac{1}{2}\right)} - \int_0^{\frac{1}{2}} \varphi(x)\, dx + 1 - \cancel{\frac{1}{2}\,\varphi\left(\frac{1}{2}\right)} - \int_{\frac{1}{2}}^1 \varphi(x)\, dx \\
&= 1 - \int_0^1 \varphi(x)\, dx
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{D'après } \textbf{\textit{5.b)}}\text{, on obtient : } \mathbb{E}(T) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.}$$

Commentaire

- Comme l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 x\, f_T(x)\, dx$ est à la fois impropre en 0 et en 1, on rappelle qu'elle est convergente s'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $\displaystyle\int_0^c x\, f_T(x)\, dx$ et $\displaystyle\int_c^1 x\, f_T(x)\, dx$ sont toutes deux convergentes. On choisit ici de le démontrer pour $c = \dfrac{1}{2}$.
- L'étude de la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 x\, f_T(x)\, dx$ a donc été effectuée en deux temps. On pouvait néanmoins faire le choix un peu moins rigoureux de se passer de ce découpage et étudier directement l'intégrale $\displaystyle\int_A^B x\, f_T(x)\, dx$ (pour $(A,B) \in \,]0,1[^2$) avant de faire tendre A vers 0 et B vers 1.

□

15. On suppose **dans cette question uniquement** que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, la variable aléatoire X_n suit la loi exponentielle de paramètre λ avec $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$.

a) Rappeler une expression de la fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ.

Démonstration.

$$\boxed{\text{On note } X \text{ une v.a.r. de loi } \mathcal{E}(\lambda)\text{. Alors : } F_X : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}.}$$

□

b) En déduire une expression de la fonction de répartition de T.

Démonstration.

- Tout d'abord, on considère : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $X_k(\Omega) = [0, +\infty[$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } T(\Omega) \subset [0, +\infty[.}$$

- Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent :
  × si $x \in \,]-\infty, 0[$, alors $[T \leqslant x] = \varnothing$ (car $T(\Omega) \subset [0, +\infty[$). D'où :

$$F_T(x) = \mathbb{P}([T \leqslant x]) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$$

× si $x \in [0, +\infty[$, alors, d'après la question ***13.b)*** :

$$\begin{array}{rcll} F_T(x) & = & \varphi\big(F(x)\big) & \\ & = & \varphi(1 - e^{-\lambda x}) & \textit{(car } X_1 \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda) \textit{ et } x \in [0, +\infty[\textit{)} \\ & = & 1 - e^{-\lambda x} + \big(1 - (1 - e^{-\lambda x})\big) \ln\big(1 - (1 - e^{-\lambda x})\big) & \textit{(par définition de } \varphi\textit{)} \\ & = & 1 - e^{-\lambda x} + e^{-\lambda x} \ln\left(e^{-\lambda x}\right) & \\ & = & 1 - e^{-\lambda x} - \lambda x \, e^{-\lambda x} & \\ & = & 1 - (1 + \lambda x) \, e^{-\lambda x} & \end{array}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } F_T : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - (1 + \lambda x) \, e^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}}$$

□

c) Montrer que T est une variable aléatoire à densité et qu'une densité de T est la fonction :

$$g : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \lambda^2 \, x \, e^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

Démonstration.

- La fonction F_T est continue :
  × sur $]-\infty, 0[$ en tant que fonction constante,
  × sur $]0, +\infty[$ en tant que somme et produit de fonctions continues sur $]0, +\infty[$.
  × en 0. En effet :
    - d'une part : $\lim\limits_{x \to 0^-} F_T(x) = 0$ (par définition de F_T),
    - d'autre part : $\lim\limits_{x \to 0^+} F_T(x) = F_T(0) = 1 - (1 + \lambda \times 0) \, e^{-\lambda \times 0} = 1 - 1 = 0$.

    Ainsi :
    $$\lim_{x \to 0^-} F_T(x) \; = \; F_T(0) \; = \; \lim_{x \to 0^+} F_T(x)$$

  $\boxed{\text{On en déduit que la fonction } F_T \text{ est continue sur } \mathbb{R}.}$

- La fonction F_T est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$ par des arguments similaires à ceux de la continuité sur ces intervalles.

  $\boxed{\text{On en déduit que } F_T \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ sauf éventuellement en } 0.}$

  $\boxed{\text{On en conclut que } T \text{ est une v.a.r. à densité.}}$

- Pour déterminer une densité f_T de T, on dérive sa fonction de répartition F_T sur les intervalles **ouverts** $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$.
  Soit $x \in \mathbb{R}$.
  × Si $x \in]-\infty, 0[$, alors :
  $$f_T(x) \; = \; F_T'(x) \; = \; 0$$

× Si $x \in \,]0, +\infty[$, alors :

$$\begin{aligned}
f_T(x) &= F_T'(x) \\
&= -\left(\lambda\, \mathrm{e}^{-\lambda x} + (1+\lambda x) \times (-\lambda\, \mathrm{e}^{-\lambda x})\right) \\
&= -\lambda\, \mathrm{e}^{-\lambda x} + \lambda\,(1+\lambda x)\, \mathrm{e}^{-\lambda x} \\
&= \big(-\lambda + \lambda\,(1+\lambda x)\big)\, \mathrm{e}^{-\lambda x} \\
&= (-\cancel{\lambda} + \cancel{\lambda} + \lambda^2 x)\, \mathrm{e}^{-\lambda x} \\
&= \lambda^2\, x\, \mathrm{e}^{-\lambda x}
\end{aligned}$$

× On choisit enfin : $f_T(0) = \lambda^2 \times 0 \times \mathrm{e}^{-\lambda \times 0}$.

$$\boxed{\text{Finalement, une densité de } T \text{ est bien la fonction } g : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \lambda^2\, x\, \mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}.}$$ □

d) Justifier que T admet une espérance et que l'on a : $\mathbb{E}(T) = \lambda\, \mathbb{E}(X_1^2)$.
En déduire la valeur de $\mathbb{E}(T)$.

Démonstration.

- La v.a.r. T admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x\, g(x)\, dx$ est absolument convergente, ce qui équivaut à démontrer la convergence pour ce calcul de moment du type $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^m\, g(x)\, dx$.
- Tout d'abord, comme la fonction g est nulle en dehors de $[0, +\infty[$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x\, g(x)\, dx = \int_{0}^{+\infty} x\, g(x)\, dx$$

- Soit $x \in [0, +\infty[$. D'après la question précédente :

$$x\, g(x) = x \times \lambda^2\, x\, \mathrm{e}^{-\lambda x} = \lambda \times x^2 \times \lambda\, \mathrm{e}^{-\lambda x} = \lambda \times x^2 f_{X_1}(x) \qquad (\textit{car } X_1 \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda))$$

Or l'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} x^2\, f_{X_1}(x)\, dx$ est convergente, car c'est le moment d'ordre 2 de $X_1 \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$ (la v.a.r. X_1 admet une variance, donc un moment d'ordre 2).

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{On en déduit que l'intégrale } \displaystyle\int_{0}^{+\infty} x\, g(x)\, dx \text{ est convergente.} \\ \text{La v.a.r. } T \text{ admet donc une espérance.}\end{array}}$$

- De plus :

$$\mathbb{E}(T) = \int_{0}^{+\infty} x\, g(x)\, dx = \int_{0}^{+\infty} \lambda \times x^2\, f_{X_1}(x)\, dx = \lambda \int_{0}^{+\infty} x^2\, f_{X_1}(x)\, dx = \lambda\, \mathbb{E}(X_1^2)$$

$$\boxed{\mathbb{E}(T) = \lambda\, \mathbb{E}(X_1^2)}$$

- Par formule de Koenig-Huygens :

$$\mathbb{E}(T) = \lambda\, \mathbb{E}(X_1^2) = \lambda\left(\mathbb{V}(X_1) + \big(\mathbb{E}(X_1)\big)^2\right) = \lambda\left(\frac{1}{\lambda^2} + \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2\right) = \lambda \times \frac{2}{\lambda^2} = \frac{2}{\lambda}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(T) = \frac{2}{\lambda}}$$ □

Problème 2

Pour tout (a, b, c) de $\mathbb{R}^3$, on définit la matrice $M(a, b, c)$ par :

$$M(a,b,c) \ = \ \begin{pmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{pmatrix}$$

Pour tout (a, b, c) de $\mathbb{R}^3$, on appelle cardinal de l'ensemble $\{a, b, c\}$, noté $\mathrm{Card}\big(\{a, b, c\}\big)$, le nombre d'éléments distincts de cet ensemble.
Par exemple, si $a = b = c$, alors $\mathrm{Card}\big(\{a, b, c\}\big) = 1$; si $a = b$ et $a \neq c$, alors $\mathrm{Card}\big(\{a, b, c\}\big) = 2$.

