ECE 2 - Année 2020-2021
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Retour sur le programme

Problèmes et exercices de synthèse

Exercice 1

Notions abordées

- Couples de v.a.d
- Simulation sous `SciLab`.

Un binôme de deux personnes nommées A et B participent à une épreuve physique. Ces deux personnes doivent grimper une corde. Une fois que l'une des deux personnes a réussi, elle doit attendre que l'autre personne en fasse de même. On considère que

- A et B disposent chacun de leur propre corde.
- A et B ont droit à autant d'essais qu'ils le souhaitent.
- Les essais sont indépendants.
- Chaque essai, qu'il soit réussi ou non, dure une minute et est réussi avec probabilité p.

On note X_1 (resp. X_2) le nombre d'essais nécessaires à A (resp. B) pour grimper la corde, et Y la variable aléatoire réelle égale à $|X_1 - X_2|$.

(1) Quelle est la loi de X_1? De X_2? Donner leur espérance et leur variance.
(2) Que représente l'événement $[Y = 0]$? Déterminer sa probabilité.
(3) Montrer que pour tout on a, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,
$$P(Y = k) = \frac{2p(1-p)^k}{2-p}.$$
(4) Écrire un programme `SciLab` permettant de simuler la variable aléatoire Y.
(5) Pour quelles valeurs de p les deux personnes s'attendront-elles en moyenne moins de 5 minutes ?

Exercice 2

Notions abordées

- Suites récurrentes
- IAF
- Séries
- `SciLab`: représentation graphique

(1) Soit f la fonction, dont la courbe dans un repère orthonormé est notée $\mathcal{C}$, définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$f(x) = \ln\left(\frac{e}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)\right).$$

(a) Dresser le tableau de variations de f.
(b) Montrer que la courbe Γ d'équation $y = \ln\left(\frac{e}{2}x\right)$ est asymptote à $\mathcal{C}$ et tracer les deux courbes sur un même graphique.
(c) Établir, pour tout réel $x \geq 1$, l'encadrement $0 \leq f'(x) < 1$. En déduire, pour $x \geq 1$, le signe de $f(x) - x$ et les positions relatives de $\mathcal{C}$ et de la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x$.

(2) On considère le programme `SciLab` suivant

```
function y=f(x)
    y=log(%e*(x+x^(-1))/2)
endfunction

x=[0.01:0.1:5]; plot2d(x, f(x))

x=[0,5]; plot2d(x,x)

u=input("u0=?")
x=[u]; y=[0];
for k=1:10
    z=f(u);
    x=[x,u];  x=[x,z];
    y=[y,z,z]; u=z;
end
plot2d(x,y)
```

Expliquer ce que fait ce programme et ce qu'il illustre.

(3) Étudier la suite définie par $u_0 \in [1; +\infty[$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

(4) (a) Justifier l'existence d'un réel $a > 1$ tel que $x \in [1; a] \Longrightarrow f'(x) \leq \frac{1}{2}$.
(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = u_n - 1$. Quelle est la nature de la série de terme général v_n?

Mini Problème 1

Notions abordées

- Variables aléatoires discrètes
- Sommes doubles
- Inégalité de Bienaymé-Tchebychev
- `SciLab`.

On lance une pièce équilibrée (la probabilité d'obtenir *Pile* et celle d'obtenir *Face* étant donc toutes les deux égales à $\frac{1}{2}$) et on note Z la variable aléatoire égale au rang du lancer où l'on obtient le premier *Pile*.

Après cette série de lancers, si Z a pris la valeur k ($k \in \mathbb{N}^*$), on remplit une urne de k boules numérotées $1, 2, ..., k$, puis on extrait au hasard une boule de cette urne.

On note X la variable aléatoire égale au numéro de la boule tirée après la procédure décrite ci-dessus.

(1) On décide de coder l'événement « obtenir un *Pile* » par 1 et l'événement « obtenir un *Face* » par 0.
On rappelle que la fonction `rand()` renvoie un réel aléatoire de $[0, 1[$ et `floor(x)` renvoie la partie entière de x.

