ECE 2 - Année 2020-2021
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Chapitre 1. Comparaison de fonctions (et de suites). Développements limités.

1 Avant-propos

On ne revient pas dans ce chapitre sur les étapes classique de l'étude d'une fonction (domaine de définition, branches infinies, variations...) pour lesquelles on renvoie aux chapitres du cours de première année (Continuité, Dérivabilité, ...). Il est d'ailleurs capital de savoir rapidement étudier une fonction pour en déduire une inégalité, comme le rappelle l'exemple ultra-classique ci-dessous

Exercice 1. Montrer que, pour tout $x > -1$, on a $\ln(x+1) \leq x$.

Le but de ce chapitre est d'introduire des notations permettant de "comparer" c'est à dire d'étudier le *comportement* d'une fonction au **voisinage** d'un point (ou de l'infini) en regard d'une fonction considérée plus simple ou "classique" et bien connue.

Dans toute la suite (pour alléger les énoncés et la lecture), on notera $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$. Ainsi, en notant $a \in \overline{\mathbb{R}}$, on peut avoir $a \in \mathbb{R}$ réel ou bien $a \in \{-\infty; +\infty\}$ une borne infinie.

On rappelle que la terminologie *au voisinage de* a signifie que l'on considère une intervalle (ouvert) contenant a.

2 Comparaison de fonctions

2.1 Fonctions négligeables

Définition 1. *Soient* $a \in \overline{\mathbb{R}}$ *et* f *et* g *deux fonctions définies au voisinage de* a *avec* g *ne s'annulant pas au voisinage de* a*. On dit que* f *est* ***négligeable devant*** g ***au voisinage de*** a*, ce que l'on note* $f(x) \underset{x\to a}{=} o\left(g(x)\right)$ *si et seulement si*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

☞ Cette définition est équivalente au fait qu'il existe un intervalle ouvert J contenant a et une fonction ε définie sur J tels que

$$\begin{cases} \varepsilon(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0 \\ \forall x \in J, \quad f(x) = g(x)\varepsilon(x) \end{cases}$$

☞ On écrit aussi parfois

$$f(x) = o(g(x)),\ x \to a.$$

Exemple. On peut alors écrire les relations suivantes

$$(i)\ x^2 \underset{x\to 0}{=} o(x), \qquad (ii)\ e^x \underset{x\to +\infty}{=} o\left(e^{2x}\right), \qquad (iii)\ \frac{1}{x^2} \underset{x\to +\infty}{=} o\left(\frac{1}{x}\right)$$

☠ Il faut bien comprendre et garder à l'esprit que la négligeabilité en un point n'entraîne nullement la négligeablité ailleurs. Il suffit de regarder l'exemple (i) ci-dessus

$$x^2 \underset{x\to 0}{=} o(x), \quad \text{mais} \quad x^2 \underset{x\to 2}{\neq} o(x) \quad \text{et} \quad x^2 \underset{x\to +\infty}{\neq} o(x)$$

☞ En particulier, on comprend l'importance de ne pas simplement écrire $f(x) = o(g(x))$ sans préciser le voisinage concerné!

Exercice 2. Déterminer d'éventuelles relations de négligeablité entre les quantités $f(x)$ et $g(x)$ en a lorsque

(1) $f(x) = x^3$, $g(x) = 1/(x-2)$ en $a = +\infty$;
(2) $f(x) = x^3$, $g(x) = 1/(x-2)$ en $a = 2$;
(3) $f(x) = x^3$, $g(x) = 1/(x-2)$ en $a = 1$;
(4) $f(x) = e^{-x}$, $g(x) = 1$ en $a = +\infty$.

☞ Dire que la fonction f admet une limite ℓ en a peut se réécrire

$$f(x) \underset{x\to a}{=} \ell + o(1).$$

Proposition 1. (Relations immédiates) Soient $0 < \alpha < \beta$ des paramètres fixés. Alors

(1)
$$x^\alpha \underset{x\to +\infty}{=} o(x^\beta), \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{x^\beta} \underset{x\to +\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^\alpha}\right);$$

(2)
$$e^{\alpha x} \underset{x\to +\infty}{=} o(e^{\beta x}), \qquad \text{et} \qquad e^{\beta x} \underset{x\to -\infty}{=} o(e^{\alpha x});$$

(3)
$$x^\beta \underset{x\to 0^+}{=} o(x^\alpha), \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{x^\alpha} \underset{x\to 0^+}{=} o\left(\frac{1}{x^\beta}\right).$$