Commentaire

- De manière intuitive, un ensemble désigne une collection d'objets. La notation $\{a, b, c\}$ désigne alors la collection constituée des objets a, b et c. Derrière cette présentation, il y a un sous-entendu : les objets a, b et c sont différents. On a donc toujours, lorsqu'on utilise les notations habituelles :

$$\mathrm{Card}\big(\{a, b, c\}\big) = 3$$

- Le concepteur se permet d'utiliser une notation différente. En particulier, il se propose de considérer l'ensemble $\{1, 1, 1\}$. Les collections dans lesquelles on autorise les objets à apparaître plusieurs fois sont généralement appelées des multiensembles. Dans le sujet, il n'est pas question de multiensembles mais bien d'ensembles. Le concepteur se permet donc d'utiliser la notation $\{1, 1, 1\}$ (resp. $\{1, 1, 2\}$) pour désigner l'ensemble qui ne contient que le réel 1. Cet ensemble est communément noté $\{1\}$ (resp. $\{1, 2\}$).
- Il est toujours étonnant de constater que des concepteurs se permettent d'utiliser des notations personnelles sans mettre en garde les candidats. On comprend que ce choix a été fait pour simplifier la présentation. Au lieu d'introduire une nouvelle notation, il était aussi possible d'introduire un nom. On pouvait par exemple signifier que les réels a, b et c sont les paramètres de la matrice a, b, c. Dans cet exercice, on étudie :
  - × le cas où les 3 paramètres a, b et c sont égaux (**Partie B**).
  - × le cas où 2 des 3 paramètres a, b et c sont distincts, le dernier étant différent des deux autres (**Partie C**).
  - × le cas où les 3 paramètres a, b et c sont distincts (**Partie D**).

Pour tout (a, b, c) de $\mathbb{R}^3$, on s'intéresse dans ce problème au nombre de valeurs propres distinctes de la matrice $M(a, b, c)$ et on souhaite démontrer la propriété $(*)$ suivante :

$$(*) \qquad M(a,b,c) \text{ est inversible } \Leftrightarrow \ ab + bc + ac + abc \neq 0$$

Partie A : Généralités

1. Justifier que, pour tout (a, b, c) de $\mathbb{R}^3$, la matrice $M(a, b, c)$ est diagonalisable.

Démonstration.
Soit (a, b, c) de $\mathbb{R}^3$.

$$\boxed{\text{La matrice } M(a,b,c) \text{ est symétrique réelle. Elle est donc diagonalisable.}}$$

□

2. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

a) Montrer que la matrice $M(a, b, c)$ ne peut admettre une unique valeur propre.
On pourra par exemple raisonner par l'absurde.

Démonstration.
On procède par l'absurde.
On suppose que la matrice $M(a, b, c)$ admet une unique valeur propre. Notons alors λ cette valeur propre.
D'après la question précédente, la matrice $M(a, b, c)$ est diagonalisable. Il existe alors :

× $P \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ inversible,

× $D \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale, dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de $M(a, b, c)$,

telles que : $M(a, b, c) = PDP^{-1}$.
Or $\mathrm{Sp}\big(M(a, b, c)\big) = \{\lambda\}$. Donc : $D = \lambda \cdot I_3$. Ainsi :

$$M(a, b, c) \; = \; P\,(\lambda \cdot I_3)\,P^{-1} \; = \; \lambda \cdot P \; I_3 \; P^{-1} \; = \; \lambda \cdot PP^{-1} \; = \; \lambda \cdot I_3$$

Absurde.

$$\boxed{\text{On en conclut que la matrice } M(a, b, c) \text{ ne peut avoir une unique valeur propre.}}$$ □

b) En déduire que la matrice $M(a, b, c)$ admet soit deux soit trois valeurs propres distinctes.

Démonstration.

- Comme $M(a, b, c) \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, la matrice $M(a, b, c)$ possède au plus 3 valeurs propres distinctes.
- Comme $M(a, b, c)$, est diagonalisable, la matrice $M(a, b, c)$ admet au moins une valeur propre.
- Enfin, d'après la question précédente, la matrice $M(a, b, c)$ ne peut admettre une unique valeur propre.

$$\boxed{\text{On en déduit que la matrice } M(a, b, c) \text{ possède soit deux soit trois valeurs propres distinctes.}}$$ □

3. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ et $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
On pose f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est $M(a, b, c)$.

a) Écrire la matrice de f dans la base $\mathscr{B}' = (e_2, e_1, e_3)$.

Démonstration.

- Par définition :

$$M(a, b, c) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{pmatrix}$$

- On en déduit :

× $\mathrm{Mat}_{(e_1,e_2,e_3)}\big(f(e_1)\big) = \begin{pmatrix} 1+a \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Et ainsi, par isomorphisme de représentation : $f(e_1) = (1 + a) \cdot e_1 + 1 \cdot e_2 + 1 \cdot e_3$.

× $\mathrm{Mat}_{(e_1,e_2,e_3)}\big(f(e_2)\big) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+b \\ 1 \end{pmatrix}$. Et ainsi : $f(e_2) = 1 \cdot e_1 + (1 + b) \cdot e_2 + 1 \cdot e_3$.

× $\mathrm{Mat}_{(e_1,e_2,e_3)}\big(f(e_3)\big) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1+c \end{pmatrix}$. Et ainsi : $f(e_3) = 1 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2 + (1 + c) \cdot e_3$.

- On en conclut :

  × $f(e_2) = (1+b)\cdot e_2 + 1\cdot e_1 + 1\cdot e_3$ et ainsi : $\mathrm{Mat}_{(e_2,e_1,e_3)}\big(f(e_2)\big) = \begin{pmatrix} 1+b \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

  × $f(e_1) = 1\cdot e_2 + (1+a)\cdot e_1 + 1\cdot e_3$ et ainsi : $\mathrm{Mat}_{(e_2,e_1,e_3)}\big(f(e_1)\big) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+a \\ 1 \end{pmatrix}$.

  × $f(e_3) = 1\cdot e_2 + 1\cdot e_1 + (1+c)\cdot e_3$ et ainsi : $\mathrm{Mat}_{(e_2,e_1,e_3)}\big(f(e_3)\big) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1+c \end{pmatrix}$.

$$\boxed{\text{Finalement : } \mathrm{Mat}_{(e_2,e_1,e_3)}(f) = \begin{pmatrix} 1+b & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{pmatrix} = M(b,a,c).}$$

Commentaire

- Remarquons tout d'abord que la famille $\mathscr{B}' = (e_2, e_1, e_3)$ est bien une base de $\mathbb{R}^3$.
  En effet, c'est une famille :
  × libre car la famille (e_1, e_2, e_3) l'est,
  × telle que $\mathrm{Card}\big(\mathscr{B}'\big) = 3 = \dim\big(\mathbb{R}^3\big)$.
- L'énoncé ne donne pas directement accès à f mais à A, sa matrice représentative dans la base $\mathscr{B}$. La base $\mathscr{B}$ étant fixée, l'application $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(.)$, appelée parfois isomorphisme de représentation, permet de traduire les propriétés énoncées dans le monde des espaces vectoriels en des propriétés énoncées dans le monde matriciel.
  Voici quelques correspondances dans le cas général :

$$\begin{array}{rcl} E \text{ espace vectoriel de dimension } n & \longleftrightarrow & \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \\ f : E \to E \text{ endomorphisme} & \longleftrightarrow & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \\ f \text{ bijectif} & \longleftrightarrow & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \text{ inversible} \end{array}$$

  Ou encore, dans le cas précis de l'exercice :

$$\begin{array}{rcl} f & \longleftrightarrow & M(a,b,c) \\ \text{expression de } f(e_1) \text{ dans } (e_1,e_2,e_3) & \longleftrightarrow & \text{expression de } M(a,b) \times E_1 \text{ dans } (E_1,E_2,E_3) \\ & & (\text{ou pour tout } i \in [\![1,3]\!],\ E_i = \mathrm{Mat}_{(e_1,e_2,e_3)}(e_i)) \end{array}$$

  Il est très fréquent que les énoncés de concours requièrent de savoir traduire une propriété d'un monde à l'autre. Il est donc indispensable d'être à l'aise sur ce mécanisme. □

b) En déduire que les matrices $M(a,b,c)$ et $M(b,a,c)$ ont les mêmes valeurs propres.

Démonstration.
D'après la question précédente, les matrices $M(a,b,c)$ et $M(b,a,c)$ représentent le même endomorphisme f dans des bases différentes (respectivement $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$).

$$\boxed{\text{On en déduit : } \mathrm{Sp}\big(M(a,b,c)\big) = \mathrm{Sp}(f) = \mathrm{Sp}\big(M(b,a,c)\big).}$$

□

c) De la même façon, montrer que les matrices $M(a,b,c)$ et $M(a,c,b)$ ont les mêmes valeurs propres.

Démonstration.

- En opérant de la même manière qu'en question ***3.a)***, on démontre :

$$\mathrm{Mat}_{(e_1,e_3,e_2)}(f) = M(a,c,b)$$

- D'après la question précédente, les matrices $M(a,b,c)$ et $M(a,c,b)$ représentent le même endomorphisme f dans des bases différentes (respectivement $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'' = (e_1, e_3, e_2)$).

$$\boxed{\text{On en déduit : } \mathrm{Sp}\big(M(a,b,c)\big) = \mathrm{Sp}(f) = \mathrm{Sp}\big(M(a,c,b)\big).}$$

□

Ces deux derniers résultats permettent de justifier que les valeurs propres de la matrice $M(a,b,c)$ ne dépendent pas de l'ordre des réels du triplet (a,b,c).

Partie B : Cas où $\mathrm{Card}\big(\{a,b,c\}\big) = 1$

4. Dans cette question **uniquement**, on suppose que $a = b = c = 0$ et on note $J = M(0,0,0)$.

a) Calculer J^2. Déterminer alors un polynôme annulateur de J.

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$J^2 \;=\; \big(M(0,0,0)\big)^2 \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \;=\; 3 \cdot J$$

- On en déduit : $J^2 - 3 \cdot J = 0_{\mathscr{M}_4(\mathbb{R})}$.

$$\boxed{\text{Ainsi, le polynôme } Q(X) = X^2 - 3\,X \text{ est un polynôme annulateur de } J.}$$

□

b) En déduire les valeurs propres de J et préciser une base des sous-espaces propres de J.

