HEC/ESSEC, voie ECE - Épreuve de mathématiques du 28 avril 2021

Corrigé proposé par Romain Meurant pour l'APHEC. Toute suggestion permettant de l'améliorer est la bienvenue : romain.meurant@lycee-descartes.ma

1.
```
function r=X(t)               // On simule la loi G(t)
   r=1
   while rand() > t            // Tant qu'on a un échec...
      r = r+1             // ... on compte.
   end
endfunction

Y=rand()
Z = X(Y)          // Définition de Z
disp(Z)
```

2. (a) Pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \mathrm{P}\big((Z=k)\cap(Y=y)\big) &= \mathrm{P}\big((X_y=k)\cap(Y=y)\big) && \text{(définition de } Z\text{)}\\ &= \mathrm{P}(X_y=k)\times\mathrm{P}(Y=y) && \text{(indépendance de } X_y \text{ et } Y\text{)}\\ &= f_k(y)\mathrm{P}(Y=y). \end{aligned}$$

Si de plus $\mathrm{P}(Y=y)\neq 0$, alors :

$$f_k(y) = \frac{\mathrm{P}\big((Z=k)\cap(Y=y)\big)}{\mathrm{P}(Y=y)} = \mathrm{P}_{(Y=y)}(Z=k).$$

(b) Appliquons alors la formule des probabilités totales au système complet d'événements élémentaires $\{(Y=y)\}_{y\in Y(\Omega)}$:

$$\mathrm{P}(Z=k) = \sum_{y\in Y(\Omega)} \mathrm{P}\big((Z=k)\cap(Y=y)\big) = \sum_{y\in Y(\Omega)} f_k(y)\mathrm{P}(Y=y).$$

D'après le théorème de transfert, cette dernière somme est égale à $\mathrm{E}\big(f_k(Y)\big)$.

(c) Soit $k\in\mathbb{N}$. La fonction f_k est définie par :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad f_k(n) = \begin{cases} \dfrac{1}{n} & \text{si } n\geq k\geq 1\\ 0 & \text{sinon } (k=0 \text{ ou } k>n) \end{cases}$$

Reprenons la relation prouvée en (b) :

$$\mathrm{P}(Z=k) = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_k(n)\mathrm{P}(Y=n) = \dots$$

— $\dots = 0$ pour $k=0$;

— pour $k\geq 1$:

$$\dots = \sum_{n=k}^{+\infty}\frac{1}{n}\times np^2(1-p)^{n-1} = p^2\sum_{n=k}^{+\infty}(1-p)^{n-1}.$$

On procède au changement d'indice $n'=n-k$:

$$\mathrm{P}(Z=k) = p^2\sum_{n'=0}^{+\infty}(1-p)^{n+k-1} = p^2(1-p)^{k-1}\sum_{n'=0}^{+\infty}(1-p)^{n'}$$

et on reconnaît la somme d'une série géométrique convergente ($0<1-p<1$) :

$$\mathrm{P}(Z=k) = p^2(1-p)^{k-1}\times\frac{1}{p} = p(1-p)^{k-1}.$$

On a ainsi prouvé que la variable aléatoire Z suit la loi $\mathcal{G}(p)$.

3. (a) Notons tout d'abord que :

$$\forall t\in J,\quad g(t) = \mathrm{E}(X_t) = \sum_{k=0}^{+\infty} k\mathrm{P}(X_t=k) = \sum_{k=0}^{+\infty} kf_k(t).$$

(la somme est bien convergente car X_t admet une espérance).
Utilisons le théorème de transfert, $g(Y)$ admettant une espérance :

$$\mathrm{E}\big(g(Y)\big) = \sum_{y\in Y(\Omega)} g(y)\mathrm{P}(Y=y) = \sum_{y\in Y(\Omega)}\left(\sum_{k=0}^{\infty} kf_k(y)\right)\mathrm{P}(Y=y)$$

On obtient bien :

$$\mathrm{E}\big(g(Y)\big) = \sum_{y\in Y(\Omega)}\left(\sum_{k=0}^{+\infty} kf_k(y)\mathrm{P}(Y=y)\right).$$

(b) En permutant les sommes comme l'énoncé nous le permet :

$$\mathrm{E}\big(g(Y)\big) = \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sum_{y\in Y(\Omega)} kf_k(y)\mathrm{P}(Y=y)\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} k\left(\sum_{y\in Y(\Omega)} f_k(y)\mathrm{P}(Y=y)\right) = \dots$$

On utilise à nouveau le théorème de transfert, puis la relation (1) :

$$\dots = \sum_{k=0}^{+\infty} k\mathrm{E}\big(f_k(Y)\big) = \sum_{k=0}^{+\infty} k\mathrm{P}(Z=k) = \mathrm{E}(Z).$$

4. (a) Déterminons la loi de Z grâce à la relation (1).
Une densité de Y est la fonction h définie par :

$$h(t)=\begin{cases} 1 & \text{si } t\in[0,1] \\ 0 & \text{sinon}\end{cases}.$$

Soit $k\in\mathbb{N}^*$. Comme $f_k : t\mapsto t(1-t)^{k-1}$ est continue sur $[0,1]$ et h est nulle en dehors de $[0,1]$, le théorème de transfert (« version densité » cette fois !) donne :

$$\mathrm{E}\big(f_k(Y)\big)=\int_0^1 f_k(t)h(t)\mathrm{d}t=\int_0^1 t(1-t)^{k-1}\mathrm{d}t=\dots$$

Une méthode efficace pour calculer cette intégrale est d'effectuer le changement de variable $u=1-t$ pour pouvoir ensuite « couper » en deux intégrales simples :

$$\dots=\int_{-1}^0(1-u)u^{k-1}(-\mathrm{d}u)=\int_0^1 u^{k-1}\mathrm{d}u-\int_0^1 u^k\mathrm{d}u=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}=\frac{1}{k(k+1)}.$$

Une autre possibilité est d'utiliser une intégration par parties.