Proposition 2. (Croissances comparées). Soient $\alpha, \beta > 0$ deux paramètres fixés. Alors,

(1)
$$(\ln(x))^\beta \underset{x\to +\infty}{=} o\left(x^\alpha\right), \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{x^\alpha} \underset{x\to +\infty}{=} o\left(\frac{1}{(\ln(x))^\beta}\right);$$

(2)
$$x^\alpha \underset{x\to 0^+}{=} o\left(\frac{1}{(\ln(x))^\beta}\right), \qquad \text{et} \qquad (\ln(x))^\beta \underset{x\to 0^+}{=} o\left(\frac{1}{x^\alpha}\right);$$

(3)
$$x^\alpha \underset{x\to +\infty}{=} o\left(e^{\beta x}\right), \qquad \text{et} \qquad e^{-\beta x} \underset{x\to +\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^\alpha}\right).$$

Exercice 3. Comparer, au voisinage de $+\infty$, les quantités $f(x) = 3^x$, $g(x) = \sqrt{x}$ et $h(x) = \ln(x)^{1/4}$.

☞ Les deux propositions précédentes permettent d'établir une "hiérarchie" entre les fonctions usuelles pour la relation o. Au voisinage de $+\infty$, les quantités peuvent être rangées dans l'ordre suivant de négligeabilité

e^{-x}	$\frac{1}{x^3}$	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{(\ln(x))^2}$	$\frac{1}{\ln(x)}$	1	$\ln(x)$	$(\ln(x))^2$	x	x^3	e^x

Exercice 4. Établir un tableau analogue, au voisinage de 0^+ pour les quantités

$$\frac{1}{x},\quad x,\quad x^3,\quad 1,\quad \ln(x),\quad \frac{1}{(\ln(x))^2},\quad \frac{1}{x^3},\quad (\ln(x))^2,\quad \frac{1}{\ln(x)}.$$

Exercice 5. (Substitution). Comparer, au voisinage de 0, les quantités $\ln\left(\frac{1}{x^2}\right)$ et $\frac{1}{x^2}$.

Proposition 3. (Règles de calcul). Soient f, g, h trois fonctions définies au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$.

(1) **Multiplication par une constante**. Si $\beta \in \mathbb{R}^*$ et $f(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x))$, alors $f(x) \underset{x\to a}{=} o(\beta g(x))$.
(2) **Linéarité**. Si $f(x) \underset{x\to a}{=} o(h(x))$ et $g(x) \underset{x\to a}{=} o(h(x))$, alors, pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$\alpha f(x) + \beta g(x) \underset{x\to a}{=} o(h(x)).$$

(3) **Transitivité**. Si $f(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x))$ et $g(x) \underset{x\to a}{=} o(h(x))$ alors, $f(x) \underset{x\to a}{=} o(h(x))$.
(4) **Multiplication par une fonction**. Si $f(x) \underset{x\to a}{=} o(h(x))$, alors $f(x)g(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x)h(x))$.

☞ Le (1) de la proposition ci-dessus permet de voir qu'on peut "ignorer" les constantes dans un petit-o.
☞ Le (4) de cette même proposition permet de voir qu'on peut "rentrer" les fonctions dans un petit-o

$$g(x) \cdot o(h(x)) \underset{a}{=} o(g(x)h(x)).$$

Exercice 6. On considère, au voisinage de 0, deux quantités $f(x)$ et $g(x)$ vérifiant

$$f(x) = x^2 + o(x^2), \qquad g(x) = -x^2 + x^3 + o(x^3).$$

(1) Que dire de $f(x) + g(x)$?
(2) Écrire le plus simplement possible $g(x) - 2xf(x)$ et $f\left(\frac{x}{2}\right) - g(x)$.

2.2 Fonctions équivalentes

Définition 2. *Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et f et g deux fonctions définies au voisinage de a. On suppose que g ne s'annule pas au voisinage de a (g peut s'annuler en a).*
On dit que f est ***équivalente à*** *g* ***au voisinage de*** *a et on note $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ si et seulement si*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Exemple. Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = x - \ln(x)$. Alors, on peut écrire

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x, \qquad \text{mais aussi} \qquad f(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} -\ln(x).$$

☞ Comme pour la négligeabilité, le voisinage où l'équivalence a lieu ne donne aucune information sur ce qui peut se passer ailleurs.