Démonstration.

- D'après la question précédente, $Q(X) = X^2 - 3\,X = X\,(X-3)$ est un polynôme annulateur de J. Ainsi :

$$\mathrm{Sp}(J) \;\subset\; \{\text{racines de } Q\} = \{0, 3\}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \mathrm{Sp}(J) \subset \{0,3\} \text{ et } 0 \text{ et } 3 \text{ sont les deux valeurs propres possibles de } J.}$$

Commentaire

- Une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ possède `TOUJOURS` un polynôme annulateur non nul Q.
  On peut même démontrer (ce n'est pas au programme en ECE) qu'il existe toujours un tel polynôme de degré (au plus) n.

Commentaire

- Si Q est un polynôme annulateur de J alors, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, le polynôme $\alpha\, Q$ est toujours un polynôme annulateur de J puisque :
$$(\alpha\, Q)(J) \ = \ \alpha\, Q(J) \ = \ 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}$$
Cela suffit à démontrer que J possède une infinité de polynômes annulateurs.
On peut en obtenir d'autres. Par exemple $R(X) = (X-5)\, Q(X)$ est un polynôme annulateur de J puisque :
$$R(J) \ = \ (J - 5\, I)\, Q(J) \ = \ 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}$$
Il faut donc parler `D'UN` polynôme annulateur d'une matrice.
- Les racines d'un polynôme annulateur ne sont pas forcément toutes valeurs propres de J. Si c'était le cas, J aurait une infinité de valeurs propres (elle en possède au plus n). Par exemple, comme $R(X) = (X-5)\, Q(X)$ est un polynôme annulateur, un tel raisonnement permettrait de démontrer que 5 est aussi valeur propre.

- La matrice J possède deux colonnes égales ($C_1 = C_2$). Ainsi, J n'est pas inversible.

$$\boxed{\text{On en déduit que 0 est bien valeur propre de } J.}$$

- D'autre part :
$$\begin{aligned}
\mathrm{rg}(J - 3\, I_3) \quad & = \quad \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\right) \\
& \underset{\substack{L_2 \leftarrow 2\, L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow 2\, L_3 + L_1}}{=} \quad \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}\right)
\end{aligned}$$
La réduite obtenue est non inversible car possède deux lignes non colinéaires ($L_3 = -L_2$).

$$\boxed{\text{Ainsi, } J - 3 \cdot I_3 \text{ est non inversible. On en déduit que 3 est bien une valeur propre de } J.}$$

Commentaire

On pouvait aussi démontrer que la matrice $J - 3 \cdot I_3$ est non inversible en exhibant une relation de dépendance linéaire non triviale entre les colonnes de cette matrice. Par exemple, si on note, pour tout $i \in [\![1, 3]\!]$, C_i la $i^{\text{ème}}$ colonne de $J - 3 \cdot I_3$, on a :
$$C_1 + C_2 + C_3 = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$$
La famille constituée par les trois vecteurs colonnes de $J - 3 \cdot I_3$ est donc liée. Et ainsi, $J - 3 \cdot I_3$ est non inversible.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Finalement, comme 0 et 3 sont les deux seules valeurs propres} \\ \text{possibles de } J, \text{ on en déduit : } \mathrm{Sp}(J) = \{0, 3\}.\end{array}}$$

- Déterminons $E_0(J)$, le sous-espace propre de J associé à la valeur propre 0.

  Soit $X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Il existe donc $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$\begin{array}{rcl} X \in E_0(J) & \Longleftrightarrow & J\,X = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\[2mm] & \Longleftrightarrow & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\[2mm] & \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 0 \\ x & + & y & + & z & = & 0 \\ x & + & y & + & z & = & 0 \end{array} \right. \\[2mm] & \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array} \right. \end{array}$$

  On en déduit :

$$\begin{array}{rcl} E_0(J) & = & \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid x = -y-z \right\} \\[2mm] & = & \left\{ \begin{pmatrix} -y-z \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid (y,z) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\[2mm] & = & \left\{ y \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid (y,z) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\[2mm] & = & \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \end{array}$$

  La famille $\mathcal{F}_0 = \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est :

  × libre car constituée uniquement de deux vecteurs non colinéaires.

  × génératrice de $E_0(J)$ (d'après ce qui précède).

$$\boxed{\text{Ainsi, la famille } \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \text{ est une base de } E_0(J).}$$

- Déterminons $E_3(J)$, le sous-espace propre de J associé à la valeur propre 3.

  Soit $X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Il existe donc $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$\begin{array}{rcl}
X \in E_3(J) & \Longleftrightarrow & (J - 3 \cdot I_3)\, X = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\[2mm]
& \Longleftrightarrow & \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\[2mm]
& \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -2\,x & + & y & + & z & = & 0 \\ x & - & 2\,y & + & z & = & 0 \\ x & + & y & - & 2\,z & = & 0 \end{array} \right. \\[2mm]
& \underset{\substack{L_2 \leftarrow 2\,L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow 2\,L_3 + L_1}}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -2\,x & + & y & + & z & = & 0 \\ & - & 3\,y & + & 3\,z & = & 0 \\ & & 3\,y & - & 3\,z & = & 0 \end{array} \right. \\[2mm]
& \underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -2\,x & + & y & + & z & = & 0 \\ & - & 3\,y & + & 3\,z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array} \right. \\[2mm]
& \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcl} -2\,x & + & y & = & -z \\ & - & 3\,y & = & -3\,z \end{array} \right. \\[2mm]
& \underset{L_1 \leftarrow 3\,L_1 + L_2}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcrcl} -6\,x & & & = & -6\,z \\ & - & 3\,y & = & -3\,z \end{array} \right.
\end{array}$$

  On en déduit :

$$\begin{array}{rcl}
E_3(J) & = & \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid x = z \quad \texttt{ET} \quad y = z \right\} \\[2mm]
& = & \left\{ \begin{pmatrix} z \\ z \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid z \in \mathbb{R} \right\} \\[2mm]
& = & \left\{ z \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid z \in \mathbb{R} \right\} \\[2mm]
& = & \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)
\end{array}$$

  La famille $\mathcal{F}_3 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est :

  × libre car constituée uniquement d'un vecteur non nul.

  × génératrice de $E_3(J)$ (d'après ce qui précède).

  $$\boxed{\text{Ainsi, la famille } \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \text{ est une base de } E_3(J).}$$

Commentaire

- Il faut s'habituer à déterminer les ensembles $E_\lambda(J)$ par lecture de la matrice $J - \lambda\, I_3$.
- Illustrons la méthode avec la matrice de l'exercice et $\lambda = 3$.
  On cherche les vecteurs $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de $E_3(J)$ c'est-à-dire les vecteurs tels que :
  $(J - 3\, I_4)\, X = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$ (d'après ce qui précède). Or :
  $$\begin{aligned} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= x \cdot C_1 + y \cdot C_2 + z \cdot C_3 \\ &= x \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$
  Pour obtenir le vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ à l'aide de cette combinaison linéaire, on peut prendre $x = y = z = 1$ (on reprend ici l'idée $C_1 + C_2 + C_3 = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$ exposée en début de question). On obtient alors :
  $$E_3(J) \ \supset \ \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$
  Cette inclusion est en réalité une égalité. En effet, d'après le théorème du rang :
  $$\dim\big(\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})\big) \ = \ \dim\big(E_3(J)\big) \ + \ \underset{\substack{\parallel \\ 2}}{\text{rg}(J - 3I_3)}$$
  (par un calcul rapide à l'aide de l'algorithme du pivot)

  Ainsi : $\dim\big(E_3(J)\big) = 3 - 2 = 1$ et l'égalité annoncée est vérifiée. □

c) Déterminer une matrice P inversible de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et une matrice D diagonale de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telles que : $J = PDP^{-1}$.

Démonstration.

- D'après la question ***1.***, la matrice $J = M(0, 0, 0)$ est diagonalisable.
- Il existe donc une matrice P inversible et une matrice D diagonale telles que $J = P\, D\, P^{-1}$. Plus précisément :
  - × la matrice P est obtenue par concaténation de bases des sous-espaces propres de J,
  - × la matrice D est la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de J (dans le même ordre d'apparition que les vecteurs propres).

$$\boxed{\text{En posant } P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \text{ on a donc : } J = PDP^{-1}.}$$

Commentaire

On a démontré en question précédente que la matrice J possède deux valeurs propres. À l'aide des bases des sous-espaces propres assoicés, on peut vérifier que la matrice $J \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ est bien diagonalisable. C'est le cas car :
$$\dim\big(E_0(J)\big) + \dim\big(E_3(J)\big) \ = \ 2 + 1 \ = \ 3 \ = \ \dim\big(\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})\big)$$
□

5. Soit $a \in \mathbb{R}$.

a) Vérifier : $M(a,a,a) = P\,(a\,I_3 + D)\,P^{-1}$.

Démonstration.

$$\begin{array}{rcll} P\big(a \cdot I_3 + D\big)\,P^{-1} & = & \big(a \cdot P + PD\big)\,P^{-1} & \textit{(en multipliant à gauche par } P\textit{)} \\ & = & a \cdot PP^{-1} + P\,D\,P^{-1} & \textit{(en multipliant à droite par } P^{-1}\textit{)} \\ & = & a \cdot I_3 + J & \\ & = & a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} & \\ & = & \begin{pmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1+a \end{pmatrix} & \\ & = & M(a,a,a) & \end{array}$$

$$\boxed{\text{On a bien : } M(a,a,a) = P\,(a \cdot I_3 + D)\,P^{-1}.}$$

□

b) En déduire que la matrice $M(a,a,a)$ admet exactement deux valeurs propres distinctes et les déterminer en fonction de a.

