Chapitre 0. Révisions.

On propose, pour attaquer cette rentrée du meilleur pied, de consacrer les premières séances à des révisions - sous forme d'exercices accessibles pour tou.te.s - balayant (sans exhaustivité) le programme du cours de première année. Les questions ou exercices précédés de (*) nécessitent un peu plus d'effort. Une partie de ces exercices pourra être reprise en *khôlle*.

1 Calculs

Exercice 1 (Récurrences)**.** Démontrer par récurrence les résultats suivants.

(1) Soient A, D et P trois matrices telles que : $A = PDP^{-1}$. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad A^n = PD^nP^{-1}.$$

(2) Montrer que $\forall n \geqslant 1, \quad J^n = 4^{n-1}J$ où

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(3) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \sum_{k=0}^{n} k k! = (n+1)! - 1.$$

(4) Soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$ des réels. Montrer que : $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \exp(x_k) = \exp\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)$.

(5) Montrer que : $\quad \forall n \geq 3,\ n! \geq 2 \times 3^{n-2}$.

(6) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{a^k} = \frac{a^{n+1} - (n+1)a + n}{(a-1)^2 a^n}, \quad \text{avec} \quad a \in \mathbb{R} \setminus \{0; 1\}.$$

(7) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall p \in \mathbb{N}, \qquad \sum_{k=0}^{n} \binom{p+k}{k} = \binom{p+n+1}{n}.$$

Exercice 2 (Calculs de sommes)**.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

(1) Montrer que

$$\sum_{k=1}^{n} k(2k^2 - 1) = \frac{n(n+1)(n^2+n-1)}{2}.$$

(2) Montrer que
$$\sum_{k=2}^{2n} k+2^k = n(2n+1)+2^{2n+1}-5.$$

(3) Montrer que
$$\sum_{k=n+1}^{2n} \left(\frac{1}{2^i}\right)^2 = \frac{4^n-1}{3\cdot 4^{2n}}.$$

(4) Calculer : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(k+1)^3-k^3$.

(5) Calculer : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}2^k$.

(6) (a) Montrer que pour tout $k\in[\![1;n]\!]$: $\displaystyle\binom{n}{k}=\frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$.

(b) En déduire que : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$ et si $n\geq 2$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k k\binom{n}{k}=0$.

Exercice 3 (Séries usuelles)**.** Justifier la convergence des séries suivantes et calculer leur somme.

(1) $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{n(n-1)}{6^n}$ (2) $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{2^n}{(n+1)!}$ (3) $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{n^2+n}{n!}$

2 Algèbre

Exercice 4 (Systèmes linéaires)**.**

(1) On considère le système linéaire suivant :
$$\begin{cases} (2+\lambda)x + 2y - z = 0\\ 2x + (\lambda-1)y + 2z = 0\\ -x + 2y + (2+\lambda)z = 0\end{cases}$$

(a) Résoudre ce système lorsque $\lambda=0$.
(b) Résoudre ce système lorsque $\lambda=3$.
(c) Résoudre ce système lorsque $\lambda=-3$.

(2) On considère la matrice $A=\begin{pmatrix}1&-2&2\\-2&1&2\\-2&-2&5\end{pmatrix}$.
Résoudre les équations $AX=0$, $AX=X$ et $AX=3X$, d'inconnue $X\in\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

(3) On considère la matrice $C=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\1&0&0&0&0\\1&0&0&0&0\\1&0&0&0&0\\1&1&1&1&1\end{pmatrix}$.
Résoudre les équations $CX=0$, $CX=-X$ et $CX=3X$, d'inconnue $X\in\mathcal{M}_{5,1}(\mathbb{R})$.

☞ *Pour les Questions (2) et (3), on pourra présenter les solutions sous formes de sous-espaces vectoriels engendrés par un nombre fini de vecteurs.*

Exercice 5 (Un extrait de **EDHEC 2019**)**.** On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(1) (a) Déterminer $(A - I)^2$.
  (b) En déduire que A est inversible et écrire A^{-1} comme combinaison linéaire de I et A.