La relation (1) nous donne donc :

$$\forall k\in\mathbb{N}^*,\quad \mathrm{P}(Z=k)=\frac{1}{k(k+1)}.$$

La variable aléatoire Z n'admet pas d'espérance car la série

$$\sum_{k\geq 1}k\mathrm{P}(Z=k)=\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k+1}$$

diverge (c'est la série harmonique).

(b) La fonction g a pour expression :

$$\forall t\in]0,1[,\quad g(t)=\mathrm{E}(X_t)=\frac{1}{t}\qquad (X_t\hookrightarrow\mathcal{G}(t)).$$

Ainsi, le théorème de transfert donnerait, en cas de convergence :

$$\mathrm{E}\big(g(Y)\big)=\mathrm{E}\left(\frac{1}{Y}\right)=\int_0^1\frac{1}{t}\mathrm{d}t$$

mais cette intégrale diverge.
Ainsi, la variable aléatoire $g(Y)$ n'admet pas d'espérance.

5. (a) Procédons comme en question 4., en utilisant la relation (1).
Une densité de Y est la fonction h définie par :

$$h(t)=\begin{cases} \lambda\mathrm{e}^{-\lambda t} & \text{si } t\geq 0 \\ 0 & \text{sinon}\end{cases}.$$

Soit $k\in\mathbb{N}$. Comme $f_k : t\mapsto \dfrac{t^k}{k!}\mathrm{e}^{-t}$ est continue sur $[0,+\infty[$, intervalle en dehors duquel h est nulle, le théorème de transfert donne, sous réserve de convergence :

$$\mathrm{E}\big(f_k(Y)\big)=\int_0^{+\infty}f_k(t)\times h(t)\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\frac{t^k}{k!}\mathrm{e}^{-t}\times\lambda\mathrm{e}^{-\lambda t}\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\frac{t^k}{k!}\lambda\mathrm{e}^{-(\lambda+1)t}\mathrm{d}t.$$

Avec le changement de variable affine (qui conserve la nature de l'intégrale) $x=(\lambda+1)t$:

$$\mathrm{E}\big(f_k(Y)\big)=\int_0^{+\infty}\frac{x^k}{k!\,(\lambda+1)^k}\lambda\mathrm{e}^{-x}\frac{\mathrm{d}x}{\lambda+1}=\frac{\lambda}{(\lambda+1)^{k+1}}\int_0^{+\infty}\frac{x^k}{k!}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x.$$

Cette dernière intégrale converge car la fonction $x\mapsto\dfrac{x^k}{k!}\mathrm{e}^{-x}$ est continue et positive sur $[0,+\infty[$, et négligeable devant $\dfrac{1}{x^2}$ en $+\infty$ (comparaison avec une intégrale de Riemann convergente).

(b) Le calcul de cette intégrale est très classique. On procède par récurrence en utilisant une intégration par parties dans l'hérédité.

(c) On déduit des deux questions précédentes :

$$\forall k\in\mathbb{N},\quad \mathrm{P}(Z=k)=\frac{\lambda}{(\lambda+1)^{k+1}}.$$

On a donc :

$$\forall \ell\in\mathbb{N}^*,\quad \mathrm{P}(Z+1=\ell)=\mathrm{P}(Z=\ell-1)=\frac{\lambda}{(\lambda+1)^\ell}=\frac{\lambda}{\lambda+1}\left(\frac{1}{\lambda+1}\right)^{\ell-1}.$$

La variable aléatoire $Z+1$ suit donc la loi $\mathcal{G}\left(\dfrac{\lambda}{\lambda+1}\right)$.

(d) — Par linéarité de l'espérance :

$$\mathrm{E}(Z)=\mathrm{E}(Z+1)-1=\frac{\lambda+1}{\lambda}-1=\frac{1}{\lambda}.$$

— Par ailleurs, la fonction g a pour expression :

$$\forall t\in[0,+\infty[,\quad g(t)=\mathrm{E}(X_t)=t\qquad (X_t\hookrightarrow\mathcal{P}(t)).$$

D'où : $g(Y)=Y\hookrightarrow\mathcal{E}(\lambda)$. Par conséquent :

$$\mathrm{E}\big(g(Y)\big)=\frac{1}{\lambda}.$$

La relation (2) est donc vérifiée dans cet exemple.

6. Le nombre de personnes contaminées le jour $n-k$ est Z_{n-k}. La contagiosité de ces personnes k jours plus tard (soit le jour n) est α_k. On a donc une contagion totale au jour n égale à :

$$I_n = \sum_{k=0}^{\min(n,d)} \alpha_k Z_{n-k}.$$

La somme s'arrête à $\min(n,d)$ car la contagiosité ne dure que $d+1$ jours ; au plus tard, le jour d, les personnes contaminées ne sont plus contagieuses.