Démonstration.

- D'après la question précédente, les matrices $M(a,a,a)$ et $a \cdot I_3 + D$ sont semblables. Elles représentent donc un même endomorphisme g dans des bases différentes.

$$\boxed{\text{En particulier : } \mathrm{Sp}\big(M(a,a,a)\big) = \mathrm{Sp}(g) = \mathrm{Sp}\big(a \cdot I_3 + D\big).}$$

- Or :

$$a \cdot I_3 + D \;=\; a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a+3 \end{pmatrix}$$

La matrice $a \cdot I_3 + D$ étant diagonale, ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux.

$$\boxed{\text{Finalement : } \mathrm{Sp}\big(M(a,a,a)\big) = \mathrm{Sp}\big(a \cdot I_3 + D\big) = \{a, a+3\}.}$$

□

c) Vérifier la propriété $(*)$ pour la matrice $M(a,a,a)$.

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$\begin{aligned} M(a,a,a) \text{ est inversible} &\Leftrightarrow 0 \text{ n'est pas valeur propre de } M(a,a,a) \\ &\Leftrightarrow 0 \notin \mathrm{Sp}\big(M(a,a,a)\big) = \{a, a+3\} \\ &\Leftrightarrow a \neq 0 \quad \texttt{ET} \quad a+3 \neq 0 \end{aligned}$$

- Notons $b = a$ et $c = a$.

$$\begin{aligned} ab+bc+ac+abc \neq 0 &\Leftrightarrow a^2+a^2+a^2+a^3 \neq 0 \\ &\Leftrightarrow 3\,a^2+a^3 \neq 0 \\ &\Leftrightarrow a^2\,(3+a) \neq 0 \\ &\Leftrightarrow a^2 \neq 0 \quad \texttt{ET} \quad 3+a \neq 0 \\ &\Leftrightarrow a \neq 0 \quad \texttt{ET} \quad a+3 \neq 0 \end{aligned}$$

- En conclusion, lorsque $a = b = c$:

$$\begin{aligned} M(a,b,c) \text{ est inversible} &\Leftrightarrow a \neq 0 \quad \texttt{ET} \quad a+3 \neq 0 \\ &\Leftrightarrow ab+bc+ac+abc \neq 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{La propriété } (*) \text{ est donc bien vérifiée dans le cas où } a = b = c.}$$

□

Partie C : Cas où $\mathrm{Card}\big(\{a,b,c\}\big) = 2$

6. Dans cette question **uniquement**, on suppose que $a = b = 0$ et que $c \in \mathbb{R}^*$.
On note $C = M(0,0,c)$.

a) Justifier que 0 est une valeur propre de C.

Démonstration.

- On a :

$$C = M(0,0,c) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{pmatrix}$$

- La matrice C possède deux colonnes égales ($C_1 = C_2$). Ainsi, C n'est pas inversible.

$$\boxed{\text{On en déduit que 0 est bien valeur propre de } C.}$$

□

b) Soit λ un réel non nul.

(i) Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Montrer l'équivalence :

$$CX \ = \ \lambda\, X \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} y = x \\ z = (\lambda - 2)\, x \\ \big(\lambda^2 - (c+3)\,\lambda + 2c\big)\, x = 0 \end{array} \right.$$

Démonstration.

$$\begin{array}{cl}
 & CX \ = \ \lambda\, X \\[2mm]
\Longleftrightarrow & (C - \lambda\, I_3)\ X \ = \ 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\[2mm]
\Longleftrightarrow & \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda+c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\[6mm]
\Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} (1-\lambda)\, x & + & y & + & z & = & 0 \\ x & + & (1-\lambda)\, y & + & z & = & 0 \\ x & + & y & + & (1-\lambda+c)\, z & = & 0 \end{array} \right. \\[6mm]
\overset{C_1 \leftrightarrow C_3}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} z & + & y & + & (1-\lambda)\, x & = & 0 \\ z & + & (1-\lambda)\, y & + & x & = & 0 \\ (1-\lambda+c)\, z & + & y & + & x & = & 0 \end{array} \right. \\[6mm]
\overset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - (1-\lambda+c)\, L_1}}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} z & + & y & + & (1-\lambda)\, x & = & 0 \\ & - & \lambda\, y & + & \lambda\, x & = & 0 \\ & & (\lambda - c)\, y & + & \big(1 - (1-\lambda)(1-\lambda+c)\big)\, x & = & 0 \end{array} \right. \\[6mm]
\overset{L_2 \leftarrow \frac{1}{\lambda}\, L_2}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} z & + & y & + & (1-\lambda)\, x & = & 0 \\ & - & y & + & x & = & 0 \\ & & (\lambda - c)\, y & + & \big(-\lambda^2 + (c+2)\,\lambda - c\big)\, x & = & 0 \end{array} \right. \\[6mm]
\overset{L_3 \leftrightarrow L_3 - (\lambda - c)\, L_2}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} z & + & y & + & (1-\lambda)\, x & = & 0 \\ & - & y & + & x & = & 0 \\ & & & & \big(-\lambda^2 + (c+3)\,\lambda - 2c\big)\, x & = & 0 \end{array} \right. \\[6mm]
\overset{L_1 \leftrightarrow L_1 + L_2}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} z & & & + & (2-\lambda)\, x & = & 0 \\ & - & y & + & x & = & 0 \\ & & & & \big(-\lambda^2 + (c+3)\,\lambda - 2c\big)\, x & = & 0 \end{array} \right. \\[6mm]
\Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} z \ = \ (\lambda - 2)\, x \\ y \ = \ x \\ \big(-\lambda^2 + (c+3)\,\lambda - 2c\big)\, x \ = \ 0 \end{array} \right.
\end{array}$$

(cette opération est valide car $\lambda \neq 0$)

$\boxed{\text{L'équivalence énoncée est bien vérifiée.}}$

Commentaire

- Dans l'équivalence fournie par l'énoncé, les variables y et z s'expriment à l'aide de la variable x. La variable x va donc prendre le rôle de variable auxiliaire lors de la résolution de système par l'algorithme du pivot de Gauss. Cela explique, après coup, pourquoi la première étape consiste à échanger les colonnes 1 et 3.
- L'algorithme du pivot de Gauss est généralement écrit à l'aide d'opérations sur les lignes du système. Si on suit le déroulé classique, on obtient la résolution suivante :

$$CX = \lambda X \iff (C - \lambda I_3)\, X = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$$

$$\iff \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda+c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} (1-\lambda)\,x & + & y & + & z & = & 0 \\ x & + & (1-\lambda)\,y & + & z & = & 0 \\ x & + & y & + & (1-\lambda+c)\,z & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\overset{L_1 \leftrightarrow L_3}{\iff} \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & (1-\lambda+c)\,z & = & 0 \\ x & + & (1-\lambda)\,y & + & z & = & 0 \\ (1-\lambda)\,x & + & y & + & z & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - (1-\lambda)\,L_1}}{\iff} \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & (1-\lambda+c)\,z & = & 0 \\ & - & \lambda\,y & + & (\lambda-c)\,z & = & 0 \\ & & \lambda\,y & + & \big(-\lambda^2+(c+2)\,\lambda-c\big)\,z & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\overset{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{\iff} \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & (1-\lambda+c)\,z & = & 0 \\ & - & \lambda\,y & + & (\lambda-c)\,z & = & 0 \\ & & & & \big(-\lambda^2+(c+3)\,\lambda-2c\big)\,z & = & 0 \end{array} \right.$$

On obtient un système sous forme triangulaire. Le coefficient devant z en dernière ligne rend la suite du travail difficile. Par ailleurs, par cette méthode, on ne fait pas apparaître le terme $(\lambda-2)\,x$. Il est donc préférable d'écarter cette piste.

□

(ii) En déduire : λ est une valeur propre de $C \Leftrightarrow \lambda^2 - (c+3)\,\lambda + 2c = 0$.

Démonstration.

On raisonne par double équivalence.

($\Rightarrow$) Supposons que λ est valeur propre de C.

Il existe alors un vecteur non nul $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ tel que $CX = \lambda X$.

- D'après la question précédente, on en déduit :

  a) $z = (\lambda-2)\,x$

  b) $y = x$

  c) $\big(-\lambda^2+(c+3)\,\lambda-2c\big)\,x = 0$

- Démontrons : $x \neq 0$. On raisonne par l'absurde.
  Supposons $x = 0$. Alors :
  - $\times$ d'après ***a)*** : $z = (\lambda - 2) \times 0 = 0$.
  - $\times$ d'après ***b)*** : $y = 0$.

  On en déduit $X = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$. Absurde !
- D'après ***c)*** : $\big(-\lambda^2 + (c+3)\,\lambda - 2c\big)\, x = 0$.
  Comme $x \neq 0$, on en déduit : $-\lambda^2 + (c+3)\,\lambda - 2c = 0$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } \lambda \text{ est une valeur propre de } C \;\Rightarrow\; \lambda^2 - (c+3)\,\lambda + 2c = 0.}$$

($\Leftarrow$) Supposons $\lambda^2 - (c+3)\,\lambda + 2c = 0$.

