ECE 2 - Année 2020-2021
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Chapitre 5. Applications Linéaires

Dans tout le chapitre, on désigne par E et F les espaces vectoriels $(E,+,\cdot)$ et $(F,+,\cdot)$.

1 Généralités

Définition 1. *On dit qu'une application $\Phi: E \to F$ est **linéaire** si*

(i) Pour tous $u,v \in E$, $\Phi(u+v) = \Phi(u)+\Phi(v)$;

(ii) Pour tout $u \in E$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\Phi(\lambda u) = \lambda\Phi(u)$.

*Lorsque $E = F$ (et uniquement dans ce cas), on dit que Φ est un **endomorphisme**.*

☞ En particulier, si Φ est linéaire, alors

$$\Phi(0_E) = 0_F.$$

☞ Il découle aussi immédiatement de la définition que, pour tout $u \in E$

$$\Phi(-u) = -\Phi(u)$$

et, plus généralement, pour tous $u_1, u_2, ..., u_n \in E$ et tous $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$

$$\Phi(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + ... + \lambda_n u_n) = \lambda_1\Phi(u_1) + \lambda_2\Phi(u_2) + ... + \lambda_n\Phi(u_n).$$

☞ Une application linéaire entre deux espaces vectoriels et une application qui respecte la structure d'espace vectoriel entre E et F. Pour vérifier qu'une application donnée est bien une application linéaire, on utilise plutôt la définition équivalente ci-dessous.

Proposition 1. (Définition équivalente) Soit $\Phi: E \to F$. On a équivalence

(i) Φ est une application linéaire;

(ii) Pour tous $u,v \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$\Phi(u+\lambda v) = \Phi(u) + \lambda\Phi(v). \qquad (\star)$$

☞ Beaucoup d'exercices demandent de vérifier qu'une application définie au préalable est un endomorphisme; pour cela on vérifie donc deux choses

- Que l'application Φ arrive bien dans l'espace vectoriel d'arrivée, *i.e.*

$$\forall u \in E, \quad \Phi(u) \in E$$

- Que l'application Φ est bien linéaire à l'aide la relation $(\star)$.

☞ Les candidat.e.s ont parfois tendance à confondre la vérification du caractère linéaire de l'application (*i.e.* $\Phi(u+\lambda v) = \Phi(u)+\lambda\Phi(v)$) avec la stabilité par combinaison linéaire d'un sous-ensemble ($u,v \in F$ et $\lambda,\mu \in \mathbb{R} \implies \lambda u + \mu v \in F$) et se mélangent les pinceaux dans la rédaction de leur réponse. On ne fera rien de tel bien sûr.

☞ **Quelques exemples**

(1) L'application **identité** $\mathrm{Id}_E : E \to E$, $u \mapsto u$ est un endomorphisme de E.

(2) L'application $\Phi : E \to F$, $u \mapsto 0_F$ est une application linéaire, appelée **application nulle**.

(3) L'application $\Phi_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $u = (x, y) \mapsto 2x - y$ est une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$.

(4) L'application $\Phi_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $u = (x, y) \mapsto (x + y, x - y, 3y)$ est une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$.

(5) L'application $\Phi_3 : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}$, $P \mapsto P(1)$ est une application linéaire de $\mathbb{R}_3[X]$ dans $\mathbb{R}$.

(6) L'application $\Phi_4 : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}[X]$, $P \mapsto P'$ est une application linéaire de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$.

(7) Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. L'application $\Phi_5 : \mathcal{M}_{3,1} \to \mathcal{M}_{3,1}$, $X \mapsto AX$ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_{3,1}$. On reviendra longuement sur ce type d'application dans le paragraphe 4.

(8) L'application $\Phi_6 : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $M \mapsto {}^tM$ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 1. Les applications suivantes sont-elles des applications linéaires? Si oui, sont-elles des endomorphismes?

(1) $\Psi_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $x \mapsto (x, 0)$;
(2) $\Psi_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $x \mapsto (2x, 1)$;
(3) $\Psi_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $(x, y) \mapsto (x + 2y, y, -x)$;
(4) $\Psi_4 : P \in \mathbb{R}_2[X] \mapsto P(X + 1)$;
(5) $\Psi_5 : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_3[X]$, $P \mapsto P(X + 1) - P(X)$;
(6) $\Psi_6 : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_3[X]$, $P \mapsto X^2P(X) + 1$;
(7) $\Psi_7 : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $u = (u_n) \mapsto (u_{n+1})$;
(8) $\Psi_8 : \mathcal{C}^0(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $f \mapsto \displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$;
(9) $\Psi_9 : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto a + c - d - b$;
(10) $\Psi_{10} : \mathcal{M}_{3,1} \to \mathcal{M}_{3,1}$ définie par

$$\Psi_{10} : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x + y + z \\ 2x - y - 3x \\ 3x - 2z \end{pmatrix}$$

(11) Soit E un espace vectoriel de dimension 3 et $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ une base de E. On considère $\Psi_{11} : E \to E$,

$$u = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 \longmapsto \lambda_1 u_2 + \lambda_2 u_3 + \lambda_3 u_1.$$

☞ Le dernier exemple de l'exercice précédent est important. Une application linéaire sur un espace vectoriel de dimension finie est parfaitement **définie par son action** sur les vecteurs de l'une des **bases** de l'espace.