☠ Une fonction non nulle au voisinage de a n'est jamais équivalente à 0 au voisinage de a !

☞ En revanche, pour $\ell \in \mathbb{R}^*$

$$\lim_{x\to a} f(x) = \ell \Longleftrightarrow f(x) \underset{x\to a}{\sim} \ell.$$

Proposition 4. Tout polynôme est équivalent à son monôme de plus haut degré en $\pm\infty$.
Tout polynôme est équivalent à son monôme de plus bas degré en 0.

☞ Par exemple,

$$2x^7 - 18x^3 + 91 \underset{x\to+\infty}{\sim} 2x^7, \quad \text{ou encore} \quad -12x^3 + 2x^2 + 5x \underset{x\to 0}{\sim} 5x.$$

Proposition 5. (Une caractérisation). Soient $f(x)$ et $g(x)$ deux quantités définies au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$. On a

$$f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x) \Longleftrightarrow f(x) \underset{x\to a}{=} g(x) + o(g(x)).$$

☞ La réciproque indique notamment qu'on peut négliger les termes négligeables dans une somme. Ainsi :

$$f(x) + o(f(x)) \underset{x\to a}{\sim} f(x).$$

Exercice 7. Montrer que : $\dfrac{e^x}{2} - x^3 - \ln(x) \underset{x\to +\infty}{\sim} \dfrac{e^x}{2}$.

☞ Dire que deux quantités sont équivalentes au voisinage de a ne veut pas dire que leur différence tend vers 0 en a, mais seulement qu'elles ont la même limite en a.

$$f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x) \Longrightarrow \lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x).$$

Mais,

$$f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x) \not\Rightarrow \lim_{x\to a} f(x) - g(x) = 0.$$

Par exemple,

$$e^x + x \underset{x\to +\infty}{\sim} e^x + x^2 \quad \text{mais} \quad x - x^2 \underset{x\to +\infty}{\not\to} 0.$$

✐ **Un équivalent est plus précis qu'une limite : il précise la vitesse de convergence vers cette limite.**

Proposition 6. (Règles de calcul). Soient f, g, h, k quatre fonctions définies au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$.

(1) **Multiplication, Quotient, Puissance**. On peut multiplier, diviser et élever à la puissance des équivalents:

(i)
$$f(x) \underset{x\to a}{\sim} h(x), \quad g(x) \underset{x\to a}{\sim} k(x) \Longrightarrow f(x)g(x) \underset{x\to a}{\sim} h(x)k(x).$$

(ii)
$$f(x) \underset{x\to a}{\sim} h(x), \quad g(x) \underset{x\to a}{\sim} k(x) \Longrightarrow \frac{f(x)}{g(x)} \underset{x\to a}{\sim} \frac{h(x)}{k(x)}.$$

(iii)
$$f(x) \underset{x\to a}{\sim} h(x), \quad k \in \mathbb{N} \Longrightarrow f(x)^k \underset{x\to a}{\sim} h(x)^k.$$

(2) **Transitivité**. Si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ et $g(x) \underset{x\to a}{\sim} h(x)$ alors, $f(x) \underset{x\to a}{\sim} h(x)$.

(3) **Symétrie**.
$$f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x) \Longleftrightarrow g(x) \underset{x\to a}{\sim} f(x).$$

☠ Si l'on peut multiplier, diviser ou élever à la puissance, **on ne peut pas additionner** des équivalents. Ce qu'on peut voir avec mille et uns contre-exemples, comme

$$f(x) = e^x + \ln(x) \underset{x\to +\infty}{\sim} e^x, \quad g(x) = -e^x + x^2 \underset{x\to +\infty}{\sim} -e^x, \qquad f(x) + g(x) = x^2 + \ln(x) \underset{x\to +\infty}{\sim} x^2.$$

☞ La symétrie (3) est naturellement faux pour les petits-o.

Exercice 8.

(1) Déterminer un équivalent de $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 + x}}{x^4 + 4x^2}$ en $+\infty$ puis en 0^+.

(2) Déterminer un équivalent de $g(x) = \ln(x)\left(2x^2 + e^{-x}\right)^2$ en $+\infty$.

Exercice 9. Utiliser des équivalents pour déterminer les limites suivantes.

$$(i)\ \lim_{x\to+\infty} e^x - x^3 - \ln(x); \qquad (ii)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-\ln(x)}{\sqrt{e^x+x^3}}; \qquad (iii)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+x^3)}{\ln(x)}.$$

Proposition 7. Soit $a \in \mathbb{R}$ et f une fonction dérivable en a telle que $f'(a) \neq 0$. Alors

$$f(x) - f(a) \underset{x\to a}{\sim} f'(a)(x-a).$$

La proposition précédente permet d'obtenir les équivalents classiques suivants.