Notons alors : $x = 1$ (par exemple), $y = x = 1$, $z = (\lambda - 2)\, x = \lambda - 2$ et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$CX \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \lambda - 2 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \\ 2 + (1+c)(\lambda-2) \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \\ \cancel{2} + \lambda - \cancel{2} + \lambda c - 2c \end{pmatrix}$$

Or, comme : $\lambda^2 - (c+3)\,\lambda + 2c = 0$, alors : $\lambda^2 - 3\,\lambda = \lambda c - 2c$

et : $\lambda^2 - 2\,\lambda = \lambda c - 2c + \lambda$.

Finalement :

$$CX \;=\; \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \\ \lambda^2 - 2\,\lambda \end{pmatrix} \;=\; \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \lambda - 2 \end{pmatrix} \;=\; \lambda\, X$$

On a donc trouvé $X \neq 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$ tel que $CX = \lambda\, X$.
Cela démontre que λ est valeur propre de C.

$$\boxed{\text{Ainsi : } \lambda \text{ est une valeur propre de } C \;\Leftarrow\; \lambda^2 - (c+3)\,\lambda + 2c = 0.}$$

□

c) Montrer alors que C admet trois valeurs propres distinctes.

Démonstration.

- D'après la question ***6.a)***, le réel 0 est valeur propre de la matrice C.
- D'après la question précédente, un réel λ **différent de** 0 est valeur propre de C si et seulement si $-\lambda^2 + (c+3)\,\lambda - 2c = 0$.

  Considérons alors le polynôme $R(X) = X^2 - (c+3)\,X + 2c$.
  Il admet pour discriminant :

  $$\Delta_1 = (c+3)^2 - 8c = (c^2 + 6c + 9) - 8c = c^2 - 2c + 9$$

  Il s'agit alors de déterminer le signe de Δ_1. Ce discriminant apparaît lui-même comme un polynôme de degré 2, en la variable c.

  Considérons alors le polynôme $T(X) = X^2 - 2X + 9$. Son discriminant est :

  $$\Delta_2 = (-2)^2 - 4 \times 9 = 4 - 36 = -32 < 0$$

  On en déduit que la fonction $t : x \mapsto x^2 - 2x + 9$ est de signe constant. Or : $t(0) = 9 > 0$.

$$\boxed{\text{Ainsi, } \Delta_1 > 0 \text{ et le polynôme } R \text{ admet deux racines distinctes } \lambda_1 \text{ et } \lambda_2.}$$

Commentaire

On pouvait aussi remarquer :

$$\begin{array}{rcl} c^2 - 2c + 9 & = & \big((c-1)^2 - 1\big) + 9 \\ & = & (c-1)^2 + 8 \ \geqslant \ 8 \qquad \textit{(car } (c-1)^2 \geqslant 0\textit{)} \\ & > & 0 \end{array}$$

- Soulignons enfin que $\lambda_1 \neq 0$ et $\lambda_2 \neq 0$. En effet, 0 n'est pas racine de R car $R(0) = 2c \neq 0$ (on a supposé $c \neq 0$ en début de question ***6***).

$$\boxed{\text{Ainsi, } C \text{ admet trois valeurs propres distinctes : } 0,\ \lambda_1 \text{ et } \lambda_2.}$$

Commentaire

- Dans cette question, on étudie un polynôme R dont l'expression dépend d'un paramètre c. Les racines d'un tel polynôme dépendent alors de c. Plus précisément, on aurait pu écrire :

$$\lambda_1 = \frac{(c+3) + \sqrt{c^2 - 2c + 9}}{2} \quad \text{et} \quad \lambda_1 = \frac{(c+3) - \sqrt{c^2 - 2c + 9}}{2}$$

  On obtient ici deux expressions plutôt compliquées et difficilement exploitables.
- Dans un tel cas de figure, il est souvent préférable de s'intéresser aux relations entre coefficients et racines. Détaillons ce point.

  Comme λ_1 et λ_2 sont deux racines distinctes de R, polynôme unitaire, on a :

$$\begin{array}{rcl} R(X) & = & (X - \lambda_1)\,(X - \lambda_2) \\ & = & X^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)\,X + \lambda_1\,\lambda_2 \end{array}$$

  Or, par définition : $R(X) \ = \ X^2 - (c+3)\,X + 2c$.
  Ces deux polynômes étant égaux, ils ont les mêmes coefficients. Ainsi :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \lambda_1 + \lambda_2 & = & c+3 \\ \lambda_1 \times \lambda_2 & = & 2c \end{array} \right.$$

  On obtient ainsi de l'information sur les deux racines λ_1 et λ_2 sans avoir à établir précisément leurs expressions. □

7. Soit $(a,c) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a \neq c$.

a. Exprimer $M(a,a,c)$ comme une combinaison linéaire de I_3 et de $M(0,0,c-a)$.

Démonstration.

$$\begin{array}{rcl} M(a,a,c) & = & \begin{pmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{pmatrix} \\ & = & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+(c-a) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \\ & = & M(0,0,c-a) + a \cdot I_3 \end{array}$$

$$\boxed{M(a,a,c) = a \cdot I_3 + M(0,0,c-a)}$$

□

b. En déduire que la matrice $M(a,a,c)$ admet trois valeurs propres distinctes.

Démonstration.

- On sait que la matrice $M(0,0,c-a)$:
  - × est diagonalisable car symétrique réelle.
  - × admet 0 comme valeur propre car est non inversible.
  - × admet trois valeurs propres distinctes d'après la question ***6***. En effet, elle s'écrit sous la forme $M(0,0,u)$ avec $u = c-a \neq 0$ (par hypothèse).
    On note $\mu = 0$, μ_1 et μ_2 ces trois valeurs propres distinctes.

  Il existe donc une matrice $P \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ inversible et une matrice $D \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de $M(0,0,c-a)$ telles que :

$$M(0,0,c-a) = P\,D\,P^{-1}$$

- On a alors :

$$\begin{array}{rcl} M(a,a,c) & = & a\cdot I_3 + M(0,0,c-a) \\ & = & a\cdot PP^{-1} + P\,D\,P^{-1} \\ & = & P\,(a\cdot I_3)\,P^{-1} + P\,D\,P^{-1} \\ & = & P\,\big(a\cdot I_3 + D\big)\,P^{-1} \end{array}$$

  Ainsi, la matrice $M(a,a,c)$ est semblable à la matrice :

$$a\cdot I_3 + D \;=\; \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_1 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_2 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a+\mu_1 & 0 \\ 0 & 0 & a+\mu_2 \end{pmatrix}$$

  Comme $M(a,a,c)$ et $a\cdot I_3 + D$ sont semblables, elles ont mêmes valeurs propres. La matrice $a\cdot I_3 + D$ étant diagonale, ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux.

$$\mathrm{Sp}\big(M(a,a,c)\big) \;=\; \mathrm{Sp}\big(a\cdot I_3 + D\big) = \{a, a+\mu_1, a+\mu_2\}$$

  Comme les valeurs propres μ_1 et μ_2 sont distinctes et non nulles, on en déduit que a, $a+\mu_1$ et $a+\mu_2$ sont trois réels distincts.

$$\boxed{\text{La matrice } M(a,a,c) \text{ possède bien trois valeurs propres distinctes.}}$$

□

c. Vérifier la propriété $(*)$ pour la matrice $M(a,a,c)$.

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$\begin{array}{rcl} M(a,a,c) \text{ est inversible} & \Leftrightarrow & 0 \text{ n'est pas valeur propre de } M(a,a,c) \\ & \Leftrightarrow & 0 \notin \mathrm{Sp}\big(M(a,a,c)\big) = \{a, a+\mu_1, a+\mu_2\} \\ & \Leftrightarrow & a \neq 0 \quad \texttt{ET} \quad a+\mu_1 \neq 0 \quad \texttt{ET} \quad a+\mu_2 \neq 0 \end{array}$$

- Notons $b = a$.

$$\begin{array}{rcl} ab+bc+ac+abc \neq 0 & \Leftrightarrow & a^2+ac+ac+a^2c \neq 0 \\ & \Leftrightarrow & a\,(a+2c+ac) \neq 0 \end{array}$$

Rappelons alors que μ_1 et μ_2 sont les valeurs propres distinctes de la matrice $M(0,0,u)$ où $u = c - a$. Ainsi, d'après la question ***6.c)***, μ_1 et μ_2 sont les racines distinctes du polynômes :

$$R(X) \;=\; X^2 - (u+3)\,X + 2u \;=\; X^2 - ((c-a)+3)\,X + 2\,(c-a)$$

D'après les relations entre coefficients et racines, on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \mu_1 + \mu_2 & = & c - a + 3 \\ \mu_1 \times \mu_2 & = & 2\,(c-a) \end{array} \right.$$

En particulier : $2c = \mu_1\mu_2 + 2a$ et $c = \mu_1 + \mu_2 + a - 3$.

- On obtient alors :

$$\begin{array}{rcl} ab + bc + ac + abc \neq 0 & \Leftrightarrow & a\,(a + 2c + ac) \neq 0 \\ & \Leftrightarrow & a\,\big(a + (\mu_1\mu_2 + 2a) + a\,(\mu_1 + \mu_2 + a - 3)\big) \neq 0 \\ & \Leftrightarrow & a\,\big(\cancel{a} + \mu_1\mu_2 + \cancel{2a} + a\,(\mu_1 + \mu_2) + a^2 - \cancel{3a}\big) \neq 0 \\ & \Leftrightarrow & a\,\big((\mu_1 + a)\,(\mu_2 + a)\big) \neq 0 \\ & \Leftrightarrow & a \neq 0 \quad \texttt{ET} \quad a + \mu_1 \neq 0 \quad \texttt{ET} \quad a + \mu_2 \neq 0 \\ & \Leftrightarrow & M(a,a,c) \text{ inversible} \end{array}$$

$$\boxed{\text{La propriété } (*) \text{ est donc bien vérifiée dans le cas où } b = a.}$$

□

8. Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\text{Card}\,\big(\{a,b,c\}\big) = 2$.
À l'aide de la conclusion de la question ***3.***, montrer que la matrice $M(a,b,c)$ admet trois valeurs propres distinctes et vérifier la propriété $(*)$ dans ce cas.