(2) On pose $A = N + I$.
  (a) Exprimer pour tout entier naturel n, la matrice A^n comme combinaison linéaire de I et N, puis l'écrire comme combinaison linéaire de I et A.
  (b) Vérifier que l'expression précédente est aussi valable pour $n = -1$.

3 Analyse

Exercice 6 (Une suite)**.** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n + 3^n$. On introduit la suite auxiliaire $v_n = \dfrac{u_n}{3^n}$.

(1) Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmético-géométrique.
(2) En déduire le terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 7 (Suite et série)**.** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}^{+*}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$.

(1) Montrer que pour tout entier naturel n, $u_n > 0$.
(2) Étudier le sens de variation et la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ainsi que sa limite.
(3) On pose pour tout entier n, $v_n = \ln(u_n)$.
Calculer v_{n+1} en fonction de v_n puis montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} u_k = v_0 - v_{n+1}$
(4) En déduire que la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge.

Exercice 8 (Un problème, D'après **ECRICOME 2020**)**.** Pour tout entier naturel non nul, on définit la fonction f_n sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\forall x \geq 0,\ f_n(x) = \int_0^x \frac{t^{2n} - 1}{t + 1} \mathrm{d}t$$

Partie A : Étude de la fonction f_n

Dans cette partie, on fixe un entier naturel n non nul.

(1) Démontrer que la fonction f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et :

$$\forall x \geq 0,\ f_n'(x) = \frac{x^{2n} - 1}{x + 1}$$

(2) Étudier les variations de f_n.

(3) Démontrer que f_n est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+$, et calculer sa dérivée seconde.
En déduire que f_n est convexe sur $\mathbb{R}_+$.

(4) (a) Démontrer : $\forall t \geq 1,\ t^{2n} - 1 \ \geq\ n\,(t^2 - 1)$.
  (b) Montrer alors : $\forall x \geq 1,\ f_n(x) \ \geq\ f_n(1) + \dfrac{n}{2}\,(x - 1)^2$.
  (c) En déduire la limite de $f_n(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

(5) Calculer $f_n(0)$, puis démontrer : $f_n(1) < 0$.

(6) Démontrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution strictement positive, et que cette solution est strictement supérieure à 1.
On note x_n cette solution.

Partie B : Étude d'une suite implicite

On étudie dans cette partie le comportement de la suite (x_n), où pour tout entier naturel n non nul, x_n est l'unique solution strictement positive de l'équation : $f_n(x) = 0$.
On admettra :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ x_n \geq \frac{2n+2}{2n+1}$$

(1) Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Démontrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f_{n+1}(x) - f_n(x) \ = \ x^{2n+1} \left(\frac{x}{2n+2} - \frac{1}{2n+1} \right).$$

(2) (a) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \geq \dfrac{2n+2}{2n+1}$, $f_{n+1}(x) \geq f_n(x)$.
(b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f_{n+1}(x_n) \geq 0$.
(c) Montrer alors que la suite (x_n) est décroissante, puis qu'elle est convergente.

(3) (a) Démontrer que pour tout entier $n \geq 1$: $-\ln(2) \leq f_n(1) \leq 0$.
(b) À l'aide de l'inégalité démontrée à la question $(4)(b)$ de la partie précédente, montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leq x_n - 1 \leq \sqrt{\frac{2\ \ln(2)}{n}}$$

Quelle est la limite de x_n lorsque n tend vers $+\infty$?