Proposition 8. (Équivalents classiques au voisinage de 0).

$$e^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x \qquad \ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x \qquad (1+x)^\alpha - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \alpha x \quad (\alpha \neq 0).$$

☞ La relation $(1+x)^\alpha - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \alpha x$ donne avec $\alpha = \dfrac{1}{2}$ l'équivalent très utile $\sqrt{1+x} - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x}{2}$.

☠ Revenant aux règles de calcul de la Proposition 6, on ne peut pas **composer** les équivalents. Par exemple, on fera attention au fait que

$$x + 1 \underset{x\to+\infty}{\sim} x, \quad e^{x+1} \underset{x+\infty}{\not\sim} e^x.$$

En effet,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x+1}}{e^x} = e \neq 1.$$

On a cependant un résultat, énoncé ci-dessous, qui permet de ramener un équivalent en un point quelconque (y compris l'infini) en un équivalent en 0.

Proposition 9. Soient $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ et f, g, h trois fonctions telles que

$$f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x), \quad \text{et} \quad \lim_{x\to b} h(x) = a.$$

Alors,

$$f(h(x)) \underset{x\to b}{\sim} g(h(x)).$$

☞ Par exemple, comme $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$, que $x - 1 \to 0$, lorsque $x \to 1$ et que $1/x \to 0$, lorsque $x \to +\infty$, on peut obtenir les équivalents usuels et utiles suivants:

$$\ln(x) \underset{x\to 1}{\sim} x - 1, \qquad \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x}.$$

Exercice 10. Montrer que : $t^{\frac{1}{t}} - 1 \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln(t)}{t}$.

Exercice 11. Déterminer **très rigoureusement** des équivalents en $+\infty$, $-\infty$ et en 0 de $\ln(x^2+1)$.

3 Développements Limités

3.1 Définition

Définition 3. *On dit que f* ***admet un développement limité (DL) d'ordre*** *1* ***au voisinage de*** *$x_0 \in \mathbb{R}$ s'il existe deux réels $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ tels que, au voisinage de x_0,*

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + o(x - x_0).$$

En particulier, On dit que f ***admet un développement limité (DL) d'ordre*** *1* ***au voisinage de*** *0 s'il existe $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$ tels que, au voisinage de 0,*

$$f(x) = a_0 + a_1 x + o(x).$$

☞ Une fonction admettant un DL à l'ordre 1 en x_0 est *localement assimilable* à une fonction affine.

Définition 4. *On dit que f* ***admet un développement limité (DL) d'ordre*** 2 ***au voisinage de*** x_0 *s'il existe $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ tels que, au voisinage de x_0,*

$$f(x) = a_0 + a_1\,(x - x_0) + a_2\,(x - x_0)^2 + o\left((x - x_0)^2\right).$$

En particulier, On dit que f ***admet un développement limité (DL) d'ordre*** 2 ***au voisinage de*** 0 *s'il existe $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ tels que, au voisinage de 0,*

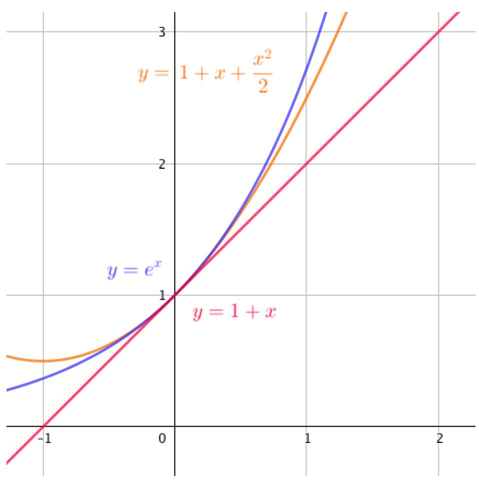
$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + o\left(x^2\right).$$

☠ **Les égalités définissant les DL ne sont, naturellement, valables que localement (au voisinage de x_0).**

☞ De manière analogue à la remarque ci-dessus, une fonction admettant un DL à l'ordre 2 en x_0 est *localement assimilable* à un polynôme du second degré.

☞ On appelle parfois *partie régulière* de f la partie polynomiale du développement limité de f lorsque celle-ci en admet un.