7. (a) Les variables aléatoires R_n et I_n admettent une espérance et sont indépendantes, donc leur produit admet une espérance donnée par :

$$\mathrm{E}(Y_n) = \mathrm{E}(R_n)\mathrm{E}(I_n) = r_n \mathrm{E}(I_n).$$

Par ailleurs, la relation (2) de la partie 1 donne l'existence de l'espérance de Z_{n+1} avec :

$$\mathrm{E}(Z_{n+1}) = \mathrm{E}\big(g(Y_n)\big)$$

où g est la fonction d'expression (comme en question 5.) :

$$\forall t \in [0,+\infty[, \quad g(t) = \mathrm{E}(X_t) = t \qquad (X_t \hookrightarrow \mathcal{P}(t)).$$

Ainsi :

$$\mathrm{E}(Z_{n+1}) = \mathrm{E}\big(g(Y_n)\big) = \mathrm{E}(Y_n) = r_n \mathrm{E}(I_n).$$

(b) La question précédente donne l'existence de $\mathrm{E}(Z_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Comme la variable aléatoire Z_0 est certaine, elle admet également une espérance.
La relation (3) s'obtient à partir de la question précédente, en appliquant la linéarité de l'espérance à la relation $(\star)$:

$$\mathrm{E}(Z_{n+1}) = r_n \mathrm{E}(I_n) = r_n \mathrm{E}\left(\sum_{k=0}^{\min(n,d)} \alpha_k Z_{n-k}\right) = r_n \sum_{k=0}^{\min(n,d)} \alpha_k \mathrm{E}(Z_{n-k}) = r_n \sum_{k=0}^{\min(n,d)} \alpha_k z_{n-k}.$$

8. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\quad z_n = \dfrac{n+1}{n} \displaystyle\sum_{k=0}^{\min(n-1,d)} \alpha_k z_{n-1-k}.$

On peut proposer ce code :

```
function r=z(Delta,n)
    Z = [1]         // z_0 = 1
    for k=1:n           // On calcule les z_k successivement
        p = min(k-1,d)
        s = (k+1)/k * sum( Delta([1:p+1]).*Z([$:-1:$-p]) )
        Z = [Z, s]
    end
    r = Z(n+1)
endfunction
```

La partie `Z([$:-1:$-p])` de ce code permet d'extraire les $p+1$ dernières valeurs du vecteur Z en inversant l'ordre (pas de -1). On fait ensuite la somme des coordonnées d'un vecteur issu d'une opération pointée dans la ligne :

```
s = (k+1)/k * sum( Delta([1:p+1]).*Z([$:-1:$-p]) )
```

Si l'on n'est pas à l'aise avec ces manipulations très scilabesques, on pourra remplacer cette ligne par :

```
s = 0
l = length(Z)
for i=1:p+1
    s = s + Delta(i)*Z(l-i+1)
end
s = (k+1)/k * s
```

9. Comme $U_n \subset (U_n \cup V_n)$, on a par croissance de P : $\quad \mathrm{P}(U_n) \leq \mathrm{P}(U_n \cup V_n) \quad (\leq 1)$.
Comme de plus $\mathrm{P}(U_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, le théorème d'encadrement donne :

$$\mathrm{P}(U_n \cup V_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

On en déduit :

$$\mathrm{P}(U_n \cap V_n) = \mathrm{P}(U_n) + \mathrm{P}(V_n) - \mathrm{P}(U_n \cup V_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1+1-1 = 1.$$

10. (a) L'événement A_n signifie qu'il n'y a plus jamais de contamination à partir du jour n. Donc :

$$B = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n.$$

La suite d'événements $(A_n)_{n\geq 1}$ étant croissante pour l'inclusion, le théorème de la limite monotone donne :

$$\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{P}(A_n)$$

(b) Pour tout $p \geq d$, on a égalité des événements $\displaystyle\bigcap_{k=n}^{n+p} (Z_k = 0)$ et $\displaystyle\bigcap_{k=n}^{n+d} (Z_k = 0)$:

— L'inclusion $\displaystyle\bigcap_{k=n}^{n+p} (Z_k = 0) \subset \bigcap_{k=n}^{n+d} (Z_k = 0)$ est claire $(n+p \geq n+d)$.

— L'événement $\displaystyle\bigcap_{k=n}^{n+d} (Z_k = 0)$ signifie qu'il n'y a eu aucune contagion lors des jours $n, n+1, \ldots, n+d$.

Dans ce cas, il n'y a donc plus aucun individu contagieux à partir du jour $n+d+1$ (la contagiosité d'un individu ne dure que $d+1$ jours) et il ne peut donc plus y avoir de nouvelle contagion. Donc pour tout $k \geq n+d$, on a $Z_k = 0$.

Ainsi, la suite $\left(\bigcap_{k=n}^{n+p} (Z_k = 0)\right)_{p\geq 0}$ est stationnaire à partir du rang d, et sa limite vaut donc :

$$A_n = \bigcap_{k=n}^{+\infty} (Z_k = 0) = \bigcap_{k=n}^{n+d} (Z_k = 0).$$

En conclusion, on a les égalités de probabilités demandées.