(a) Compléter le programme suivant pour qu'il affiche la valeur prise par Z lors de la première partie de l'expérience décrite ci-dessus.

```
z  = 1
hasard= floor(.......*rand())
while hasard......
        z = ??..
        hasard = floor(....*rand( ))
end
disp(z)
```

(b) Quelle instruction faut il rajouter à ce programme pour qu'il simule l'expérience aléatoire décrite dans ce problème et affiche la valeur prise par la variable aléatoire X ?

(2) Établir la convergence de la série de terme général $\dfrac{1}{k}\left(\dfrac{1}{2}\right)^k$ ($k \in \mathbb{N}^*$).

(3) Rappeler la loi de Z ainsi que son espérance et sa variance.

(4) (a) Pour tout couple (i, k) de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, déterminer la probabilité $P_{[Z=k]}(X = i)$.

(b) En déduire que :

$$\forall i \in \mathbb{N}^*, \qquad P(X = i) = \sum_{k=i}^{+\infty} \frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k.$$

(c) On **admet**, dans cette question, que les sommes peuvent s'intervertir :

$$\sum_{i=1}^{+\infty}\sum_{k=i}^{+\infty} ... = \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{i=1}^{k} ....$$

Vérifier que

$$\sum_{i=1}^{+\infty} P(X = i) = 1.$$

(5) Montrer que, pour tout entier naturel i non nul, on a
$$iP(X=i) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{i-1}.$$
(6) En déduire que X possède une espérance.
(7) Montrer, en admettant qu'il est licite de permuter les symboles $\sum$ comme dans la question **4c)**, que $E(X) = \dfrac{3}{2}$.
(8) Montrer que X a un moment d'ordre 2.
(9) Établir alors, toujours en admettant qu'il est licite de permuter les symboles $\sum$ comme dans la question **4c)**, que
$$E(X^2) = \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{+\infty}(k+1)(2k+1)\left(\frac{1}{2}\right)^k.$$
(10) Déterminer les réels a, b et c tels que : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $(k+1)(2k+1) = ak(k-1) + bk + c$.
(11) En déduire la valeur de $E(X^2)$ et vérifier que $V(X) = \frac{11}{12}$.
(12) Écrire l'inégalité de Bienaymé-Chebychev, pour la variable X.
(13) En déduire que $P(X > 3) < \frac{11}{27}$.
(14) On se propose dans cette question de calculer $P(X=1)$, $P(X=2)$ et $P(X \geq 3)$.
 (a) Écrire explicitement en fonction de x et n la somme $\sum_{k=1}^{n} x^{k-1}$ (n désignant un entier naturel non nul et x un réel différent de 1).
 (b) En déduire que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k = \ln(2) - \int_0^{1/2}\frac{x^n}{1-x}\mathrm{d}x.$$
 (c) Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad 0 \leq \int_0^{1/2}\frac{x^n}{1-x}\mathrm{d}x \leq \left(\frac{1}{2}\right)^k.$$
 En déduire la valeur de
$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{1/2}\frac{x^n}{1-x}\mathrm{d}x.$$
 (d) Établir alors que $P(X=1) = \ln(2)$ puis donner la valeur de $P(X=2)$.
 (e) Utiliser les résultats précédents pour calculer $P(X \geq 3)$, puis donner une valeur approchée de $P(X \geq 3)$ en prenant $\ln(2) \simeq 0,7$.
 Que peut-on en déduire en ce qui concerne le majorant trouvé à la treizième question?

Mini-Problème 2

Notions abordées

- Réduction

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Étant données deux matrices A et B de $M_n(\mathbb{R})$, le but de l'exercice est de comparer le spectre des matrices AB et BA et d'étudier leur diagonalisabilité.

Partie I - Étude de deux exemples.

Dans cette partie, on considère les matrices de $M_3(\mathbb{R})$ suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(1) (a) Les matrices A et B sont-elles inversibles ?
(b) Calculer AB et BA.
(c) Justifier sans aucun calcul que les matrices AB et BA sont diagonalisables.
(d) Déterminer le spectre de la matrice BA à l'aide du pivot de gauss.
(e) Vérifier que les matrices AB et BA ont même spectre.