Exercice 2. Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

(1) Montrer que P est inversible.
(2) On considère l'application $\Phi : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $M \mapsto P^{-1}MP$.
   (a) Montrer que Φ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   (b) Montrer que Φ est bijectif. Expliciter Φ^{-1}.

2 L'espace $\mathcal{L}(E,F)$

Définition 2. *L'ensemble des applications linéaires de E dans F est noté $\mathcal{L}(E,F)$. L'ensemble des endomorphismes de E est noté $\mathcal{L}(E)$.*

Théorème 1. *L'ensemble $\mathcal{L}(E,F)$ est un espace vectoriel. En particulier, si $f,g \in \mathcal{L}(E,F)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors*

$$f+g \in \mathcal{L}(E,F), \quad \text{et} \quad \lambda f \in \mathcal{L}(E,F).$$

Proposition 2. Soient E, FG trois espaces vectoriels.
Si $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$, alors $g \circ f \in \mathcal{L}(E,G)$.

Définition 3. *Selon les propriété de l'application linéaire $\Phi \in \mathcal{L}(E,F)$, on précise la terminologie*

(i) Si Φ est bijective, on dit que Φ est un ***isomorphisme*** *de E dans F;*
(ii) Si $E = F$, Φ est un endomorphisme de E. Si de plus, Φ est bijectif, on dit que Φ est un ***automorphisme*** *de E.*

Exercice 3. Pour chacune des applications linéaires de l'Exercice 1, préciser si ce sont des isomorphismes ou automorphismes.

Proposition 3. Si $f \in \mathcal{L}(E,F)$ est un isomorphisme, alors $f^{-1} \in \mathcal{L}(F,E)$.

Exercice 4. Montrer que l'application

$$\Phi : \ (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \longmapsto (2a+b)X^3 + (b+2c)X^2 + (2d-c)X + (a-d)$$

est un isomorphisme entre $\mathbb{R}^4$ et $\mathbb{R}_3[X]$. Expliciter Φ^{-1}.

Proposition 4. Soient E, FG trois espaces vectoriels.
Si $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$, alors $g \circ f \in \mathcal{L}(E,G)$.
Si, de plus, f et g sont deux isomorphismes, alors $g \circ f$ est un isomorphisme (de E dans G) et

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

Définition 4. *(Puissances d'un endomorphisme). Soit $\Phi \in \mathcal{L}(E)$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note*

$$\Phi^1 = \Phi, \quad \Phi^2 = \Phi \circ \Phi, \quad \ldots, \quad \Phi^{n+1} = \Phi \circ \Phi^n$$

et

$$\Phi^0 = \mathrm{Id}_E.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\Phi^n \in \mathcal{L}(E)$.

Exercice 5. Soient E un espace vectoriel de dimension n et Φ un endomorphisme non nul de E tel que $\Phi^n = 0$ (mais $\Phi^{n-1} \neq 0$).

(1) Montrer que Φ n'est pas un automorphisme.
(2) Montrer qu'il existe $u \in E$ tel que la famille $(u, \Phi(u), \Phi^2(u), ..., \Phi^{n-1}(u))$ forme une base de E.

3 Noyau, Image, Rang

Définition 5. *Soit $\Phi \in \mathcal{L}(E,F)$. On appelle* **noyau** *de Φ l'ensemble, noté* $\mathrm{Ker}(\Phi)$, *des vecteurs de E envoyés par Φ sur le vecteur nul 0_F*

$$\mathrm{Ker}(\Phi) = \{u \in E : \ \Phi(u) = 0_F\}.$$

C'est un sous-espace vectoriel de E.

☞ Comme Φ est linéaire, $\mathrm{Ker}(\Phi)$ contient toujours au moins le vecteur nul de E

$$0_E \in \mathrm{Ker}(\Phi).$$

☞ Pour **déterminer le noyau**, on résout l'équation (ou le système d'équations) correspondant à

$$\Phi(u) = 0.$$

Exercice 6. Déterminer le noyau de chacune des applications linéaires ci-dessous

(1) $f:\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $u=(x,y,z)\mapsto (x+y,y-z)$;
(2) $g:\ \mathbb{R}_3[X]\to\mathbb{R}^2$, $P\mapsto (P(1),P'(1))$;
(3) $h:\ \mathcal{M}_2(\mathbb{R})\to\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $M\mapsto AM-MA$, où $A=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}$.

Proposition 5. Soit $\Phi\in\mathcal{L}(E,F)$. Alors

$$\Phi \text{ est injective } \iff \mathrm{Ker}(\Phi)=\{0_E\}.$$

☞ La linéarité permet de ramener l'étude de l'injectivité de Φ en 0. Ce résultat est crucial!