(c) D'après (a), B est presque sûr si et seulement si $\mathrm{P}(A_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

— Dans ce cas, comme $\bigcap_{k=n}^{n+d} (Z_k = 0) \subset (Z_n = 0)$, on a :

$$\underbrace{\mathrm{P}(A_n)}_{\longrightarrow 1} = \mathrm{P}\left(\bigcap_{k=n}^{n+d} (Z_k = 0)\right) \leq \mathrm{P}(Z_n = 0) \leq 1$$

donc, par le théorème d'encadrement : $\mathrm{P}(Z_n = 0) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

— Réciproquement, supposons que $\mathrm{P}(Z_n = 0) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$. On a donc aussi :

$$\forall k \in \{n, \dots, n+d\}, \quad \mathrm{P}(Z_k = 0) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

D'après le résultat de la question 9., que l'on étend facilement au cas d'un nombre fini de suites d'événements :

$$\mathrm{P}\left(\bigcap_{k=n}^{n+d} (Z_k = 0)\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

On a donc prouvé que :

$$\mathrm{P}(B) = 1 \iff \mathrm{P}(Z_n = 0) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

(d) Les variables aléatoires Z_n ($n \in \mathbb{N}$) et $W = 0$ sont à valeurs dans $\mathbb{Z}$, ce qui permet d'utiliser la caractérisation de la convergence en loi à l'aide des probabilités :

$$(Z_n) \xrightarrow{\mathcal{L}} W \iff \left(\forall k \in \mathbb{Z},\ \mathrm{P}(Z_n = k) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{P}(W = k)\right).$$

Il reste donc à voir que :

$$\left(\forall k \in \mathbb{Z},\ \mathrm{P}(Z_n = k) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{P}(W = k)\right) \iff \mathrm{P}(Z_n = 0) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

C'est clair pour le sens « $\Longrightarrow$ ».

Pour le sens « $\Longleftarrow$ », on notera que sous l'hypothèse $\mathrm{P}(Z_n = 0) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, on a :

$$\forall k \in \mathbb{Z}^*,\ 0 \leq \mathrm{P}(Z_n = k) \leq 1 - \mathrm{P}(Z_n = 0)$$

ce qui donne, par théorème d'encadrement : $\mathrm{P}(Z_n = k) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 = \mathrm{P}(W = k)$.

11. (a) Comme $Z_{n+1} \hookrightarrow \mathcal{P}(Y_n)$, on a avec les notations de la partie 1 :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad f_0(t) = \mathrm{P}(X_t = 0) = \frac{t^0}{0!}\mathrm{e}^{-t} = \mathrm{e}^{-t} \qquad (X_t \hookrightarrow \mathcal{P}(t)).$$

D'après la relation (1) :

$$\mathrm{P}(Z_{n+1} = 0) = \mathrm{E}\big(f_0(Y_n)\big) = \mathrm{E}\left(\mathrm{e}^{-Y_n}\right).$$

(b) L'inégalité pour tout x réel, $\mathrm{e}^{-x} \geq 1 - x$, se prouve très simplement, par exemple en étudiant les variations de la « fonction différence » ou en utilisant la convexité de l'exponentielle.

La question précédente et la croissance de l'espérance donnent :

$$1 \geq \mathrm{P}(Z_{n+1} = 0) = \mathrm{E}\left(\mathrm{e}^{-Y_n}\right) \geq \mathrm{E}(1 - Y_n) = 1 - \mathrm{E}(Y_n).$$

Nous avons vu en question 7.(a) que $\mathrm{E}(Y_n) = z_{n+1}$. Donc :

$$1 \geq \mathrm{P}(Z_{n+1} = 0) \geq 1 - z_{n+1}$$

Ainsi, en supposant que z converge vers 0, le théorème d'encadrement donne :

$$\mathrm{P}(Z_{n+1} = 0) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$

ce qui équivaut à dire, d'après 10.(c), que B est presque sûr.

12. (a) — La somme étant finie, les opérations sur les limites donnent :

$$\sum_{k=0}^{d} a_k t^{d-k} \underset{t\to 1}{\longrightarrow} \sum_{k=0}^{d} a_k = \frac{1}{\alpha}\sum_{k=0}^{d} \alpha_k = 1.$$

— Raisonnons, comme proposé, par l'absurde en supposant que :

$$\forall \theta \in]0,1[, \quad \theta^{d+1} < \rho\left(\sum_{k=0}^{d} a_k \theta^{d-k}\right).$$

En passant à la limite quand $\theta \longrightarrow 1^-$, on obtient l'inégalité large : $1 \leq \rho$, ce qui contredit (H_1).

On a donc bien :

$$\exists \theta \in]0,1[, \quad \theta^{d+1} \geq \rho\left(\sum_{k=0}^{d} a_k \theta^{d-k}\right).$$

(b) On raisonne par récurrence forte en posant pour tout $n \geq N$:

$$\mathcal{P}(n) : \quad z_n \leq M\theta^n.$$

— Les propositions $\mathcal{P}(N)$, $\mathcal{P}(N+1)$, $\dots$, $\mathcal{P}(N+d)$ sont vraies par définition du max.

— Supposons, pour un entier $n_0 \geq N+d$ fixé, les propositions $\mathcal{P}(n_0 - d), \dots, \mathcal{P}(n_0)$ vraies. Alors :

$$\begin{aligned} z_{n_0+1} &\underset{(3)}{=} r_n\alpha \sum_{k=0}^{d} a_k z_{n_0-k} \underset{(\mathrm{HR})}{\leq} r_n\alpha \sum_{k=0}^{d} a_k M\theta^{n_0-k} \\ &\underset{(H_1)}{\leq} \boxed{\rho}\ M\ \theta^{n_0-d} \sum_{k=0}^{d} a_k \theta^{d-k} \\ &\underset{12.(a)}{\leq} M\ \theta^{n_0-d}\ \theta^{d+1} = M\ \theta^{n_0+1} \end{aligned}$$

On a ainsi prouvé que $\mathcal{P}(n_0+1)$ est vraie.