Sur le graphique ci-dessous, on a représenté les parties régulières des DL d'ordres 1 et 2 de la fonction exponentielle en zéro, illustrant la remarque précédente sur l'approximation locale (ici en 0).



Théorème 1. *Si f admet un développement limité au voisinage de x_0 alors ce développement limité est unique.*

Théorème 2. *(Formule de Taylor-Young)*

(i) Soit f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I et $x_0 \in I$. Alors f admet un développement limité d'ordre 1 au voisinage de x_0 donné par :

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o\,(x - x_0)\,.$$

(ii) Soit f est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur un intervalle I et $x_0 \in I$.
Alors f admet un développement limité d'ordre 2 au voisinage de x_0 donné par :

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + o\left((x - x_0)^2\right).$$

Théorème 3. *(Taylor-Young en 0) On utilise le plus souvent le théorème précédent dans le cas particulier où $x_0 = 0$ ce qui donne respectivement :*

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + o\,(x) \qquad \text{et} \qquad f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + o\left(x^2\right).$$

Exercice 12. En utilisant la formule de Taylor-Young, déterminer un réel α non nul tel que :

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + \alpha x^2 + x^2\epsilon(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x\to 0}\epsilon(x) = 0.$$

3.2 Développements limités des fonctions usuelles

Théorème 4. *(DL usuels au voisinage de 0). On a,* ***au voisinage de*** 0,

$$\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \\
\frac{1}{1-x} &= 1 + x + x^2 + o(x^2) \\
\ln(1-x) &= -x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \\
\sqrt{1+x} &= 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2) \\
(1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + o\left(x^2\right) \qquad (\alpha \in \mathbb{R}^*).
\end{aligned}$$

Exercice 13. Déduire du résultat précédent les DL à l'ordre 2 en 0 de $\frac{1}{1+x}$, $\ln(1+x)$ et $\sqrt{1-x}$.

☞ Les opérations d'addition et de composition qui sont interdites pour les équivalents sont possibles avec les développements limités. Par exemple, on a

$$\begin{aligned}
\ln(1+x) - \ln(1-x) &= x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) - \left(-x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) \\
&= 2x + o(x^2)
\end{aligned}$$

Ou encore

$$\begin{aligned}
e^{\frac{x^2}{2}} &= 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{(x^2/2)^2}{2} + o\left(\left(\frac{x^2}{2}\right)^2\right) \\
&= 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + o(x^4) \\
&= 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2).
\end{aligned}$$

Exercice 14. Déterminer les DL à l'ordre 2 en 0 de

$$(i)\ \frac{\ln(1+x)}{x}, \qquad (ii)\ e^x\ln(1+x), \qquad (iii)\ \ln\left(1+\ln(1+x)\right).$$

☞ Lorsqu'un calcul d'équivalent ou de limite n'aboutit pas, il faut penser à utiliser des développements limités.

Exercice 15.

(1) Déterminer l'équivalent au voisinage de 0 de la fonction $f(x) = \ln(1+x) - x$.
(2) Déterminer la limite en 0 de la fonction

$$g(x) = \frac{e^x - xe^x - 1}{2x^2}.$$

3.3 Application : Position d'une courbe par rapport à une tangente

Proposition 10. Soit f une fonction définie en 0 et admettant un développement limité d'ordre 2 au voisinage de 0:

$$f(x) = a + bx + cx^2 + o\left(x^2\right).$$

Alors :

(i) $a = f(0)$;
(ii) f est dérivable en 0 et $b = f'(0)$;
(iii) L'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0 est : $y = a + bx$.
(iv) Si $c \neq 0$, comme $f(x) - (a + bx) = cx^2 + o(x^2) \underset{x\to 0}{\sim} cx^2$, la position (locale) de la courbe par rapport à la tangente est donnée par le signe cx^2 donc par le signe de c.

Exercice 16. Soit f la fonction définie sur $[-1; +\infty[$ par $f(x) = e^{-x}\sqrt{1+x}$.
(1) Calculer le développement limité d'ordre 2 en 0 de f.
(2) En déduire l'équation de la tangente en 0 ainsi que la position de la courbe par rapport à la tangente.

4 Comparaison de suites

☞ Contrairement aux fonctions, on ne peut comparer deux suites que pour n tendant vers $+\infty$.