Exercice 9 (Intégrales)**.** Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit :

$$I_n = \int_0^1 x^n \ln(1+x) \mathrm{d}x$$

(1) (a) Calculer la dérivée de la fonction $g : x \mapsto (x+1)\ln(x+1) - x$.
(b) Calculer I_0.
(2) (a) Montrer que $I_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
(b) Établir que la suite (I_n) est décroissante.
(c) En déduire que la suite (I_n) est convergente.
(3) (a) Justifier l'égalité : $x^n \ln(1+x) \leq x^n$ pour tout $x \in [0, 1]$.
(b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ $\qquad I_n \leq \dfrac{1}{n+1}$.
(c) Calculer $\lim_{n\to+\infty} I_n$
(4) (a) En utilisant une intégration par parties, montrer que:

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad I_n = \frac{\ln 2}{n+1} - \frac{1}{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} \mathrm{d}x$$

(b) Montrer que

$$0 \leq \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} \mathrm{d}x \leq \frac{1}{n+2}$$

et en déduire un encadrement de I_n.
(c) En déduire $\lim_{n\to+\infty} nI_n$

4 Probabilités

Exercice 10. Une guirlande électrique est composée de spots nommés de bas en haut S_1, S_2, S_3, S_4 et change d'état de la manière suivante:

- à l'instant $t = 0$, le spot S_1 est allumé;
- si, à l'instant $t = n$ le spot S_1 est allumé, alors un (et un seul) des spots s'allume à l'instant $t = n+1$, et ceci de manière équiprobable;

- si, à l'instant $t = n$ le spot S_k ($2 \leq k \leq 4$) est allumé, le spot S_{k-1} s'allume à l'instant $t = n + 1$. On pourra remarquer qu'à chaque instant, un et un seul spot est allumé. On note X la variable aléatoire représentant le premier instant où le spot S_2 s'allume.

Déterminer la loi de X.

Exercice 11. Soit $p \in]0;1[$. On dispose d'une pièce de monnaie qui amène *Pile* avec la probabilité p, et *Face* avec la probabilité $1 - p$.

On lance la pièce jusqu'à obtenir pour la seconde fois *Pile*. On note X la variable aléatoire égale au nombre de *Face* obtenus au cours des lancers. On suppose que la variable X est définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Par exemple, si les lancers donnent successivement *Pile-Pile*, alors $X = 0$, et si les lancers donnent successivement *Face-Pile-Face-Face-Pile*, alors $X = 3$.

(1) (a) Déterminer $P(X = 0)$ et $P(X = 1)$.
 (b) Plus généralement, déterminer la loi de la variable aléatoire X.
 (c) Vérifier que
$$\sum_{k=0}^{+\infty} P(X = k) = 1.$$
(2) Que peut-on dire de l'événement « on n'obtient jamais deux *Pile* au cours d'une infinité de lancers de la pièce » ?
(3) Montrer que la variable X admet une espérance et la calculer.
(4) Compléter le script `SciLab` ci-dessous afin qu'il affiche une réalisation de la variable X