Exercice 7. Parmi les trois applications linéaires ci-dessous, lesquelles sont injectives?

$$(i)\quad f_1:\ \begin{array}{ccc}\mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2,\\ (x,y,z) & \mapsto & (2x+3y-2z,x-z)\end{array}$$

$$(ii)\quad f_2:\ \begin{array}{ccc}\mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}[X]\\ P & \mapsto & P'\end{array}\quad ;\qquad (iii)\quad f_3:\ \begin{array}{ccc}\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_2(\mathbb{R})\\ M & \mapsto & {}^tM\end{array}$$

Définition 6. *Soit $\Phi\in\mathcal{L}(E,F)$. On appelle* ***image*** *de Φ l'ensemble, noté* $\mathrm{Im}(\Phi)$, *des vecteurs de F ("touchés") admettant un antécédent par Φ:*

$$\mathrm{Im}(\Phi)=\{v\in F:\ \exists\, u\in E,\ v=\Phi(u)\}=\{\Phi(u):\ u\in E\}.$$

C'est un sous-espace vectoriel de F.

Proposition 6. Soit $\Phi\in\mathcal{L}(E,F)$. Alors

$$\Phi \text{ est surjective } \iff \mathrm{Im}(\Phi)=F.$$

☞ Le caractère linéaire permet de voir immédiatement que, si E est de dimension finie et que $\mathcal{B}=(u_1,u_2,...,u_n)$ est une base de E,

$$\mathrm{Im}(\Phi)=\mathrm{Vect}(\Phi(u_1),\Phi(u_2),...,\Phi(u_n)).$$

Pour **déterminer** l'image, on détermine donc le sous-espace engendré par les images des vecteurs d'une base de l'espace de départ.

Exercice 8. Pour chacune des applications linéaires de l'Exercice 7, déterminer l'image et préciser si l'application est surjective ou non.

Définition 7. *Soient E un espace de* ***dimension finie*** *et $\Phi\in\mathcal{L}(E,F)$. On appelle* ***rang*** *de Φ la dimension de l'image de Φ*

$$\mathrm{rg}(\Phi)=\dim(\mathrm{Im}(\Phi)).$$

On a toujours

$$\mathrm{rg}(\Phi)\le\dim(E).$$

☞ Si $\mathcal{B}=(u_1,u_2,...,u_n)$ est une base quelconque de E,

$$\mathrm{rg}(\Phi)=\dim\left(\mathrm{Vect}(\Phi(u_1),\Phi(u_2),...,\Phi(u_n))\right).$$

☞ Si F est également de dimension finie, alors $\mathrm{rg}(\Phi)\le\dim(F)$ et on a

$$\Phi \text{ surjective } \iff \mathrm{Im}(\Phi)=F \iff \mathrm{rg}(\Phi)=\dim(F).$$

Exercice 9. Déterminer le rang de l'application

$$\Phi:\ \begin{array}{ccc}\mathcal{M}_2 & \to & \mathcal{M}_2\\ M & \mapsto & M+{}^tM\end{array}$$

Théorème 2. *(Théorème du rang). Soient E un espace de dimension finie et $\Phi\in\mathcal{L}(E,F)$. Alors*

$$\dim(E)=\dim(\mathrm{Ker}(\Phi))+\mathrm{rg}(\Phi).$$

☞ On observe que **seule** la dimension de **l'espace de départ** intervient dans le théorème du rang.

Exercice 10. Déterminer le rang de l'application linéaire

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} & \longmapsto & (a+e+i,\ c+e+g,\ a+c+g+i) \end{array}$$

Exercice 11. Soit f un endomorphisme non nul d'une espace vectoriel E de dimension 3 tel que $f \circ f = 0$.

(1) Montrer que $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$.
(2) En déduire que $\dim(\mathrm{Ker}(f)) \geq 2$.
(3) Conclure que $\mathrm{rg}(f) = 1$.

Corollaire 1. Soient E un espace de dimension finie et $\Phi \in \mathcal{L}(E, F)$. Si F est également de dimension finie, alors

(i) Si $\dim(E) < \dim(F)$, alors Φ n'est pas surjective;
(ii) Si $\dim(F) < \dim(E)$, alors Φ n'est pas injective;
(iii) Si $\dim(E) = \dim(F)$, alors on a équivalence

$$\Phi \text{ est un isomorphisme} \Longleftrightarrow \Phi \text{ est injectif} \Longleftrightarrow \Phi \text{ est surjectif.}$$

☞ En prenant $E = F$ dans le résultat précédent, on obtient l'équivalence suivante

Corollaire 2. (Endomorphismes et bijectivité) Soient E un espace de dimension finie et $\Phi \in \mathcal{L}(E)$. On a équivalence

$$\begin{aligned} \Phi \text{ est un automorphisme} &\Longleftrightarrow \Phi \text{ est injectif} \\ &\Longleftrightarrow \mathrm{Ker}(\Phi) = \{0_E\} \\ &\Longleftrightarrow \mathrm{Im}(\Phi) = E \\ &\Longleftrightarrow \mathrm{rg}(\Phi) = \dim(E) \\ &\Longleftrightarrow \Phi \text{ est surjectif.} \end{aligned}$$

☞ Ainsi, il suffit la plupart du temps de vérifier qu'un endomorphisme est injectif (car c'est souvent plus facile que surjectif) en déterminant son noyau pour obtenir le caractère bijectif.