Définition 5. *(Suite négligeable devant une autre suite) Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles. On suppose que la suite (v_n) ne s'annule pas à partir d'un certain rang. On dit que (u_n) est négligeable devant (v_n) (en $+\infty$), et on note $u_n = o(v_n)$ si et seulement si*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0.$$

☞ La notation du petit-o permet notamment de préciser le comportement *asymptotique* d'une suite via des développements de plus en plus précis. Par exemple, considérons la suite (u_n) définie par

$$u_n = n^2 - \ln(n) + e - \frac{1}{n} + \left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

On peut alors écrire (pour $n \to +\infty$)

$$\begin{aligned} u_n &= n^2 + o(n^2) \\ &= n^2 - \ln(n) + o(\ln(n)) \\ &= n^2 - \ln(n) + e + o(1) \\ &= n^2 - \ln(n) + e - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

Définition 6. *(Suites équivalentes) Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles. On suppose que la suite (v_n) ne s'annule pas à partir d'un certain rang. On dit que (u_n) est équivalente à (v_n) (en $+\infty$), et on note $u_n \sim v_n$ si et seulement si*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1.$$

Proposition 11. (Caractérication de l'équivalence par les petits-o)

$$u_n \sim v_n \iff u_n = v_n + o(v_n).$$

☞ La réciproque indique qu'on peut négliger les termes négligeables dans une somme. Ainsi

$$u_n + o(u_n) \sim u_n.$$

Théorème 5. *(Équivalents et limites) Si les suites (u_n) et (v_n) sont équivalentes, alors elles sont de même nature, c'est-à-dire*

- *Si $u_n \sim v_n$ et si (v_n) converge vers ℓ, alors (u_n) converge également vers ℓ.*
- *Si $u_n \sim v_n$ et si (v_n) diverge vers $\pm\infty$, alors (u_n) diverge également vers $\pm\infty$.*

☞ Les règles de calculs sur les équivalents vus sur les fonctions s'appliquent aux suites.

☠ On ne peut toujours pas ni sommer ni composer les équivalents en général. De plus, deux suites ayant même limite ne sont pas forcément équivalentes.

Proposition 12. (Utilisation des équivalents) Soient $u = (u_n)_{n\geq 0}$ une suite **de limite nulle**. Alors :

- $e^{u_n} - 1 \sim u_n$
- $\ln(1+u_n) \sim u_n$
- $(1+u_n)^\alpha - 1 \sim \alpha u_n$ pour $\alpha \neq 0$

Exercice 17.

(1) Déterminer un équivalent, pour $n \to +\infty$, de $\ln\left(1 - \frac{1}{2n}\right)$.

(2) Déterminer un équivalent, pour $n \to +\infty$, de $\sqrt{1+\frac{1}{n}} - 1$.

(3) (a) Que serait tenté.e de proposer un.e étudiant.e n'ayant pas bien écouté ni lu ce qui précède comme équivalent pour

$$u_n = \sqrt{1+\frac{1}{n}} - 1 + \ln\left(1 - \frac{1}{2n}\right)?$$

Serait-ce correct?

(b) Déterminer, à l'aide de DL usuels à l'ordre 2 en 0, un équivalent à la suite u_n.

5 Autres exercices

Exercice 101. Calculer les limites des fonctions suivantes aux points indiqués.

(1) $\dfrac{\ln x + x - 1}{x + e^{-x}}$ en 0^+ et en $+\infty$.

(2) $\ln\left(\mathrm{e}^{-x} + x^{-2}\right)$ en $+\infty$.

(3) $\dfrac{(1-\mathrm{e}^x)^2}{x\ln(1+x)}$ en 0

(4) $\dfrac{xe^x + 1}{e^x + 1}$ en $+\infty$, et en $-\infty$.

(5) $x^2 e^{-\sqrt{x}}$ en $+\infty$.

(6) $\mathrm{e}^x - x\mathrm{e}^{1/x}$ en 0^+ et en 0^-.

(7) $\dfrac{x\ln x + \ln x}{\sqrt{x+1}}$ en 0^+ et en $+\infty$.

(8) $\ln(1+\sqrt{x}) - x^2$ en $+\infty$.

(9) $\dfrac{1}{e^{-x}-1} - \dfrac{1}{x}$ en 0.

(10) $x^\alpha \ln(x+1) - x^\alpha \ln(x)$, $(\alpha \in \mathbb{R})$ en $+\infty$.

(11) $x^{\frac{1}{x}}$ en 0^+ et en $+\infty$.