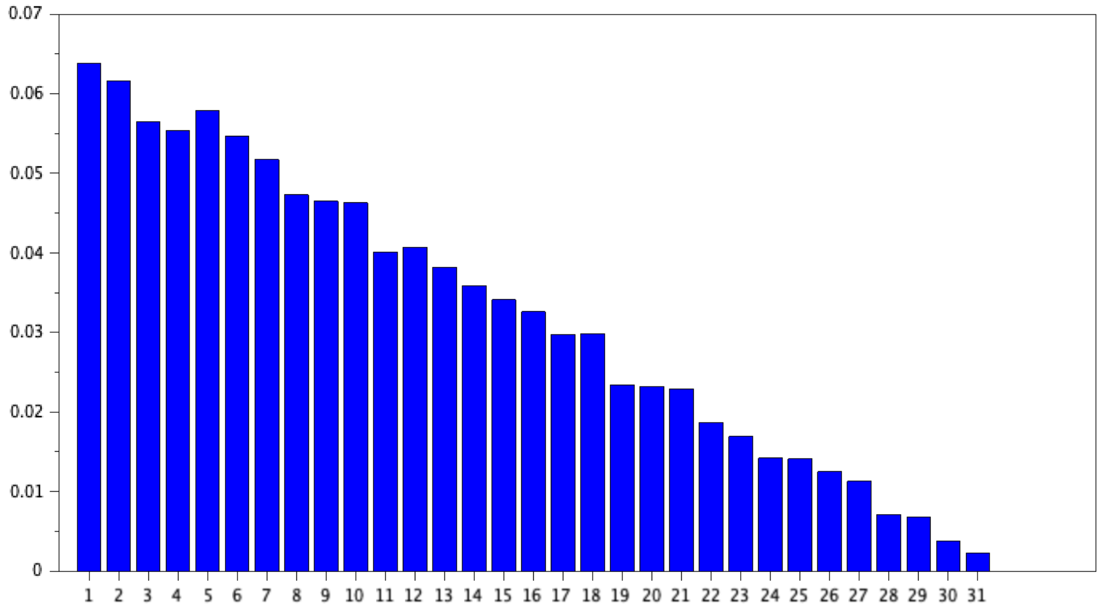
```
p=0.3;
S=0; n=0;
while S<2 do
    n=n+1;
    if ............  then
        S=S+1;
    end
end
disp(.............)
```

Exercice 12. Soit a un entier strictement positif. On dispose d'un jeu usuel de $2n$ cartes ($n = 16$ ou 26) qui contient donc deux rois rouges (carreau et coeur), et on envisage le jeu suivant:
Les cartes du jeu sont alignés sur une table de façon alétoire. Le joueur découvre les cartes, de gauche à droite jusqu'à obtenir le premier roi rouge. On note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition du premier roi rouge.

(1) (`SciLab`).
 (a) Compléter la fonction suivante afin qu'elle simule la variable X.

```
function y=X(n)
    y=1
    T=2*n //nombre total de cartes à retourner
    while ...................
        y=...........
        T=...........
    end
endfunction
```

(b) Pour $n = 16$, on simule 1000 fois la variable X et on représente le diagramme à bâtons des fréquences obtenues pour chaque valeur, que l'on fait apparaître ci-dessous.



Donner une estimation graphique de $P(X = 1)$. Que vaut vraiment $P(X = 1)$?.
Donner des estimations de $P(X = 2), P(X = 3)$.

(2) Que vaut $X(\Omega)$?

(3) Montrer que, pour tout $k \in X(\Omega)$,

$$P(X = k) = \frac{2n - k}{n\,(2n - 1)}.$$

(4) Montrer que $E(X) = \dfrac{2n + 1}{3}$.

Exercice 13 (Densité)**.** Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ xe^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$.

(1) Montrer que la fonction f est une densité de probabilité.
On note X une variable aléatoire admettant f comme densité.

(2) Montrer que la fonction de répartition de X est donnée par : $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ 1 - e^{-x}(1 + x) & \text{si } x \geqslant 0. \end{cases}$

Exercice 14 (Densité)**.** Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}_+$, on pose : $I_n(x) = \int_0^x t^n e^{-t} \mathrm{d}t$.

(1) Calculer $I_0(x)$. En déduire que l'intégrale $I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-t} \mathrm{d}t$ est convergente et calculer sa valeur.

(2) Calculer $I_1(x)$. En déduire que l'intégrale $I_1 = \int_0^{+\infty} te^{-t} \mathrm{d}t$ est convergente et calculer sa valeur.

(3) À l'aide d'une intégration par parties, établir :

$$I_{n+1}(x) = -x^{n+1} e^{-x} + (n + 1) I_n(x).$$

(4) En déduire, par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale

$$I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} \mathrm{d}t$$

est convergente et que $I_n = n!$.

(5) Soit

$$f_n(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{n!} t^n e^{-t}, & \text{si } t \geq 0 \\ 0, & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

(a) Montrer que f_n est la densité d'une variable aléatoire à densité X_n.
(b) Reconnaitre la loi de X_0 puis rappeler l'expression de sa fonction de répartition.
(c) Sous quelle condition X_n admet-elle une espérance ? Montrer que X_n admet une espérance et que $E(X_n) = n+1$.

