ECE 2 - Année 2020-2021
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
`http://frederic.gaunard.com`

T.P. n°6

Représentations graphiques des fonctions de deux variables

---

1 Introduction

Considérons une fonction f définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$. Représenter graphiquement f dans l'espace signifie représenter la **surface** $\mathcal{S}_f$ définie par l'ensemble des points $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ z = f(x,y), (x,y) \in U\}$.

Formellement, représenter $\mathcal{S}_f$ nécessiterait de calculer $f(x,y)$ pour tout couple $(x,y) \in U$, ce qui pose, sur machine des problèmes; on se contente alors, comme pour les fonctions d'une variable, d'une *représentation approchée* de $\mathcal{S}_f$:

☞ On sélectionne un nombre fini de points $(x,y) \in U$ pour lesquels on va calculer $f(x,y)$ et `SciLab` permet alors de relier les points entre eux.

☞ On fera tourner la figure obtenue pour la voir sous "tous les angles" à l'aide de l'icone pivoter, ce qui perme aussi éventuellement de faire des hypothèses sur des éventuels extrema.

2 Avec `plot3d()`

L'utilisation de fonction `plot3d()` rappelle celle de `plot2d()` pour les fonctions d'une variable. Plus précisément,

- On définit notre fonction `z=f(x,y)`;
- On se donne un vecteur `x` de taille `n`;
- On se donne un vecteur `y` de taille `p`;
- On **calcule** la **matrice** `z` de taille `n` $\times$ `p` définie par

`z(i,j)` $=$ `f(x(i), y(j))`

- On termine par l'appel `plot3d(x,y,z)`.

Exercice 1. On considère la fonction f définie par

$$f(x,y) = xe^{-x^2-y^2}.$$

(1) Préciser le domaines de définition respectif U de f.
(2) Représenter graphiquement $\mathcal{S}_f$ sur $[-4;4] \times [-4;4]$.
(3) D'après la figure obtenue, f semble-t-elle présenter des extrema?
(4) Déterminer, par le calcul, les points critiques de f. Retrouver l'observation précédente.

Exercice 2. (Exemple de point selle: le *Pringles*) Représenter graphiquement la fonction f sur $[-3;3]^3$, où $f(x,y) = x^2 - y^2$. Qu'observe-t-on en $(0,0)$? Vérifier que c'est un point critique et déterminer les valeurs propres de sa matrice hessienne.

Exercice 3. Représenter graphiquement les fonctions suivantes et s'émerveiller du résultat.

(1) Le demi-donut
$$f(x,y) = \sqrt{1 - \left(2 - \sqrt{x^2+y^2}\right)^2}$$
(2) Le toboggan
$$f(x,y) = x^2 + \frac{10}{y^2+1} :$$
(3) Le grand plongeon
$$f(x,y) = \frac{2y}{x^2+y^2+1};$$
(4) Le paysage de montagne
$$f(x,y) = 5(x^2+y^2)e^{-x^2-y^2};$$
(5) La montagne du Destin
$$f(x,y) = 5\sqrt{x^2+y^2}e^{-x^2-y^2}.$$

3 Avec `fplot3d()`

Avec la commande `fplot3d()`, on fournit la valeur du vecteur `x`, du vecteur `y` et de la fonction `f` à tracer. La valeur de la matrice `z` est alors automatiquement calculée.

Exercice 4. Compléter la suite d'instructions suivantes afin de représenter graphiquement la fonction $f:\ (x,y) \mapsto x^2 - 2xy + 2y^2 + e^{-x}$ sur $[-3;3] \times [-5;5]$.

```
function z=f(x,y)
    z=...................................
endfunction

x=linspace(-3, 3, 100) //on rappellera comment fonctionne linspace
y=linspace(-5, 5, 100)
fplot3d(..............................)
```

4 Lignes de niveau

Si $a \in \mathbb{R}$, on appelle **ligne de niveau** a de f l'ensemble des points $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant $f(x,y) = a$. Ainsi, une ligne de niveau est l'intersection de $\mathcal{S}_f$ et du plan d'équation $z = a$.

☞ Si vous avez déjà fait de la randonnée, vous connaissez cette représentation à travers les cartes, afin de représenter, en deux dimensions, l'altitude.

Soit v la liste des niveau qui nous intéressent. L'instruction `contour(x,y,f,v)` construit les lignes de niveau de f correspondant aux niveaux contenus dans le vecteur v.

Exercice 5. Reprendre la fonction f de l'exercice précédent et tracer les lignes de niveaux $f(x,y) = k$ pour k entier avec $k = 10j$, $j = 0, 1, ..., 20$.

Exercice 6. On considère la fonction f définie sur l'ouvert $U =]0;1[\times]0;1[$ par
$$f(x,y) = xy(2-x-y).$$

(1) Tracer le graphe de f à l'aide de la fonction `fplot3d()` sur U (on choisira un pas de 0.05). Conjecturer l'existence d'extrema locaux et/ou globaux de f.

(2) Sur une autre figure, tracer les lignes de niveau de la fonction f autour du point critique conjecturé. Les résultats sont-ils cohérents? Donner une valeur approchée à 10^{-2} près de l'exrtremum local m et une valeur approchée à 10^{-1} des coordonnées du point (x_0, y_0) où celui-ci est atteint.

(3) Calculer les dérivées partielles premières et secondes de f.
(4) Déterminer les points critiques de f et former la matrice hessienne en chaque point critique.
(5) Déterminer les valeurs propres des matrices hessiennes précédentes à l'aide de la commande `spec()` et conclure quant à l'existence d'un extremum local pour f.

5 Exercices d'annales

Exercice 7. (D'après **EDHEC 2017**) On considère la fonction f qui à tout couple (x, y) de $\mathbb{R}^2$ associe le réel

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$$

(1) Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

(2) (a) Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de f.
(b) Montrer que le gradient de f est nul si, et seulement si, on a :

$$\begin{cases} x^3 - x + y & = 0 \\ y^3 + x - y & = 0 \end{cases}.$$

(c) En déduire que f possède trois points critiques : $(0,0)$, $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

(3) (a) Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de f.
(b) Écrire la matrice hessienne de f en chaque point critique.
(c) Déterminer les valeurs propres de chacune de ces trois matrices puis montrer que f admet un minimum local en deux de ses points critiques. Donner la valeur de ce minimum.
(d) Déterminer les signes de $f(x, x)$ et $f(x, -x)$ au voisinage de $x = 0$. Conclure quant à l'existence d'un extremum en le troisième point critique de f.

(4) (a) Pour tout (x, y) de $\mathbb{R}^2$, calculer $f(x, y) - (x^2 - 2)^2 - (y^2 - 2)^2 - 2(x + y)^2$.
(b) Que peut-on déduire de ce calcul quant au minimum de f ?

(5) (a) Compléter la deuxième ligne du script suivant afin de définir la fonction f.

```
function z=f(x,y)
z= ..................
endfunction

x=linspace(-2,2,101)
y=x
fplotd3d(x,y,f)
```

(b) Le script précédent, une fois complété, renvoie l'une des trois nappes suivantes. Laquelle ? Justifier la réponse.