Démonstration.
Deux des réels a, b et c sont égaux. On note x ces deux réels et z le dernier.
La matrice $M(a,b,c)$ s'écrit alors $M(x,x,z)$, ou $M(x,z,x)$, ou $M(z,x,x)$.

- Tout d'abord, d'après la question ***3.*** :

$$\text{Sp}\,\big(M(x,x,z)\big) \;=\; \text{Sp}\,\big(M(x,z,x)\big) \;=\; \text{Sp}\,\big(M(z,x,x)\big)$$

- Ainsi :

$$\begin{array}{rcll} \text{Sp}\,\big(M(a,b,c)\big) & = & \text{Sp}\,\big(M(x,x,z)\big) & \textit{(d'après ce qui précède)} \\ & = & \{x, x+\mu_1, x+\mu_2\} & \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{7.}}\textit{)} \end{array}$$

où μ_1 et μ_2 sont les deux racines distinctes du polynôme : $R(X) = X^2 - \big((z-x)+3\big)\,X + 2\,(z-x)$.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{On en déduit que la matrice } M(a,b,c) \text{ possède bien trois valeurs} \\ \text{propres distinctes } x,\ x+\mu_1 \text{ et } x+\mu_2.\end{array}}$$

- Comme deux des réels a, b et c sont égaux, on a, par définition de x et z : $abc = x^2\,z$.
Pour des raisons similaires : $ab + bc + ac = x^2 + x^2 + xy$. On en déduit :

$$\begin{array}{rcll} M(a,b,c) \text{ inversible} & \Leftrightarrow & 0 \notin \text{Sp}\,\big(M(a,b,c)\big) & \\ & \Leftrightarrow & 0 \notin \text{Sp}\,\big(M(x,x,z)\big) & \textit{(car } \text{Sp}\,\big(M(a,b,c) = \text{Sp}\,\big(M(x,x,z)\big)\textit{)} \\ & \Leftrightarrow & x^2 + x^2 + xy + x^2 z = 0 & \textit{(car } M(x,x,z) \textit{ vérifie la propriété } (*)\textit{)} \\ & \Leftrightarrow & ab + bc + ac + abc = 0 & \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, la matrice } M(a,b,c) \text{ vérifie bien la propriété } (*).}$$

□

Partie D : Cas où $\text{Card}\big(\{a,b,c\}\big) = 3$

9. Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $a < b < c$.
On note g la fonction définie sur l'ensemble $D = \mathbb{R} \setminus \{a,b,c\}$ par :

$$\forall x \in D,\ g(x) \ = \ \frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} + \frac{1}{x-c}$$

a) Dresser le tableau de variations de g sur D en y précisant les limites en $+\infty$, en $-\infty$, ainsi qu'à gauche et à droite de a, de b et de c.

Démonstration.

- La fonction $h_1 : x \mapsto \dfrac{1}{x-a}$ est dérivable sur $]-\infty, a[\cup]a, +\infty[$ car elle est l'inverse $h = \dfrac{1}{u_1}$ où $u_1 : x \mapsto x - a$:
  - $\times$ est dérivable sur $]-\infty, a[\cup]a, +\infty[$,
  - $\times$ `NE S'ANNULE PAS` sur $]-\infty, a[\cup]a, +\infty[$.

  En particulier, h_1 est dérivable sur D.
  On démontre de même que $h_2 : x \mapsto \dfrac{1}{x-b}$ et $h_3 : x \mapsto \dfrac{1}{x-c}$ sont dérivables sur D.

  La fonction $g = h_1 + h_2 + h_3$ est dérivable sur D comme somme de fonctions dérivables sur D.

- Soit $x \in D$.

$$g'(x) \quad = \quad -\frac{1}{(x-a)^2} - \frac{1}{(x-b)^2} - \frac{1}{(x-c)^2} < 0$$

(car somme de termes strictement négatifs)

On en déduit le tableau de variation suivant.

x	$-\infty$	a	b	c	$+\infty$
Signe de $g'(x)$	$-$	$-$	$-$	$-$	
g	$0 \searrow -\infty$	$+\infty \searrow -\infty$	$+\infty \searrow -\infty$	$+\infty \searrow 0$	

- Détaillons les éléments de ce tableau. On note $x_1 = a$, $x_2 = b$ et $x_3 = c$. Soit $i \in [\![1,3]\!]$.
  - $\times$ comme $\lim\limits_{x \to -\infty} (x - x_i) = -\infty$ alors $\lim\limits_{x \to -\infty} h_i(x) = 0$.

    Ainsi : $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = 0 + 0 + 0 = 0.$

  - $\times$ en posant le changement de variable $t = x - x_i$, on obtient :

$$\lim_{\substack{x \to x_i \\ x < x_i}} \frac{1}{x - x_i} = \lim_{\substack{t \to 0 \\ t < 0}} \frac{1}{t} = -\infty$$

De plus, si $j \in [\![1,3]\!]$ et $j \neq i$, $\displaystyle\lim_{\substack{x \to x_i \\ x < x_i}} \frac{1}{x - x_j} = \frac{1}{x_i - x_j}$ (réel fini).

Ainsi, pour tout $i \in [\![1,3]\!]$: $\displaystyle\lim_{\substack{x \to x_i \\ x < x_i}} g(x) = -\infty.$

× en posant le changement de variable $t = x - x_i$, on obtient :

$$\lim_{\substack{x \to x_i \\ x > x_i}} \frac{1}{x - x_i} = \lim_{\substack{t \to 0 \\ t > 0}} \frac{1}{t} = +\infty$$

De plus, si $j \in [\![1,3]\!]$ et $j \neq i$, $\displaystyle\lim_{\substack{x \to x_i \\ x > x_i}} \frac{1}{x - x_j} = \frac{1}{x_i - x_j}$ (réel fini).

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } i \in [\![1,3]\!] : \lim_{\substack{x \to x_i \\ x > x_i}} g(x) = +\infty.}$$

× comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} (x - x_i) = +\infty$ alors $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} h_i(x) = 0$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } \lim_{x\to+\infty} g(x) = 0 + 0 + 0 = 0.}$$

□

b) En déduire que l'équation $g(x) = 1$, d'inconnue $x \in D$, admet exactement trois solutions distinctes λ_1, λ_2, λ_3, vérifiant : $a < \lambda_1 < b < \lambda_2 < c < \lambda_3$.

Démonstration.

- Tout d'abord, comme $g\big(]-\infty, a[\big) = \left]\displaystyle\lim_{x\to-\infty} g(x), \lim_{x\to a} g(x)\right[=]-\infty, 0[$, alors $g(x) = 1$ n'admet pas de solution sur $]-\infty, a[$.
- Soit $i \in [\![1,2]\!]$. La fonction g est :
  × continue sur $]x_i, x_{i+1}[$ (car dérivable sur $]x_i, x_{i+1}[$),
  × strictement décroissante sur $]x_i, x_{i+1}[$.
  Ainsi g réalise une bijection de $]x_i, x_{i+1}[$ dans $g\big(]x_i, x_{i+1}[\big)$.
  $$g\big(]x_i, x_{i+1}[\big) = \left]\lim_{x\to x_{i+1}^+} g(x), \lim_{x\to x_i^-} g(x)\right[=]-\infty, +\infty[$$
  Or $1 \in]-\infty, +\infty[$.
  On en déduit que l'équation $g(x) = 1$ admet une unique solution sur $]x_i, x_{i+1}[$, notée λ_i.
- De même, g réalise une bijection de $]c, +\infty[$ dans :
  $$g\big(]c, +\infty[\big) = \left]\lim_{x\to+\infty} g(x), \lim_{x\to c} g(x)\right[=]0, +\infty[$$
  Or $1 \in]0, +\infty[$.
  On en déduit que l'équation $g(x) = 1$ admet une unique solution sur $]c, +\infty[$, notée λ_3.

En résumé, l'équation $g(x) = 1$:
× n'admet pas de solution sur $]-\infty, a[$.
× admet une unique solution λ_1 sur $]a, b[$.
× admet une unique solution λ_2 sur $]b, c[$.
× admet une unique solution λ_3 sur $]c, +\infty[$.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Finalement, l'équation } g(x) = 1 \text{ admet exactement trois solutions sur } D \\ \text{qui vérifient : } a < \lambda_1 < b < \lambda_2 < c < \lambda_3.\end{array}}$$

□

c) Soit $\lambda \in D$ une solution de l'équation $g(x) = 1$.

On note X_λ la matrice colonne de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ définie par : $X_\lambda = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\lambda - a} \\ \dfrac{1}{\lambda - b} \\ \dfrac{1}{\lambda - c} \end{pmatrix}$.

Montrer que X_λ est un vecteur propre de la matrice $M(a, b, c)$ associé à la valeur propre λ.

Démonstration.