☞ Par ailleurs, si Φ est un isomorphisme entre deux espaces E et F de dimensions finies, alors nécessairement les dimensions sont égales. On peut se servir de ce résultat pour déterminer la dimension d'un espace vectoriel.

4 Un cas particulier important d'application linéaire

4.1 Application linéaire associée à une matrice

Définition 8. *Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors, l'application*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \\ X & \longmapsto & AX \end{array}$$

est une application linéaire, dite application linéaire ***canoniquement associée*** *à A.*

4.2 Noyau, image d'une matrice

Définition 9. *Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.*
On appelle ***noyau*** *de A, et on note $\mathrm{Ker}\,(A)$, le sous-ensemble de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ défini par :*

$$\mathrm{Ker}\,(A) = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \mid AX = 0\}.$$

Définition 10. *Soit*

$$A = \begin{pmatrix} | & | & \dots & | \\ C_1 & C_2 & \dots & C_p \\ | & | & \dots & | \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$$

une matrice. On appelle ***image*** *de la matrice A, et on note* $\mathrm{Im}\,(A)$, *le sous-ensemble de* $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ *défini par:*

$$\mathrm{Im}\,(A) = \mathrm{Vect}\,(C_1, C_2, \dots, C_p)\,.$$

Ainsi, on retrouve la définition du ***rang*** *de la matrice A.*

$$\mathrm{rg}\,(A) = \dim\,(\mathrm{Im}(A)) = \dim\,(\mathrm{Vect}\,(C_1, C_2, \dots, C_p))\,.$$

4.3 Théorème du rang et applications

Théorème 3. *(Théorème du rang pour les matrices) Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors :*

$$\dim(\mathrm{Ker}\,(A)) + \mathrm{rg}\,(A) = n.$$

Théorème 4 (Caractérisation de l'inversibilité)**.**

$$A \text{ est inversible} \iff \mathrm{Ker}\,(A) = \{0\} \iff \mathrm{rg}\,(A) = n.$$

Exercice 12. Discuter sans calcul de l'inversibilité des matrices ci-dessous

$$(i)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 13. On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(1) Déterminer le rang de A.
(2) Calculer AU.
(3) En déduire $\mathrm{Ker}(A)$.

5 Matrice d'une application linéaire dans une base

On va voir que tout endomorphisme en dimension finie peut finalement se représenter sous la forme du cas particulier précédent.

5.1 Action d'une application linéaire sur une base

Proposition 7. Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $\Phi \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors, Φ est entièrement déterminée par l'image des vecteurs d'une base de E.

☞ Le résultat précédent signifie qu'il suffit de connaître les images des vecteurs d'une base quelconque de l'espace de départ pour "connaître" Φ.

Proposition 8. Soient E et F deux espaces vectoriels de dimensions finies et Φ et Ψ deux applications linéaires de E dans F. Si Φ et Ψ coïncident sur les vecteurs d'une base de E, alors $\Phi = \Psi$.

☞ Les propriétés d'injectivité, de surjectivité et de bijectivité se traduisent sur la famille des images des vecteurs de la base de départ. On rappelle au lecteur que si $(u_1, ..., u_n)$ est une base de E, alors

$$\mathrm{Im}(\Phi) = \mathrm{Vect}(\Phi(u_1), ..., \Phi(u_n)).$$

Proposition 9. Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $\Phi \in \mathcal{L}(E, F)$. Soit $\mathcal{B} = (u_1, u_2, ..., u_n)$ est une base de E. Alors,

(i) Φ est injective si et seulement si $(\Phi(u_1), \Phi(u_2), ..., \Phi(u_n))$ est libre;
(ii) Φ est surjective si et seulement si $(\Phi(u_1), \Phi(u_2), ..., \Phi(u_n))$ est génératrice dans F;
(iii) Φ est bijective si et seulement si $(\Phi(u_1), \Phi(u_2), ..., \Phi(u_n))$ est une base de F.

☞ En particulier, un isomorphisme envoie une base de E sur une base de F.

5.2 Matrice associée à une application linéaire

Définition 11. *Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie, $\mathcal{B}_E = (e_1, ..., e_p)$ une base de E, $\mathcal{B}_F = (f_1, ..., f_n)$ une base de F et $\Phi \in \mathcal{L}(E, F)$.*

La matrice de Φ dans les bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$ est la matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}$ dont les colonnes sont constituées des coordonnées dans la base $\mathcal{B}_F$ des vecteurs $\Phi(e_i)$ (pour $1 \leq i \leq p$). Plus précisément,

$$A = \mathrm{Mat}(\Phi, \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F) = (a_{i,j})_{1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq p}$$

où, pour tout $1 \leq j \leq p$,

$$\Phi(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} f_i.$$

Lorsque $E = F$, alors la matrice A est simplement notée $\mathrm{Mat}(\Phi, \mathcal{B}_E)$.