(2) (a) Les matrices C et D sont-elles inversibles ?
(b) Calculer CD et DC.
(c) Montrer que le polynôme $P(X) = X^3 - X^2$ est un polynôme annulateur de DC.
(d) En déduire le spectre de la matrice DC.
(e) Vérifier que les matrices CD et DC ont même spectre.
(f) Les matrices CD et DC sont-elles diagonalisables ?

Partie II - Cas général lorsque A et B sont inversibles.

Dans cette partie, on revient au cas général et on considère deux matrices A et B **inversibles** de $M_n(\mathbb{R})$.

(1) Soit λ une valeur propre de la matrice AB et X un vecteur propre associé.
(a) Montrer que la matrice AB est inversible puis en déduire, en le justifiant, que $\lambda \neq 0$.
(b) Montrer que le vecteur BX est non nul.
(c) Montrer que le vecteur BX est un vecteur propre de la matrice BA associé à la valeur propre λ.

(2) En déduire que $\text{Sp}(AB) \subset \text{Sp}(BA)$ puis conclure, sans aucun calcul supplémentaire, que les matrices AB et BA ont même spectre.

(3) *On rappelle que les matrices A et B sont inversibles.*
On va montrer dans cette question que si AB est diagonalisable alors BA est diagonalisable.
On suppose donc que AB est diagonalisable et on note $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ une base de vecteurs propres de AB.
(a) Montrer que la famille $(BX_1, BX_2, \dots, BX_n)$ est libre.
(b) En déduire, en utilisant la question 1c) de cette partie, que BA est diagonalisable.

(4) Justifier, sans aucun calcul supplémentaire, que si BA est diagonalisable alors AB est diagonalisable.

(5) On a montré dans cette partie, que lorsque les matrices A et B sont inversibles, alors $\text{Sp}(AB) = \text{Sp}(BA)$ et de plus, AB est diagonalisable si et seulement si BA est diagonalisable.
Ce résultat est-il toujours valable lorsque les matrices A et B ne sont pas inversibles ?

Exercice 3

Notions abordées

- Fonction définie par une intégrale
- Convexité
- Variables aléatoires à densité
- Simulation sous `SciLab`.

(1) On considère la fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad G(x) = \int_0^x e^{t^2} \mathrm{d}t.$$

(a) Prouver que G est une fonction impaire.
(b) Déterminer le signe de G sur $\mathbb{R}$.
(c) Montrer que

$$\forall\, x \in [0, +\infty[, \quad G(x) \geq \frac{x^3}{3}.$$

(d) En déduire la limite de $G(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$. Quelle est la limite de $G(x)$ lorsque x tend vers $-\infty$?
(e) Justifier que G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et donner, pour tout réel x, une expression de sa dérivée $G'(x)$.
(f) Construire le tableau de variations de G sur $\mathbb{R}$ en y faisant figurer les limites en $-\infty$ et $+\infty$ ainsi que la valeur en 0.
(g) Étudier la convexité de G.
(h) Donner l'allure de la courbe représentative de G en précisant la tangente en 0.

(2) On pose $K = G(1)$ et on considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0 \\ \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2K} G(x), & \text{si } x \in [0, 1] \\ 1, & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

(a) Prouver que la fonction F peut être considérée comme la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.
Pour la suite de l'exercice, on note X une variable aléatoire admettant F pour fonction de répartition.
(b) Déterminer une densité f de X.
(c) Justifier que X admet une espérance et donner une expression de $E(X)$ en fonction de K.
(d) Justifier que X admet un moment d'ordre 2 et donner une expression de $E(X^2)$ en fonction de K.

(3) On pose $Y = \dfrac{1}{\sqrt{X}}$.
(a) Justifier que la variable aléatoire Y est presque sûrement bien définie et déterminer l'ensemble $Y(\Omega)$ des valeurs prises par Y.
(b) On note F_Y la fonction de répartition de Y.
Vérifier que :

$$\forall\, x \in [1, +\infty[, \quad F_Y(x) = 1 - \frac{1}{2x^4} - \frac{1}{2K} G\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Que vaut $F_Y(x)$ lorsque x appartient à $]-\infty, 1[$?
(c) Prouver que Y est une variable aléatoire à densité.
(d) Déterminer une densité h de Y.