- Remarquons tout d'abord que comme $\lambda \in D$, alors la matrice X_λ est bien définie.
  De plus : $X_\lambda \neq 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$.
- On a :

$$\begin{aligned} M(a,b,c)\, X_\lambda &= \begin{pmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda-a} \\ \frac{1}{\lambda-b} \\ \frac{1}{\lambda-c} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \dfrac{1+a}{\lambda-a} + \dfrac{1}{\lambda-b} + \dfrac{1}{\lambda-c} \\ \dfrac{1}{\lambda-a} + \dfrac{1+b}{\lambda-b} + \dfrac{1}{\lambda-c} \\ \dfrac{1}{\lambda-a} + \dfrac{1}{\lambda-b} + \dfrac{1+c}{\lambda-c} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- Or, par définition de λ :

$$\begin{array}{lrcl} & g(\lambda) &=& 1 \\ \text{donc} & \dfrac{1}{\lambda-a} + \dfrac{1}{\lambda-b} + \dfrac{1}{\lambda-c} &=& 1 \\ \text{ainsi} & \left(\dfrac{1}{\lambda-a} + \dfrac{a}{\lambda-a}\right) + \dfrac{1}{\lambda-b} + \dfrac{1}{\lambda-c} &=& 1 + \dfrac{a}{\lambda-a} = \dfrac{(\lambda - \cancel{a}) + \cancel{a}}{\lambda - a} \end{array}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \dfrac{1+a}{\lambda-a} + \dfrac{1}{\lambda-b} + \dfrac{1}{\lambda-c} = \lambda\ \dfrac{1}{\lambda-a}.}$$

$$\boxed{\text{En raisonnant de même, on démontre : } \dfrac{1}{\lambda-a} + \dfrac{1+b}{\lambda-b} + \dfrac{1}{\lambda-c} = \lambda\ \dfrac{1}{\lambda-b}.}$$

$$\boxed{\text{Et aussi : } \dfrac{1}{\lambda-a} + \dfrac{1}{\lambda-b} + \dfrac{1+c}{\lambda-c} = \lambda\ \dfrac{1}{\lambda-c}.}$$

- Finalement :

$$M(a,b,c)\, X_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda\ \dfrac{1}{\lambda-a} \\ \lambda\ \dfrac{1}{\lambda-b} \\ \lambda\ \dfrac{1}{\lambda-c} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\lambda-a} \\ \dfrac{1}{\lambda-b} \\ \dfrac{1}{\lambda-c} \end{pmatrix} = \lambda\ X_\lambda$$

  On a démontré qu'il existe $\lambda \neq 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$ tel que $M(a,b,c)\ X_\lambda = \ \lambda\ X_\lambda$.

$$\boxed{\text{Ainsi, } \lambda \text{ est valeur propre de } M(a,b,c) \text{ et } X_\lambda \text{ est un vecteur propre de } M(a,b,c) \text{ associé à la valeur propre } \lambda.}$$

□

d) En déduire que la matrice $M(a,b,c)$ admet trois valeurs propres distinctes.

Démonstration.

- Comme $M(a,b,c) \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, la matrice $M(a,b,c)$ admet au plus 3 valeurs propres.
- D'après la question ***9.c)***, tout réel λ solution de $g(x) = 1$ est valeur propre de $M(a,b,c)$. D'après l'étude menée en ***9.b)***, cette équation a trois solutions distinctes λ_1, λ_2 et λ_3.

$$\boxed{\text{Finalement : } \mathrm{Sp}\big(M(a,b,c)\big) = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}.}$$

□

10. Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\mathrm{Card}\big(\{a,b,c\}\big) = 3$.

Commentaire

Par l'écriture « Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ », on introduit un nouveau triplet (a,b,c). Ce triplet est donc, a priori, différent de celui introduit en question ***9***.
En particulier, on ne suppose pas ici : $a < b < c$.

a) Montrer que la matrice $M(a,b,c)$ admet trois valeurs propres distinctes.

Démonstration.
Les trois réels a, b et c sont distincts.
On note u le plus petit d'entre eux, w le plus grand et v le dernier.
On raisonne alors comme en question ***8***.

- Tout d'abord :

$$\mathrm{Sp}\big(M(a,b,c)\big) \quad = \quad \mathrm{Sp}\big(M(u,v,w)\big) \qquad \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{3}}\textit{)}$$

- Or, d'après la question précédente, les valeurs propres de $M(u,v,w)$ sont les solutions de l'équation :

$$\underbrace{\frac{1}{x-u} + \frac{1}{x-v} + \frac{1}{x-w}}_{\substack{\shortparallel \\ g(x)}} \quad = \quad 1 \qquad \textit{(par définition de } u, v \textit{ et } w\textit{)}$$

- Finalement :

$$\mathrm{Sp}\big(M(a,b,c)\big) \ = \ \mathrm{Sp}\big(M(u,v,w)\big) \ = \ \{\lambda \mid g(\lambda) = 1\} \ = \ \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, la matrice } M(a,b,c) \text{ admet bien trois valeurs propres distinctes.}}$$

□

b) Vérifier la propriété $(*)$ pour la matrice $M(a,b,c)$.

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$\begin{aligned} M(a,b,c) \text{ inversible} \ &\Leftrightarrow \ 0 \notin \mathrm{Sp}\big(M(a,b,c)\big) \\ &\Leftrightarrow \ 0 \notin \{\lambda \mid g(\lambda) = 1\} \\ &\Leftrightarrow \ g(0) \neq 1 \end{aligned}$$

- Or :

$$\begin{aligned} g(0) = 1 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{-a} + \frac{1}{-b} + \frac{1}{-c} = 1 \\ &\Leftrightarrow \quad -\frac{bc+ac+ab}{abc} = 1 \\ &\Leftrightarrow \quad bc+ac+ab = -abc \qquad \textit{(en mutipliant par } -abc\textit{)} \\ &\Leftrightarrow \quad bc+ac+ab+abc = 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On a bien : } M(ab,c) \text{ inversible } \Leftrightarrow g(0) \neq 1 \Leftrightarrow bc+ac+ab+abc \neq 0.}$$

□

11. On pose : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

a) Justifier que la matrice A est inversible.

Démonstration.

- On remarque :

$$A = \begin{pmatrix} 1+0 & 1 & 1 \\ 1 & 1+1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+2 \end{pmatrix} = M(0,1,2)$$

- En notant $a = 0$, $b = 1$, $c = 2$, on est dans le cas de la question ***10***. On a alors :

$$\begin{aligned} M(a,b,c) \text{ inversible} \quad &\Leftrightarrow \quad ab+bc+ac+abc \neq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad 0 \times 1 + 1 \times 2 + 0 \times 2 + 0 \times 1 \times 2 \neq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad 2 \neq 0 \end{aligned}$$

La dernière proposition étant vérifiée, il en est de même de la première.

$$\boxed{\text{La matrice } M(0,1,2) \text{ est bien inversible.}}$$

Commentaire

- Il était aussi possible d'effectuer un calcul de rang.

$$\text{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{=} \text{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\right)$$

La réduite obtenue est triangulaire (supérieure) et ses coefficients diagonaux sont non nuls. Elle est donc inversible et il en est de même de la matrice initiale $M(a,b,c)$.

- Ce n'était certainement pas cette démonstration que le concepteur avait en tête. En effet, cette question ***11.*** apparaît comme une question bilan. Il s'agit de tester le recul des candidats sur l'exercice. Il est donc préférable d'utiliser les résultats de l'énoncé plutôt que d'effectuer un calcul de rang (ce qui pourrait ne pas rapporter tous les points alloués à cette question).

□

b) On note α la plus grande valeur propre de A.

(i) Montrer : $4 < \alpha < 5$.

Démonstration.

- En notant $a = 0$, $b = 1$, $c = 2$, on est dans le cadre de l'application ***9***.
  On en conclut que A admet alors trois valeurs propres telles que : $0 < \lambda_1 < 1 < \lambda_2 < 2 < \lambda_3$.

  $$\boxed{\text{En particulier, } \alpha = \lambda_3 > 2.}$$

- L'énoncé exige un résultat plus précis qui demande une étude plus fine. D'après la question ***9.***, les valeurs propres de A sont les solutions de l'équation $g(x) = 1$ où g est une fonction qui admet pour tableau de variation :

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$
Signe de $g'(x)$	$-$	$-$	$-$	$-$	
g	$0 \searrow -\infty$	$+\infty \searrow -\infty$	$+\infty \searrow -\infty$	$+\infty \searrow 0$	

  En particulier, g est strictement décroissante sur $]2, +\infty[$.

- On remarque alors :
  × $g(4) = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4-1} + \dfrac{1}{4-2} = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{3+4+6}{12} = \dfrac{13}{12} > 1$,
  × $g(\alpha) = 1$ par définition de α,
  × $g(5) = \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{5-1} + \dfrac{1}{5-2} = \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{3} = \dfrac{12+15+20}{60} = \dfrac{47}{60} < 1$.

On a donc : $g(5) < g(\alpha) < g(4)$.

- Notons h la réciproque de g sur $]2, +\infty[$.
  D'après le théorème de la bijection, $h :]0, +\infty[\to]2, +\infty[$ est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$. En appliquant h de part et d'autre de l'inégalité précédente :

$$\begin{array}{ccccc} h\big(g(5)\big) & > & h\big(g(\alpha)\big) & > & h\big(g(4)\big) \\ \shortparallel & & \shortparallel & & \shortparallel \\ 5 & > & \alpha & > & 4 \end{array}$$

$$\boxed{\text{On a bien démontré : } 4 < \alpha < 5.}$$ □

(ii) Recopier et compléter les lignes incomplètes de la fonction **Scilab** ci-dessous afin qu'elle renvoie une valeur approchée de α à 10^{-3} près à l'aide de la méthode de dichotomie.

```
function alpha = valeur_approchee()
    x = 4
    y = 5
    while .........
        m = (x + y) / 2
        if 1/m + 1/(m-1) + 1/(m-2) ......... then
            .........
        else
            .........
        end
        alpha = (x+y)/2
    end
endfunction
```

Démonstration.