☞ On insiste sur le fait que la matrice d'une application linéaire n'a de sens que si les bases de départ et d'arrivée sont précisées.

☞ Attention, si on change l'ordre des vecteurs dans les bases, on change la matrice de l'application.

☞ La matrice de l'application identité (de E dans E, avec $\dim(E) = n$) est la matrice identité

$$\mathrm{Mat}(\mathrm{Id}_E, \mathcal{B}_E) = I_n.$$

Exercice 14. Déterminer la matrice dans les bases canoniques des applications linéaires suivantes

$$(i)\ f_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (2x - y + z, y - 3z, x + 2z) \end{array} ;$$

$$(ii)\ f_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \mapsto & P' \end{array} ; \qquad (iii)\ f_3 : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_2 & \to & \mathcal{M}_2 \\ M & \mapsto & {}^tM \end{array} ;$$

Proposition 10. Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie, $\mathcal{B}_E = (e_1, ..., e_p)$ une base de E, $\mathcal{B}_F = (f_1, ..., f_n)$ une base de F et $\Phi \in \mathcal{L}(E, F)$.

On note $A = \mathrm{Mat}(\Phi, \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F)$.

Soient $u \in E$ et $v \in F$. Si $X \in \mathcal{M}_{p,1}$ représente les coordonnées de u dans $\mathcal{B}_E$ et $Y \in \mathcal{M}_{n,1}$ représente les coordonnées de v dans $\mathcal{B}_F$, alors

$$v = \Phi(u) \Longleftrightarrow Y = AX.$$

☞ Une application linéaire, en dimension finie n'est donc rien d'autre qu'une multiplication matricielle sur les coordonnées d'un vecteur dans une certaine base.

Proposition 11. (Opérations sur les matrices d'applications linéaires). Soient E, F, G trois espaces vectoriels de dimension finie et $\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F, \mathcal{B}_G$ trois bases correspondant à chaque espace.

(1) Si $\Phi, \Psi \in \mathcal{L}(E, F)$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, alors

$$\mathrm{Mat}(\lambda\Phi + \mu\Psi, \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F) = \lambda \mathrm{Mat}(\Phi, \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F) + \mu \mathrm{Mat}(\Psi, \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F).$$

(2) Si $\Phi \in \mathcal{L}(E, F)$ et $\Psi \in \mathcal{L}(F, G)$, alors

$$\mathrm{Mat}(\Psi \circ \Phi, \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_G) = \mathrm{Mat}(\Psi, \mathcal{B}_F, \mathcal{B}_G) \cdot \mathrm{Mat}(\Phi, \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F).$$

(3) Si $\Phi \in \mathcal{L}(E)$ et $n \in \mathbb{N}$, alors $\mathrm{Mat}(\Phi^n, \mathcal{B}_E) = \mathrm{Mat}(\Phi, \mathcal{B}_E)^n$.

Exercice 15. Soient $s, d \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X])$ définis par $s(P) = P(X+1)$ et $d(P) = P'$.

(1) Déterminer les matrices de s et d dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
(2) En déduire la matrice de l'endomorphisme $t : P \mapsto P(X+2)$.
(3) Déterminer la matrice de l'endomorphisme $u : P \mapsto P'(X+1)$.

☞ Toutes les propriétés d'injectivité, de surjectivité et de bijectivité sur Φ sont équivalentes aux même propriétés sur la matrice de Φ dans des bases quelconques.

Proposition 12. Soient Φ un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n, $\mathcal{B}_E$ une base de E et A la matrice de Φ dans la base $\mathcal{B}_E$. Alors

$$\begin{aligned}
\Phi \text{ est un automorphisme} &\iff \Phi \text{ est injectif}\\
&\iff \Phi \text{ est surjectif}\\
&\iff \operatorname{Ker}(\Phi) = \{0_E\}\\
&\iff \operatorname{Im}(\Phi) = E\\
&\iff \operatorname{Ker}(A) = \{0_{\mathcal{M}_{n,1}}\}\\
&\iff \operatorname{Im}(A) = \mathcal{M}_{n,1}\\
&\iff A \text{ est inversible}
\end{aligned}$$

☞ Si $\Phi \in \mathcal{L}(E)$ est un automorphisme et $n \in \mathbb{Z}$, alors $\operatorname{Mat}(\Phi^n, \mathcal{B}_E) = \operatorname{Mat}(\Phi, \mathcal{B}_E)^n$.

Théorème 5. *Soient E et F deux espaces vectoriels de dimensions finies respectives p et n, $\mathcal{B}_E$ une base de E, et $\mathcal{B}_F$ une base de F. L'application linéaire*

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{L}(E,F) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \\
\Phi & \longmapsto & \operatorname{Mat}(\Phi, \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F)
\end{array}$$

est un isomorphisme. En particulier, $\dim(\mathcal{L}(E,F)) = np = \dim(E) \times \dim(F)$.