En conclusion, on a prouvé par récurrence que :

$$\forall n \geq N, \quad z_n \leq M\theta^n.$$

(c) Comme $\theta \in]0,1[$, on a : $\theta^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Avec le théorème d'encadrement, on déduit la limite demandée de :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq z_n \leq M\theta^n$$

($z_n = \mathrm{E}(Z_n) \geq 0$: c'est en effet l'espérance d'une variable aléatoire positive).

13. (a) — Avec l'hypothèse (H_3), la relation (3) devient :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad z_{n+1} = \sum_{k=0}^{\min(n,d)} a_k z_{n-k} = \sum_{k=0}^{d} a_k z_{n-k}.$$

Pour justifier l'égalité entre ces deux sommes :

— c'est clair lorsque $d \leq n$ (puisque dans ce cas, $\min(n,d) = d$) ;

— si $d > n$ (dans ce cas, $\min(n,d) = n$), alors les termes dans la seconde somme pour k allant de $n+1$ à d sont nuls ($z_{-1} = \cdots = z_{-d} = 0$).

Ceci justifie la première ligne L de la matrice recherchée, donnée dans l'énoncé.

— Pour les lignes suivantes, il suffit de remarquer que, pour tout $k \in \{1,\dots,d\}$, la coordonnées numéro k du vecteur U_n est égale à la coordonnée numéro $k+1$ du vecteur U_{n+1}.

Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \underbrace{\begin{pmatrix} z_{n+1} \\ z_n \\ \vdots \\ z_{n+1-d} \end{pmatrix}}_{U_{n+1}} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & \cdots & a_d \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} z_n \\ z_{n-1} \\ \vdots \\ z_{n-d} \end{pmatrix}}_{U_n}.$$

(b) On prouve alors par une récurrence immédiate que : $\forall n \in \mathbb{N},\ U_n = A^n U_0$. Puisque $LU_n = z_{n+1}$, on obtient alors :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ z_{n+1} = LA^n U_0.$$

14. Dans cette question :

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice étant de taille 3, elle admet au plus trois valeur propres. Il suffit donc pour répondre à la question (a) de vérifier que chacune des trois valeurs λ données dans l'énoncé est bien valeur propre, en résolvant le système :

$$AX = \lambda X \quad \text{pour} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}).$$

Ceci répondra à la question (b) en même temps.

(a) $AX = X \iff \left\{ \begin{array}{rcl} \frac{x}{6} + \frac{2y}{3} + \frac{z}{6} &=& x \\ x &=& y \\ y &=& z \end{array} \right. \iff x = y = z$

donc 1 est bien valeur propre avec $\dim \mathrm{E}_A(1) = 1$ et on choisit $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$AX = -\frac{1}{2}X \iff \left\{ \begin{array}{rcl} \frac{x}{6} + \frac{2y}{3} + \frac{z}{6} &=& -\frac{1}{2}x \\ x &=& -\frac{1}{2}y \\ y &=& -\frac{1}{2}z \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} 4x+4y+z &=& 0 \\ 2x+y &=& 0 \\ 2y+z &=& 0 \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcl} 2x+y &=& 0 \\ 2y+z &=& 0 \end{array} \right.$$

donc $-\dfrac{1}{2}$ est bien valeur propre avec $\dim \mathrm{E}_A\left(-\dfrac{1}{2}\right) = 1$ et on choisit $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

$$AX = -\frac{1}{3}X \iff \left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{x}{6} + \dfrac{2y}{3} + \dfrac{z}{6} & = & -\dfrac{1}{3}x \\ x & = & -\dfrac{1}{3}y \\ y & = & -\dfrac{1}{3}z \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} 3x+4y+z & = & 0 \\ 3x+y & = & 0 \\ 3y+z & = & 0 \end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} 3x+y & = & 0 \\ 3y+z & = & 0 \end{array}\right.$$

donc $-\dfrac{1}{3}$ est bien valeur propre avec $\dim \mathrm{E}_A\left(-\dfrac{1}{3}\right) = 1$ et on choisit $V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix}$.

Puisqu'il ne peut pas y avoir plus de trois valeurs propres :

$$\mathrm{Sp}(A) = \left\{1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\right\}.$$

(b) Le cours garantit que (V_1, V_2, V_3) est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ par concaténation de familles libres (en l'occurrence, trois familles composée chacune d'un vecteur non nul) de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes.

(c) Les réels s_1, s_2, s_3 recherchés sont les coordonnées du vecteur $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ dans la base (V_1, V_2, V_3).

En notant $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}$ la matrice de passage de la base canonique (e_1, e_2, e_3) de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ à la base (V_1, V_2, V_3), on trouve :

$$\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = P^{-1}U_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

(d) D'après la question 13.(b) et la question précédente :

$$\begin{aligned} z_{n+1} &= LA^nU_0 \\ &= LA^n(s_1V_1 + s_2V_2 + s_3V_3) \\ &= s_1LA^nV_1 + s_2LA^nV_2 + s_3LA^nV_3. \end{aligned}$$

En notant $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -\dfrac{1}{2}$ et $\lambda_3 = -\dfrac{1}{3}$ les valeurs propres de A, on a pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$:

$$A^nV_i = {\lambda_i}^nV_i$$

(récurrence immédiate en utilisant $AV_i = \lambda_iV_i$).