(12) $\dfrac{1}{x(1+x)} - \dfrac{\ln(1+x)}{x^2}$ en 0.

(13) xe^{-x^2} en $+\infty$.

(14) $\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$ en 0.

(15) $(1+x)^{1/x}$ en 0.

(16) $\dfrac{\ln(1+x) - x}{2x^2}$ en 0.

(17) $\dfrac{\ln(1+x^3)}{\ln(x)}$ en 0 et en $+\infty$.

(18) $(x+1)\ln(\sqrt{x})$ en 0^+.

(19) $\dfrac{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}}{2x}$ en 0.

Exercice 102.

(1) Montrer qu'au voisinage de $+\infty$, on a : $\mathrm{e}^{-x^2} = o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$

(2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. Montrer qu'au voisinage de $+\infty$, on a : $\dfrac{(\ln(1+x))^n}{1+x^2} = o\left(\dfrac{1}{x^{3/2}}\right)$.

Exercice 103. Soit $f : x \mapsto \ln(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}) - x$.

(1) Déterminer l'ensemble de définition de f.

(2) Montrer que f est dérivable sur son ensemble de définition puis calculer sa dérivée.

(3) Dresser le tableau de variations de f, limites comprises.

(4) La fonction f est-elle prolongeable par continuité en 0 ?

Exercice 104. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} x\ln(x^2) - 2x, & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

(1) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

(2) Montrer que f est impaire.

(3) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et calculer $f'(x)$ pour tout $x \neq 0$.

(4) La fonction f est-elle dérivable en 0 ?
(5) Dresser le tableau de variations de f, limites comprises puis tracer une allure de sa courbe représentative.

Exercice 105. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{xe^{-x}}{1-e^{-x}}, & \text{si } x \neq 0 \\ 1, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

(1) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
(2) La fonction f est-elle dérivable en 0 ?
(3) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et calculer $f'(x)$ pour tout $x \neq 0$.
(4) Montrer que pour tout réel x, on a : $\mathrm{e}^{-x} \geq 1 - x$.
(5) Dresser le tableau de variations de f, limites comprises puis tracer une allure de sa courbe représentative.

Exercice 106. Soit f la fonction définie sur $[-1;+\infty[\setminus\{0\}$ par

$$f(x) = \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}.$$

(1) Déterminer le développement limité de $x \mapsto \sqrt{1+x}$ à l'ordre 2 au voisinage de 0 puis en déduire le développement limité de f à l'ordre 1 au voisinage de 0.
(2) La fonction f est-elle prolongeable par continuité en 0 ?
(3) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0.

Exercice 107.

(1) Déterminer un équivalent puis la limite de : $u_n = \sqrt{n+1}\big[\ln(n+1) - \ln(n)\big]$.
(2) Déterminer la limite de : $v_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$.
(3) Déterminer un équivalent de : $w_n = n \ln\left(1 - \dfrac{2}{n}\right) + 2$.

Exercice 108. (Loi binomiale et loi de Poisson). On considère une suite (X_n) de variables aléatoires telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, \frac{1}{n}\right)$.

(1) Rappeler $X_n(\Omega)$ ainsi que $P(X_n = k)$ pour tout $k \in X_n(\Omega)$.
(2) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$ fixé,

$$\binom{n}{k} \sim \frac{n^k}{k!}, \quad n \to +\infty.$$

(3) En déduire que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} P(X_n = k) = e^{-1}\frac{1}{k!}.$$

Exercice 109. Déterminer un équivalent d'une suite (u_n) vérifiant, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\ln(n) + \frac{1}{2^n} \leq u_n \leq \ln(n) + \frac{1}{n}.$$

Exercice 110.

(1) Montrer par récurrence que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{e}^{-x} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^k}{k!} + (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} \mathrm{e}^{-t} \mathrm{d}t$$

(2) En écrivant l'égalité précédente pour $n = 2$ puis pour $n = 3$, montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \leq x - 1 + e^{-x} \leq \frac{x^2}{2}$$

(3) En déduire un équivalent de $x - 1 + e^{-x}$ en 0.
(4) Retrouver le résultat précédent à l'aide d'un développement limité.

Exercice 111. (Développement asymptotique d'une suite implicite) Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on considère l'équation

$$e^x + x - n = 0.$$

(1) Montrer que l'équation admet une unique solution que l'on notera u_n.
(2) Montrer que u_n tend vers $+\infty$, lorsque $n \to +\infty$.
(3) (a) Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^\star$,

$$u_n + \ln\left(1 + u_n e^{-u_n}\right) = \ln(n).$$

(b) Quelle est la limite de $u_n e^{-u_n}$? Montrer que $u_n \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.
(c) On pose $v_n = u_n - \ln(n)$.