6 Matrices semblables

6.1 Matrices de passage

Définition 12. *Soient E un espace de dimension finie et $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E. On appelle matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ la matrice de l'application Id_E entre $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}$*

$$P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} = \operatorname{Mat}(\mathrm{Id}_E, \mathcal{B}', \mathcal{B})$$

Il s'agit de la matrice dont les colonnes sont composées des coordonnées des vecteurs de la nouvelle base $\mathcal{B}'$ exprimées dans l'ancienne base $\mathcal{B}$.

C'est une matrice inversible. De plus,

$$(P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'})^{-1} = \operatorname{Mat}(\mathrm{Id}_E, \mathcal{B}, \mathcal{B}') = P_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}}$$

☞ On note parfois $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$.

Exercice 16. Soit $\mathcal{C} = (P_0, P_1, P_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
Soit $\mathcal{C}' = (R_0, R_1, R_2)$, où

$$R_0(X) = 1, \quad R_1(X) = X - 1, \quad \text{et} \quad R_2(X) = (X-1)^2,$$

une autre base de $\mathbb{R}_2[X]$.
Déterminer la matrice de passage P de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{C}'$ puis la matrice de passage Q de $\mathcal{C}'$ à $\mathcal{C}$.

Proposition 13. Soient E un espace de dimension finie n et $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E.

Soit $u \in E$. On note $X \in \mathcal{M}_{n,1}$ les coordonnées de u dans la base $\mathcal{B}$ et $Y \in \mathcal{M}_{n,1}$ celles dans la base $\mathcal{B}'$. Alors,

$$Y = (P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'})^{-1} X, \quad \text{ou encore} \quad X = P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} Y.$$

Exercice 17. Soit $\mathcal{B} = (e_0, e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
Soit $\mathcal{B}' = (u, v, w)$, où $u = (1, -1, 1)$, $v = (0, 1, 1)$ et $w = (0, 1, -1)$, une autre base de $\mathbb{R}^3$.

(1) Déterminer la matrice de passage R de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

(2) Vérifier que la matrice de passage $S = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ est $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$.

6.2 Formule de changement de base

Proposition 14. Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de l'espace vectoriel E et Φ un endomorphisme de E. Alors,

$$\mathrm{Mat}(\Phi, \mathcal{B}) = P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} \mathrm{Mat}(\Phi, \mathcal{B}') \left(P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}\right)^{-1}$$

ou de manière équivalente

$$\mathrm{Mat}(\Phi, \mathcal{B}') = \left(P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}\right)^{-1} \mathrm{Mat}(\Phi, \mathcal{B}') P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}.$$

Exercice 18. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

On pose : $u = (1, 2, -1)$, $v = (1, 1, 0)$, $w = (2, 0, 1)$.

(1) Calculer $f(u)$.
(2) Montrer que $\mathrm{Ker}(f - id) = \mathrm{Vect}(v, w)$.
(3) Montrer que $\mathcal{B}' = (u, v, w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
(4) Déterminer la matrice A' de f dans la base $\mathcal{B}'$.
(5) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $f^n(u)$.

☞ L'idée est alors de trouver une base dans laquelle la matrice qui représente l'endomorphisme est diagonale (ou au moins triangulaire), celle-ci rendant par exemple le calcul des puissances nettement plus simple. C'est tout l'objet du chapitre intitulé *Réduction des endomorphismes*.

6.3 Matrices semblables

Définition 13. *Deux matrices M et M' de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont dites* ***semblables*** *s'il existe $P \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{R})$ telle que*

$$M' = P^{-1} M P.$$

☞ En d'autres termes, deux matrices sont semblables si et seulement si elles représentent le même endomorphisme dans deux bases différentes. La matrice P est alors la matrice de passage entre ces deux bases.

Proposition 15. Deux matrices semblables ont le même rang.

Proposition 16. Soient M et N deux matrices semblables telles que $M = P^{-1} N P$. Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$M^k = P^{-1} N^k P.$$

☞ La preuve est une récurrence facile qu'il faut savoir refaire.

7 Autres exercices

Exercice 601. Déterminer la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$.

(1) $\mathcal{B}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{B}' = (u, v, w)$ avec $u = (1, 1, 1)$, $v = (1, -1, 0)$ et $w = (1, 1, -2)$.
(2) $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$ et $\mathcal{B}' = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$.
(3) $\mathcal{B}$ est la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ et $\mathcal{B}' = (-X^2 + 2X + 1, X + 1, X^2 + 2)$
(4) $\mathcal{B} = (1, X - 2, X^2 - 3X + 3)$ et $\mathcal{B}'$ est la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

Exercice 602. On note (J_1, J_2, J_3, J_4) la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Soit f l'application définie sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ par

$$f:\ M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \longmapsto M + (a+d)I_2.$$

(1) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
(2) Déterminer la matrice A de f dans la base (J_1, J_2, J_3, J_4).
(3) (a) Montrer que $(J_1 - J_4, J_2, J_3, I_2)$ est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
(b) Déterminer la matrice D de f dans cette base.
(4) Montrer que f est un automorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 603. (**)

(1) (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\varphi : P(X) \mapsto (1 - X^2)P''(X) - 3XP'(X)$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
(b) Calculer $\varphi(1)$. L'endomorphisme φ est-il un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$?