Ainsi :

$$z_{n+1} = s_1LV_1 + s_2\underbrace{\left(-\frac{1}{2}\right)^n}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0} LV_2 + s_2\underbrace{\left(-\frac{1}{3}\right)^n}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0} LV_3 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} s_1LV_1.$$

Or :

$$LV_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1.$$

En conclusion :

$$z_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} s_1 \quad \left(= \frac{1}{2}\right).$$

15. (a) Pour $\lambda \in \mathbb{R}$ et $X = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{d+1,1}(\mathbb{R})$:

$$AX = \lambda X \iff \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & \cdots & a_d \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix}$$
$$\iff \left\{\begin{array}{rcll} a_0x_0 + \cdots + a_dx_d & = & \lambda x_0 & (0) \\ x_0 & = & \lambda x_1 & (1) \\ x_1 & = & \lambda x_2 & (2) \\ & \vdots & & \vdots \\ x_{d-1} & = & \lambda x_d & (d) \end{array}\right. \quad (\star)$$

Supposons $(\star)$ vérifiée. Si $x_d = 0$ alors en « remontant » les équations de (d) à (1), on obtient successivement

$$x_{d-1} = 0, \quad x_{d-2} = 0, \quad \ldots\ldots \quad , x_0 = 0$$

et donc $X = 0$. Ainsi tout vecteur propre de A a nécessairement sa dernière composante non nulle.

— Si X est vecteur propre de A associé à la valeur propre λ (c'est-à-dire $(\star)$ est vérifiée et $x_d \neq 0$), alors les équations (1) à (d) donnent :

$$x_0 = \lambda^d x_d, \quad x_1 = \lambda^{d-1} x_d, \quad x_2 = \lambda^{d-2} x_d, \quad \ldots\ldots \quad , x_{d-1} = \lambda x_d$$

En remplaçant dans (0) :

$$a_0 \lambda^d x_d + a_1 \lambda^{d-1} x_d + \cdots + a_d x_d = \lambda^{d+1} x_d$$

puis en simplifiant par x_d ($\neq 0$) :

$$a_0 \lambda^d + a_1 \lambda^{d-1} + \cdots + a_d = \lambda^{d+1}$$

ce qui correspond bien à l'équation donnée dans l'énoncé.

— Réciproquement, supposons que $\lambda^{d+1} = \sum_{k=0}^{d} a_{d-k} \lambda^k$. Alors, le vecteur

$$X = \begin{pmatrix} \lambda^d \\ \lambda^{d-1} \\ \vdots \\ \vdots \\ \lambda \\ 1 \end{pmatrix}$$

est non nul et ses coordonnées vérifient $(\star)$

En conclusion :

$$\lambda \in \mathrm{Sp}(A) \iff \lambda^{d+1} = \sum_{k=0}^{d} a_{d-k} \lambda^k.$$

Dans ce cas, l'espace propre associé à λ est de dimension 1 car les équations (1) à (d) du système linéaire $(\star)$ sont clairement indépendantes.

Remarques :

On a précisément :

$$\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(A), \quad \mathrm{E}_A(\lambda) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} \lambda^d \\ \lambda^{d-1} \\ \vdots \\ \vdots \\ \lambda \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

On obtient également que :

$$A \text{ est diagonalisable} \iff A \text{ admet } d+1 \text{ valeurs propres distinctes}$$

$$\iff \text{le polynôme } X^{d+1} - \sum_{k=0}^{d} a_{d-k} X^k \text{ admet } d+1 \text{ racines distinctes.}$$

Dans ce cas, on peut écrire, en notant $\lambda_0, \ldots, \lambda_d$ les valeurs propres de A :

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_0 & & & \\ & \lambda_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_d \end{pmatrix} \quad \text{avec } P = \begin{pmatrix} {\lambda_0}^d & {\lambda_1}^d & \cdots & {\lambda_d}^d \\ {\lambda_0}^{d-1} & {\lambda_1}^{d-1} & \cdots & {\lambda_d}^{d-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_0 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_d \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

(Pour information, les matrices de la forme de A sont appelées « matrices compagnons » ; celles de la forme de P sont appelées « matrices de Vandermonde ».)

(b) Avec $\lambda = 1$, la condition ci-dessus s'écrit : $1 = \sum_{k=0}^{d} a_{d-k}$.
Comme remarqué en 12.(a), cette condition est vraie. En effet, les sommes $\sum_{k=0}^{d} a_{d-k}$ et $\sum_{j=0}^{d} a_j$ sont égales (changement d'indice $j = d-k$). Ainsi $1 \in \mathrm{Sp}(A)$.
Comme prouvé en question précédente, le vecteur suivant est un vecteur propre associé ; de plus la somme de ses composantes vaut bien $d+1$:

$$V = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(c) Raisonnons pas l'absurde pour chacune de deux assertions à prouver.

— Supposons que $-1 \in \mathrm{Sp}(A)$. Alors d'après la question (a) :

$$(-1)^{d+1} = \sum_{k=0}^{d} a_{d-k} (-1)^k.$$

Appliquons l'inégalité triangulaire :

$$1 = \left|(-1)^{d+1}\right| = \left| \sum_{k=0}^{d} a_{d-k} (-1)^k \right| \leq \sum_{k=0}^{d} \left| a_{d-k} (-1)^k \right| = \sum_{k=0}^{d} a_{d-k} = 1$$

(les nombres $a_0, \ldots, a_d$ sont positifs).