(i) Montrer que $e^{v_n + \ln(n)} + v_n + \ln(n) = n$, puis que

$$e^{v_n} = 1 - \frac{\ln(n)}{n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right).$$

(ii) En déduire, à l'aide d'un développement limite de $\ln(1-x)$ en 0, que

$$u_n = \ln(n) - \frac{\ln(n)}{n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right).$$

Exercice 112. (D'après **ESCP 2014**, voie T). On considère la suite (u_n) définie, pour $n \in \mathbb{N}$ par

$$u_0 = 1, \qquad \text{et, pour } n \in \mathbb{N}^*, \qquad u_n = \int_0^1 (\ln(1+t))^n \mathrm{d}t.$$

(1) (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$0 \leq u_n \leq (\ln(2))^n.$$

(b) En déduire la limite de la suite (u_n).

(2) (a) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = 2(\ln(2))^{n+1} - (n+1)u_n.$$

(b) En déduire que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $(n+1)u_n \leq 2(\ln(2))^{n+1}$.
(c) Montrer que (u_n) est décroissante.
(d) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+2)u_n \geq 2(\ln(2))^{n+1}$.
(e) Conclure que

$$u_n \sim \frac{2(\ln(2))^{n+1}}{n}, \qquad n \to +\infty.$$

Exercice 113. (Extrait **DS1, 2018-2019**, Question de cours)

(1) Montrer que la fonction f définie ci après se prolonge par continuité sur $]-1;+\infty[$, puis déterminer son développement limité à l'ordre 2 en 0, où

$$\forall x \in]-1;+\infty[\setminus\{0\}, \qquad f(x) = \frac{1-e^{x^2}}{\ln(1+x)}.$$

En déduire la dérivabilité en 0, l'équation de la tangente en ce point et la position relative de celle-ci par rapport à la courbe de f.

(2) Monter, à l'aide de développements limités usuels en 0, que

$$\sqrt{1 + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)} \underset{n\to+\infty}{\sim} 1 + \frac{1}{2n} - \frac{3}{8n^2}.$$

Exercice 114. (Extrait **DS1, 2018-2019**, Exercice 1) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \dfrac{1}{e^x+1} + nx$.

(1) Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
(2) Déterminer un équivalent de $f_n(x)$ en $+\infty$, puis un équivalent en $-\infty$. En déduire les limites de $f_n(x)$ aux extrémités de son ensemble de définition ainsi que l'existence de deux asymptotes à la courbe représentative de f_n, dont on précisera les équations.
(3) Déterminer les coordonnées du seul point d'inflexion A_n et préciser l'équation de la tangente en ce point.
(4) Quel est le développement limité à l'ordre 2 de $f_n(x)$ au point d'inflexion?

On admet la formule de Taylor-Young à l'ordre 3 en 0 pour toute fonction f de classe $\mathcal{C}^3$ au voisinage de 0

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + o(x^3).$$

(5) Expliciter les développements limités en 0 à l'ordre 3 de e^x et de $\dfrac{1}{1+x}$.
(6) En constatant que

$$\frac{1}{e^x+1} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{1+\left(\frac{e^x-1}{2}\right)},$$

et en utilisant les deux développements limités précédents, obtenir le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $f_n(x)$.
(7) Représenter graphiquement sur un même graphique orthonormé la courbe représentative de f_1, sa tangente au point d'inflexion et ses asymptotes.

(8) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution, notée u_n.
(9) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $-\dfrac{1}{n} < u_n < 0$. En déduire la limite de (u_n).
(10) En revenant à la définition de u_n, montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{2n}$.

Exercice 115. Soient $\lambda > 0$, $n \in \mathbb{N}^*$, $Y \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, \frac{\lambda}{n}\right)$ et $Z \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$. Montrer que, si n assez grand,

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad \lim_{n\to+\infty} P(Y=k) = P(Z=k).$$

Exercice 116. (**) Montrer que

$$\sum_{k=1}^{n} k! \underset{n\to+\infty}{\sim} n!.$$

(<u>indication:</u> on pourra découper

$$\sum_{k=1}^{n} k! = \sum_{k=1}^{n-2} k! + (n-1)! + n!.)$$