(2) Dans cette question, on prend $n = 3$.
(a) Donner la matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.
(b) Déterminer une base de $\mathrm{Im}(\varphi)$ et une base de $\mathrm{Ker}(\varphi)$.

Exercice 604. (D'après **L'école de la vie**) On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ est donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(1) Justifier, **sans aucun calcul** que f est un automorphisme.
(2) Vérifier que $f \circ f \circ f \circ f = \mathrm{Id}$ (sans aucun calcul non plus) et en déduire l'expression de A^{-1} en fonction de A.
(3) Déterminer $E_1 = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$ et $E_{-1} = \mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id})$.

On considère maintenant l'espace vectoriel $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ des matrices carrées 2×2 à coefficients réels dont la base canonique est notée $\mathcal{C} = \{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ où

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Enfin, on s'intéresse à l'application u définie sur $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ définie par

$$u:\ M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} d & a \\ b & c \end{pmatrix}.$$

(5) Montrer que u est un endomorphisme.
(6) Donner la matrice de u dans la base canonique.

Exercice 605. (D'après **EDHEC 2013**)

(1) On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Vérifier que l'on a $A^2 \neq 0$ et calculer A^3.
(b) Déterminer une base (u) de $\mathrm{Ker}(f)$ ainsi qu'une base (v, w) de $\mathrm{Im}(f)$.
(c) Montrer que $\mathrm{Im}(f^2) = \mathrm{Ker}(f)$.

Dans la suite, on considère un endomorphisme g de R^3 tel que

$$g^2 \neq 0, \qquad \text{et} \qquad g^3 = 0,$$

ce qui signifie que $g \circ g$ n'est pas l'endomorphisme nul, mais que $g \circ g \circ g$ est l'endomorphisme nul. En désignant par M la matrice de g dans la base canonique $\mathbb{R}^3$ de $\mathbb{R}^3$ on a donc : $M^2 \neq 0$ et $M^3 = 0$.
On se propose de montrer, dans ce cas plus général, que $\mathrm{Im}\,(g^2) = \mathrm{Ker}\,(g)$.

(2) (a) Justifier qu'il existe un vecteur u de $\mathbb{R}^3$ tel que $g^2\,(u) \neq 0$.
(b) Montrer que $(u, g\,(u)\,, g^2\,(u))$ est une base de $\mathbb{R}^3$, que l'on notera $\mathcal{B}'$.
(c) Donner la matrice N de g dans la base $\mathcal{B}'$.
(d) Déterminer $\mathrm{Im}\,(g)$ et donner sa dimension. En déduire une base de $\mathrm{Ker}\,(g)$. Pour finir, déterminer $\mathrm{Im}\,(g^2)$ puis conclure.

Exercice 606. (D'après **EDHEC 2017**) On note E l'espace vectoriel des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à 2 et on rappelle que la famille (e_0, e_1, e_2) est une base de E, les fonctions e_0, e_1 e_2 étant définies par :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad e_0(t) = 1 \quad e_1(t) = t \quad e_2(t) = t^2$$

On considère l'application φ qui, à toute fonction P de E, associe la fonction, notée $\varphi(P)$, définie par:

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad (\varphi(P))\,(x) = \int_0^1 P(x+t)\;dt$$

(1) (a) Montrer que φ est linéaire.
(b) Déterminer $(\varphi(e_0))\,(x)$, $(\varphi(e_1))\,(x)$ et $(\varphi(e_2))\,(x)$ en fonction de x, puis écrire $\varphi(e_0)$, $\varphi(e_1)$ et $\varphi(e_2)$ comme combinaison linéaire de e_0, e_1 et e_2.
(c) Déduire des questions précédentes que φ est un endomorphisme de E.

(2) (a) Écrire la matrice A de φ dans la base (e_0, e_1, e_2). On vérifiera que la première ligne de A est:

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

(b) Justifier que φ est un automorphisme de E.

(3) Compléter les commandes `Scilab` suivantes pour que soit affichée la matrice A^n pour une valeur de n entrée par l'utilisateur :

```
n=input('n=?')
A=[.......]
disp(.....)
```

(4) (a) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, il existe un réel u_n tel que l'on ait :

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{n}{2} & u_n \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donner u_0 et établir que : $\quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{6}\,(3n+2).$
(b) En déduire, par sommation, l'expression de u_n pour tout entier n.
(c) Écrire A^n sous forme de tableau matriciel.

Exercice 607. (Inspiré par **HEC 2015**, Oral avec préparation).

(1) On considère l'application $\Phi: \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$, $P \mapsto P(X+1) - P(X-1)$.
  (a) Montrer que Φ est un endomorphisme.
  (b) Déterminer le noyau de Φ. L'endomorphisme Φ est-il bijectif?

(2) On considère maintenant l'application $T: \mathcal{C}^0(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ par

$$T(f)(x) = \int_{x-1}^{x+1} f(t)\mathrm{d}t.$$

  (a) Montrer que, pour tout $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$, $T(f) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$. En déduire que T n'est pas bijectif.
  (b) On considère maintenant l'endomorphisme induit par T sur $\mathbb{R}_n[X]$, que l'on note $\tilde{T}$. Ce dernier est-il bijectif?