Nous sommes donc dans le cas d'égalité de l'inégalité triangulaire ; ainsi, tous les termes intervenant dans la somme :

$$a_d, \quad -a_{d-1}, \quad a_{d+2}, \quad \ldots\ldots \quad , (-1)^d a_0$$

sont de même signe (au sens large), ce qui est absurde car les nombres $a_0, \dots, a_d$ sont (en fait) *strictement* positifs.
Par conséquent :
$$-1 \notin \mathrm{Sp}(A).$$

— Supposons que $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$ avec $|\lambda| > 1$.
Notons tout d'abord que :
$$1 < |\lambda| < [\lambda|^2 < \cdots < |\lambda|^d < |\lambda|^{d+1}.$$
Écrivons comme précédemment l'inégalité triangulaire dans la relation vérifiée par λ :
$$|\lambda|^{d+1} = \left|\sum_{k=0}^{d} a_{d-k}\lambda^k\right| \leq \sum_{k=0}^{d} a_{d-k} \underbrace{|\lambda|^k}_{<|\lambda|^d} \leq \sum_{k=0}^{d} a_{d-k}|\lambda|^d = |\lambda|^d \sum_{k=0}^{d} a_{d-k} = |\lambda|^d.$$
On obtient donc $|\lambda|^{d+1} < |\lambda|^d$, ce qui est contradictoire.
Ainsi :
$$\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(A), \quad |\lambda| \leq 1.$$

En conclusion :
$$\mathrm{Sp}(A) \subset]-1, 1].$$

16. (a) Soit $W = \begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \\ \vdots \\ w_d \end{pmatrix} \in H$. On calcule tout d'abord : $\quad AW = \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{j=0}^{d} a_j w_j \\ w_0 \\ w_1 \\ \vdots \\ w_{d-1} \end{pmatrix}$.

On veut prouver que $AW \in H$, c'est-à-dire que le nombre y suivant est nul :
$$y = b_0 \left(\sum_{j=0}^{d} a_j w_j\right) + \sum_{k=1}^{d} b_k w_{k-1}.$$
Notons que :
$$b_0 = \sum_{k=0}^{d} a_k = 1 \quad \text{et} \quad a_k = \begin{cases} b_k - b_{k+1} & \text{si } k \leq d-1 \\ b_d & \text{si } k = d \end{cases}.$$
On obtient alors :
$$y = \left(\sum_{j=0}^{d-1}(b_k - b_{k+1})w_k\right) + b_d w_d + \sum_{k=1}^{d} b_k w_{k-1}$$
$$= \sum_{j=0}^{d-1} b_k w_k - \sum_{j=0}^{d-1} b_{k+1} w_k + b_d w_d + \sum_{k=1}^{d} b_k w_{k-1}$$
(les deux sommes rouges sont égales)
$$= \sum_{j=0}^{d} b_k w_k$$
$$= 0 \quad \text{car } W \in H.$$
On a donc bien prouvé que :
$$\forall W \in H, \quad AW \in H.$$

(b) Pour tout $s \in \mathbb{R}$: $\quad U_0 - sV = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} - s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-s \\ -s \\ \vdots \\ -s \end{pmatrix}$. Donc :
$$\begin{aligned} U_0 - sV \in H &\iff b_0(1-s) + b_1(-s) + \cdots + b_d(-s) = 0 \\ &\iff 1 - s\left(\sum_{k=0}^{d} b_k\right) = 0 \qquad (b_0 = 1) \\ &\iff s = \frac{1}{\left(\sum_{k=0}^{d} b_k\right)} \qquad \left(\text{on a : } \sum_{k=0}^{d} b_k > 0\right) \end{aligned}$$

(c) En appliquant le résultat admis dans l'énoncé :
$$\forall W \in H, \quad LA^n W \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$
au vecteur $W = U_0 - sV$ $(\in H)$, on a :
$$LA^n(U_0 - sV) = LA^n U_0 - sLA^n V \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$
Or, d'après 13.(b), $z_{n+1} = LA^n U_0$. On a donc :
$$\lim_{n\to+\infty} z_n = \lim_{n\to+\infty} z_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} LA^n U_0 = s \times \lim_{n\to+\infty} LA^n V.$$
Comme V est vecteur propre de A associé à la valeur propre 1 :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n V = V$$
(par récurrence immédiate avec $AV = V$)

et donc le réel LA^nV est constant égal à :

$$LA^nV = LV = \begin{pmatrix} a_0 & \dots & a_d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \sum_{k=0}^{d} a_k = 1.$$

En conclusion, la suite z tend vers le réel s.

17. — Sous l'hypothèse (H_1), on a montré en 12.(b) que :

$$\exists N \in \mathbb{N}, \quad \exists \theta \in]0,1[, \quad \exists M > 0, \quad \forall n \geq N, \quad 0 \leq z_n \leq M\theta^n.$$

Par comparaison avec une série géométrique convergente, la série $\sum z_n$ converge.

— Sous l'hypothèse (H_2), la suite z diverge vers $+\infty$, donc la série $\sum z_n$ diverge.

— Sous l'hypothèse (H_3), la suite z converge vers un réel s non nul, donc la série $\sum z_n$ diverge.