5 SciLab

Attention, la suite d'exercices et les instructions `SciLab` nécessaires à leur résolution ne constitue en aucun cas une liste exhaustive des compétences à maîtriser en informatique.

Exercice 15. (D'après **EDHEC 2016**) On considère une suite (u_n) qui vérifie, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$u_n - n \leq e^{-\sqrt{n}}.$$

(1) Compléter les commandes `SciLab` suivantes qui permettent de calculer et d'afficher un entier n pour lequel $u_n - n$ est inférieur ou égal à 10^{-4}.

```
n=0;
while ..........
    n=..........
end
disp(n)
```

(2) Le Script ci-dessus affiche l'une des trois valeurs $n = 55, n = 70$ ou $n = 85$. En prenant $2,3$ comme valeur approchée de $\ln(10)$, déterminer laquelle.

Exercice 16. (D'après **EML 2016**) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x\ln(x), & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

et la suite (u_n) définie par la relation de récurrence

$$u_0 = \frac{1}{2}, \qquad u_{n+1} = f(u_n).$$

(1) (*) Démontrer que (u_n) est croissante et converge vers 1.
(2) Écrire un programme sous `SciLab` qui calculer et affiche un entier N tel que

$$1 - u_N < 10^{-4}.$$

Exercice 17. (*D'après **EML 2015**) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 e^x$.

(1) Montrer la convergence de la série $\sum \frac{1}{f(n)}$. On note S sa somme.
(2) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\left| S - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{f(k)} \right| \leq \frac{1}{(e-1)e^n}.$$

(3) En déduire l'écriture d'un programme sous `SciLab` qui calcule une valeur approchée de S à 10^{-5} près.

Exercice 18. (D'après **EML 2017**) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = e^x - e\ln(x)$ et la suite (u_n) définie par la relation de récurrence

$$u_0 = 2, \qquad u_{n+1} = f(u_n).$$

(1) *Montrer que (u_n) est croissante et diverge vers $+\infty$.*

(2) Écrire un programme sous `SciLab` qui, étant donné un réel A rentré par l'utilisateur, calcule et affiche un entier naturel N tel que $u_n \geq A$.

Exercice 19. (*D'après **ECRICOME 2017**) Soit n un entier naturel non nul.
On effectue une série illimité de tirages d'une boule avec remise dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n. Pour tout entier naturel k non nul, on note X_k la variable aléatoire égale au numéro de la boule obtenue au k-ième tirage.
Pour tout entier naturel k non nul, on note S_k la somme des numéros des boules obtenues lors des k premiers tirages :

$$S_k = \sum_{i=1}^{k} X_i.$$

On considère enfin la variable aléatoire T_n égale au nombre de tirages nécessaires pour que, pour la première fois, la somme des numéros des boules obtenues soit supérieure ou égale à n.

Compléter la fonction ci-dessous, qui prend en argument le nombre n de boules contenues dans l'urne, afin qu'elle simule la variable aléatoire T_n:

```
function y=T(n)
    S = ..........
    y = ..........
    while ..........
        tirage = grand(1,1,'uin',1,n)
        S = S + tirage
        y = ..........
    end
endfunction
```

Exercice 20. (*D'après **EML 2015**) On considère une v.a. U telle que $U \hookrightarrow \mathcal{U}([0;1])$ et on introduit la v.a. V définie par

$$V = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-U),$$

où λ est un réel strictement positif.

(1) Montrer que $V \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$.
(2) En déduire l'écriture d'une fonction `SciLab`, notée `y=loi_expo(lambda)` qui, prenant en argument un paramètre `lambda` renvoie une simulation de la loi exponentielle $\mathcal{E}$(`lambda`).