- Afin de bien comprendre tous les mécanismes en jeu, on se permet d'apporter une réponse très détaillée à cette question, accompagnée d'un aparté sur la méthode de recherche par dichotomie. Il faut toutefois garder en tête qu'un tel niveau de détail n'est pas du tout attendu lors des concours. Fournir la fonction **Scilab** démontre la bonne compréhension et permet d'obtenir la totalité des points alloués à cette question.
  Commençons par rappeler le cadre de la recherche par dichotomie.

> *Calcul approché d'un zéro d'une fonction par dichotomie*
>
> **Données** :
>
> × une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
>
> × un intervalle de recherche $[x, y]$,
>
> × une précision de recherche ε.
>
> **Résultat** : une valeur approchée à ε près d'un zéro (sur l'intervalle $[x, y]$) de la fonction f.
> Autrement dit, une valeur approchée (à ε près) d'un réel $u \in [x, y]$ tel que : $f(u) = 0$.

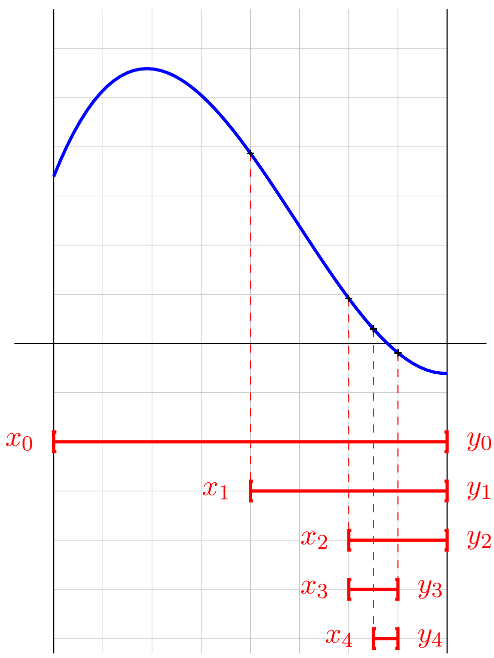
- La dichotomie est une méthode itérative dont le principe, comme son nom l'indique, est de découper à chaque itération l'intervalle de recherche en deux nouveaux intervalles. L'intervalle de recherche est découpé en son milieu. On obtient deux nouveaux intervalles :
  × un intervalle dans lequel on sait que l'on va trouver un zéro de f.
  Cet intervalle est conservé pour l'itération suivante.
  × un intervalle dans lequel ne se trouve pas forcément un zéro de f.
  Cet intervalle n'est pas conservé dans la suite de l'algorithme.

  La largeur de l'intervalle de recherche est ainsi divisée par 2 à chaque itération.
  On itère jusqu'à obtenir un intervalle I contenant un zéro de f et de largeur plus faible que ε.
  Les points de cet intervalle I sont tous de bonnes approximations du zéro de f contenu dans I.

- C'est le **théorème des valeurs intermédiaires** qui permet de choisir l'intervalle qu'il faut garder à chaque étape. Rappelons son énoncé et précisons maintenant l'algorithme :

> **Théorème des Valeurs Intermédiaires**
>
> Soit $f : [x, y] \to \mathbb{R}$ continue sur l'**intervalle** $[x, y]$.
>
> Supposons : $f(x)\ f(y) \leqslant 0$.
>
> Alors il existe $c \in [x, y]$ tel que $f(c) = 0$.

> **Calcul des suites** (x_j), (y_j), (m_j)
>
> Cas $f(x) \geqslant 0$ et $f(y) \leqslant 0$
>
> - Initialement, $x_0 = x$, $y_0 = y$
> - À chaque tour de boucle (tant que $y_j - x_j > \varepsilon$) :
>
>   × $m_j = \dfrac{x_j + y_j}{2}$ (point milieu de $[x_j, y_j]$)
>
>   × si $f(m_j) > 0$ alors :
>   * $x_{j+1} = m_j$
>   * $y_{j+1} = y_j$
>
>   × si $f(m_j) \leqslant 0$ alors :
>   * $x_{j+1} = x_j$
>   * $y_{j+1} = m_j$



- On construit ainsi une suite $\big([x_j, y_j]\big)_{j\in\mathbb{N}}$ de segments emboîtés :
  × contenant tous un zéro de f,
  × dont la largeur est divisée par deux d'un rang au suivant.
- Il reste enfin à adapter cet algorithme à l'énoncé.
  On cherche une valeur de u telle que : $g(u) = 1$. Considérons alors la fonction : $f : u \mapsto g(u) - 1$.
  On se fixe initialement l'intervalle de recherche $[4, 5]$ de sorte que l'équation $h(u) = 0$ ne possède qu'une solution, à savoir la valeur α qu'on cherche à approcher. D'un point de vue informatique, on crée des variables x et y destinées à contenir les valeurs succesives de x_j et y_j. Ces variables sont initialisées respectivement à 4 et 5.

```
x = 4
y = 5
```

On procède alors de manière itérative, tant que l'intervalle de recherche n'est pas de largeur plus faible que la précision 10^{-3} escomptée.

```
while (y-x) > 10 ^ (-3)
```

On commence par définir le point milieu du segment de recherche.

```
m = (x+y) / 2
```

Puis on teste si $f(\mathtt{m}) > 0$.
Si c'est le cas, la recherche s'effectue dans le demi-segment de droite.

```
if 1/m + 1/(m-1) + 1/(m-2) - 1 > 0 then
  x = m
```

Sinon, elle s'effectue dans le demi-segment de droite.

```
else
  y = m
end
```

En sortie de boucle, on est assuré que le segment de recherche, mis à jour au fur et à mesure de l'algorithme, est de largeur plus faible que 10^{-3} et contient un zéro de f. Tout point de cet intervalle est donc une valeur approchée à 10^{-3} près de ce zéro.
On peut alors choisir de renvoyer le point le plus à gauche du segment.

```
alpha = x
```

On peut tout aussi bien choisir le point le plus à droite :

```
alpha = y
```

Ou encore le point milieu :

```
alpha = (x + y) / 2
```

Ce dernier choix présente un avantage : tout point (dont le zéro recherché) du dernier intervalle de recherche se situe à une distance d'au plus $\dfrac{10^{-3}}{2}$ de ce point milieu.
On obtient ainsi une valeur approchée à $\dfrac{10^{-3}}{2}$ du zéro recherché.

Commentaire

- On peut se demander combien de tours de boucle sont nécessaires pour obtenir le résultat. Pour le déterminer, il suffit d'avoir en tête les éléments suivants :
  - × l'intervalle de recherche initial $[4, 5]$ est de largeur 1.
  - × la largeur de l'intervalle de recherche est divisée par 2 à chaque tour de boucle.
    À la fin du $n^{\text{ème}}$ tour de boucle, l'intervalle de recherche est donc de largeur $\dfrac{1}{2^n}$.
  - × l'algorithme s'arrête lorsque l'intervalle devient de largeur plus faible que 10^{-3}.

  On obtient le nombre d'itérations nécessaires en procédant par équivalence :

$$\begin{array}{rcll} \dfrac{1}{2^n} \leqslant 10^{-3} & \Leftrightarrow & 2^n \geqslant 10^3 & \textit{(par stricte croissance de la fonction inverse sur } \mathbb{R}_+^*\textit{)} \\ & \Leftrightarrow & \ln\left(2^n\right) \geqslant \ln\left(10^3\right) & \textit{(par stricte croissance de la fonction } \ln \textit{ sur } \mathbb{R}_+^*\textit{)} \\ & \Leftrightarrow & n \ \ln(2) \geqslant 3 \ \ln(10) & \\ & \Leftrightarrow & n \geqslant 3 \ \dfrac{\ln(10)}{\ln(2)} & \textit{(car } \ln(2) > 0\textit{)} \end{array}$$

  Ainsi : $\left\lceil 3 \ \dfrac{\ln(10)}{\ln(2)} \right\rceil$ tours de boucle suffisent.

  On retiendra que si l'on souhaite obtenir une précision de 3 chiffres après la virgule, il suffit d'effectuer de l'ordre de 3 tours de boucle. Cet algorithme est donc extrêmement rapide.

- On obtient le programme complet suivant.

```
function alpha = valeur_approchee()
  x = 4
  y = 5
  while (y-x) > 10 ^ (-3)
    m = (x+y) / 2
    if 1/m + 1/(m-1) + 1/(m-2) - 1 > 0 then
      x = m
    else
      y = m
    end
  end
  alpha = (x + y) / 2
endfunction
```

□

Commentaire

Dans le programme donné par l'énoncé, l'instruction :

```
11      alpha = (x + y) / 2
```

apparaît en ligne 11, comme dernière instruction de la boucle. Placée ainsi, il faut bien comprendre que l'instruction **alpha** `= (x + y) / 2` va être effectuée à chaque tour de boucle. Ainsi, la valeur de la variable **alpha** est écrasée à chaque tour de boucle. Il en résulte que la variable **alpha** contient en fin de boucle la dernière valeur qui lui a été affectée. De ce fait, on peut s'interroger sur la pertinence d'une telle présentation. Comme seule la dernière affectation **alpha** `= (x + y) / 2` permet de définir la valeur de la variable **alpha**, il apparaît bien plus raisonnable d'effectuer cette instruction une seule fois en sortie de boucle. C'est le choix qui est fait dans ce corrigé.