Exercice 608. (Extrait du **DM 4**, Automne 2018) Soit $\alpha > 0$. On considère les fonctions f_1 et f_2, définie sur $\mathbb{R}$, par

$$f_1(x) = e^{\alpha x}, \qquad f_2(x) = xe^{\alpha x},$$

on note E l'espace vectoriel $E = \mathrm{Vect}(f_1, f_2)$ (E est donc un sous-espace vectoriel est de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$) et Δ l'endomorphisme de E défini par

$$\Delta : g \longmapsto g'.$$

(1) Vérifier que (f_1, f_2) est libre et forme bien une base de E.
(2) Quelle est la matrice, que l'on notera A, de Δ dans cette base ?
(3) L'endomorphisme Δ est-il un automorphisme?
(4) Calculer A^2 puis A^3. Conjecturer une formule pour A^n (pour $n \in \mathbb{N}^*$) que l'on démontrera par récurrence.
(5) En déduire les expression de $f_1^{(n)}(x)$ et $f_2^{(n)}(x)$.

Exercice 609. (Extrait de **DS n°4**, ECE1, Printemps 2018) On considère la matrice $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ définie par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

et l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ de $\mathbb{R}^4$ est A.

(1) Montrer, sans pivot, que A n'est pas inversible et déterminer $\mathrm{Im}(f)$.

(2) (a) Calculer A^2, A^3, A^4.
  (b) Déterminer noyau de f et préciser sa dimension.

(3) (a) Montrer que si il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ et $u \in \mathbb{R}^4$, avec $u \neq 0$ et $f(u) = \lambda u$, alors $f^4(u) = \lambda^4 u$. En déduire que $\lambda^4 = 0$ puis que $\lambda = 0$.
  (b) Existe-t-il une base de $\mathbb{R}^4$ dans laquelle la matrice de f est diagonale?

(4) On note

$$\varepsilon_1 = e_1, \quad \varepsilon_2 = f(\varepsilon_1), \quad \varepsilon_3 = f(\varepsilon_2), \quad \varepsilon_4 = f(\varepsilon_3)$$

et $\mathcal{C} = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4\}$.

  (a) Montrer que $\mathcal{C}$ est une base de $\mathbb{R}^4$.
  (b) Déterminer la matrice N de f relativement à la base $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^4$.

(5) Existe-t-il un endomorphisme bijectif g de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ tel que $g \circ f \circ g^{-1} = f^2$?

Exercice 610. (D'après **EDHEC 2019** et **CB n°3**, Automne 2019)

On considère les matrices
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
et on note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $E = \mathcal{M}_{3,1}$.

(1) (a) Déterminer $(A - I)^2$.
  (b) En déduire que A est inversible et écrire A^{-1} comme combinaison linéaire de I et A.

(2) On pose $A = N + I$.
  (a) Exprimer pour tout entier naturel n, la matrice A^n comme combinaison linéaire de I et N, puis l'écrire comme combinaison linéaire de I et A.
  (b) Vérifier que l'expression précédente est aussi valable pour $n = -1$.

(3) On pose $u_1 = (A - I)(e_1)$ et $u_2 = e_1 + e_3$.
  (a) Montrer que l'ensemble $E_1 = \{X \in E : \ (A - I)X = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de E et que (u_1, u_2) en est une base.
  (b) Montrer que la famille (u_1, u_2, e_1) est une base de $\mathbb{R}^3$.
  (c) On note T la matrice dont les colonnes sont respectivement les coordonnées de Au_1, Au_2 et Ae_1 dans la base (u_1, u_2, e_1). Expliciter T.

(4) Soit la matrice $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Vérifier que P est inversible puis que $A = PTP^{-1}$.

(5) On note $(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{1,3}, E_{2,1}, E_{2,2}, E_{2,3}, E_{3,1}, E_{3,2}, E_{3,3})$ la base canonique de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et on rappelle que, pour tout (i, j) de $[\![1, 3]\!]^2$, la matrice $E_{i,j}$ n'a que des coefficients nuls sauf celui situé à l'intersection de la i-ème ligne et de la j-ème colonne qui vaut 1.

  (a) Montrer que l'ensemble E des matrices M qui commutent avec T, c'est-à-dire des matrices vérifiant l'égalité $MT = TM$, est le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ engendré par la famille $(E_{1,1} + E_{3,3}, E_{1,2}, E_{1,3}, E_{2,2}, E_{2,3})$. Vérifier que la dimension de E est égale à 5.
  (b) Soit N une matrice quelconque de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Établir l'équivalence :
$$NA = AN \iff (P^{-1}NP)T = T(P^{-1}NP)$$
  (c) En déduire que l'ensemble F des matrices qui commutent avec A est le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ engendré par la famille :
$$(P(E_{1,1} + E_{3,3})P^{-1}, PE_{1,2}P^{-1}, PE_{1,3}P^{-1}, PE_{2,2}P^{-1}, PE_{2,3}P^{-1}).$$