L'hypothèse (H_1) :

$$\exists N \in \mathbb{N}, \quad \exists \rho \in]0,1[, \quad \forall n \geq N, \quad r_n \leq \frac{\rho}{\alpha}$$

correspond à la mise en place, à partir du jour N, d'une stratégie d'isolement des personnes contagieuses afin que leurs contacts soient limités.
Elle permet de limiter le nombre total de personnes infectées.

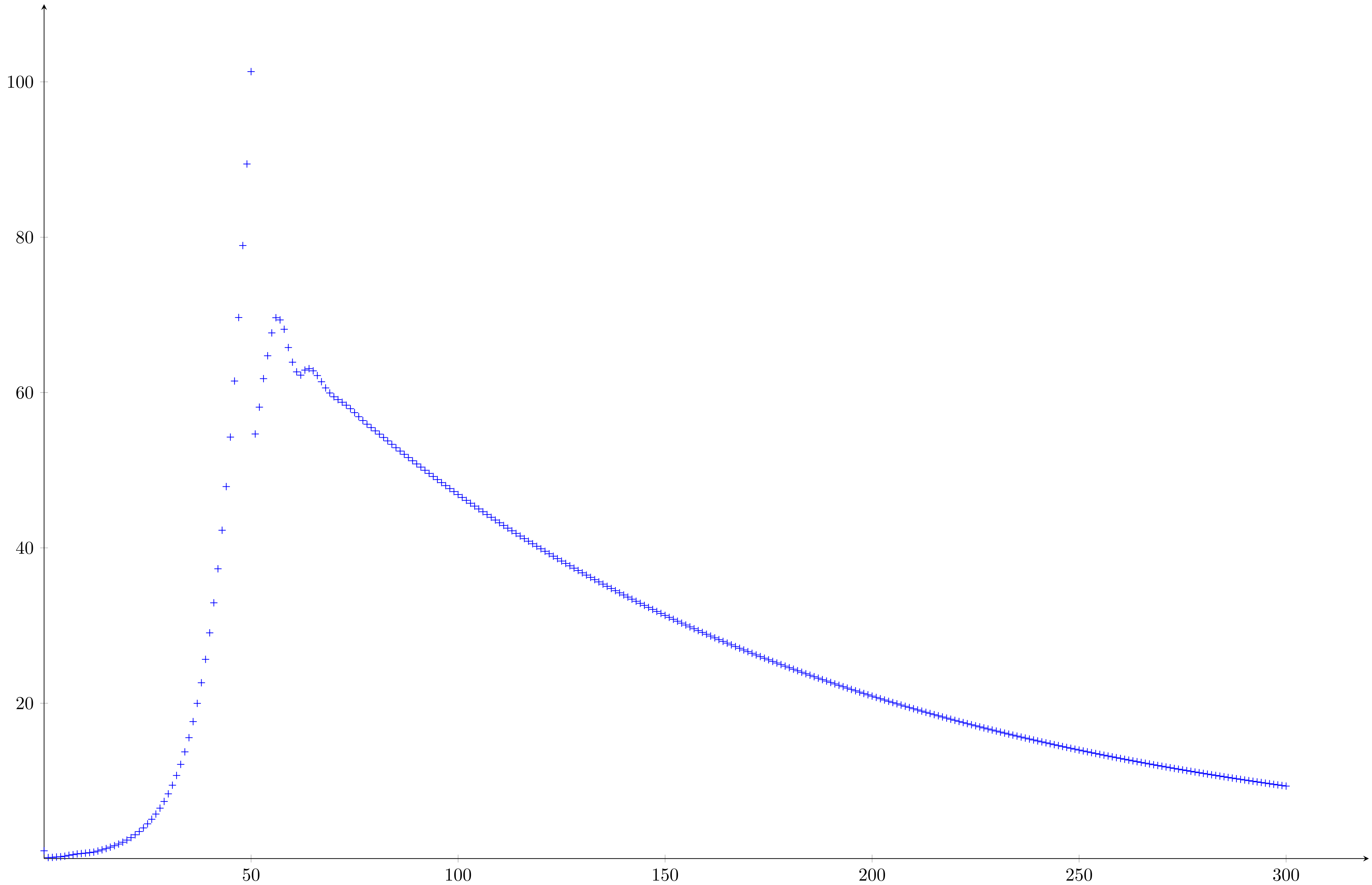
Illustrons la suite z sous l'hypothèse (H_1).

```
// Un profil de contagiosite
d = 10
Delta = [0.2 0.2 0.25 0.25 0.3 0.4 0.4 0.4 0.3 0.2 0.1]

// Une suite r verifiant l'hypothese (H1)
// (mise en place a partir du jour N = 50 d'une strategie
// d'isolement des personnes contagieuses).
alpha = sum(Delta)
N = 50
function r=rn(k)
   if k<N then
      r = 2/alpha
   else
      r = 1/(1.05*alpha)
   end
endfunction

// (On modifie legerement la fonction z pour qu'elle renvoie le
// vecteur [z0, z1, ..., z(n+1)] (pas uniquement la derniere valeur))
function Z=z(Delta,n)
   Z = [1]
   for k=1:n
      p = min(k-1,d)
      s = rn(k-1) * sum(Delta([1:p+1]).*Z([$:-1:$-p]))
      Z = [Z, s]
   end
endfunction

plot([0:300],z(Delta,300),'+')
```


100
80
60
40
20
50
100
150
200
250
300