(e) Montrer que Y admet une espérance.
On ne cherchera pas à calculer $E(Y)$.

Mini-Problème 3

Notions abordées

- Réduction
- Fonctions de deux variables

Partie I

On considère la matrice carrée réelle d'ordre 3

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

et on note φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice est A, dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$.

(1) Déterminer le noyau et l'image de φ. En déduire que 0 est valeur propre de φ.

(2) (a) Justifier que la matrice A est diagonalisable.
(b) Vérifier que 4 et 6 sont deux valeurs propres de φ et déterminer les sous espaces propres associés.
(c) On introduit les vecteurs

$$u_1 = -e_1 + e_2 + 2e_3, \quad u_2 = e_1 + e_2, \quad \text{et} \quad u_3 = e_1 - e_2 + e_3.$$

Montrer que $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et déterminer la matrice A' de φ dans cette base.

(3) Soient α, β et γ trois nombres réels non nuls et P la matrice définie par : $P = \begin{pmatrix} -\alpha & \beta & \gamma \\ \alpha & \beta & -\gamma \\ 2\alpha & 0 & \gamma \end{pmatrix}$.
(a) Montrer en utilisant la question précédente que P est inversible.
(b) On rapelle que pour toute matrice $A = (a_{i,j})$, on appelle transposée de A, la matrice notée ${}^tA$ défnie par ${}^tA = (a_{j,i})$, c'est à dire obtenue en permutant les lignes et les colonnes de A. Calculer le produit $P \cdot {}^tP$ et en déduire l'existence de valeurs de α, β et γ telles que ${}^tP = P^{-1}$. On se placera dans cette situation dans la suite de l'exercice.
(c) Justifier que $A = P \cdot A' \cdot {}^t P$.

Partie II

Soient x, y et z trois réels, on définit les matrices colonnes et lignes respectives

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \qquad \text{et} \qquad {}^tX = (x, y, z)$$

et on pose

$$g(x, y, z) = 4x^2 + 4y^2 + 4xz - 4yz + 2z^2.$$

(4) (a) Montrer que : ${}^tX \cdot A \cdot X = g(x, y, z)$
(b) Montrer que la transposée de la matrice $({}^tP \cdot X)$ est $({}^tX \cdot P)$.

(c) En déduire que

$$g(x,y,z) = 4y'^2 + 6z'^2, \qquad \text{où on a posé} \quad {}^tP.X = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}.$$

(5) On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = g(x,y,y^2), \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

(a) Expliciter $f(x,y)$ et justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.
(b) Déterminer les points critiques de f.
(c) Former la matrice hessienne en chacun des points critiques précédents. Que peut-on conclure quant à la nature de ces points critiques?
(d) Montrer en utilisant la question **(4)(c)** que $(0,0)$ est un minimum global de f sur $\mathbb{R}^2$.
(e) Compléter le programme `SciLab` permettant d'obtenir la représentation graphique de f sur $[-4;4]^2$, que l'on pourra contempler avec admiration.

```
function z=f(x,y)
    z=...................
endfunction

x=...................
y=...................
z=feval(x,y, f)

plot3d(................)
```

Problème 1 - Extrait de EDHEC 2008

Notions abordées

- Inégalité des accroissements finis
- Intégration sur un segment. Sommes de Riemann

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t.$$

- Manipulation de factorielles. Récurrences.
- Théorème de transfert
- Loi conditionnelle

Partie 1. Résultats préliminaires

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;1]$.

(1) Montrer qu'il existe $M > 0$ tel que, pour tous $x, y \in [0;1]$,

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x-y|.$$

(2) En déduire que, pour tout entier $n \geq 1$, pour tout entier $k \in [\![0; n-1]\!]$, et pour tout réel $t \in \left[\frac{k}{n}; \frac{k+1}{n}\right]$,

$$\left| f(t) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leq M\left(t - \frac{k}{n}\right).$$

(3) En intégrant l'inégalité précédente, montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, pour tout entier $k \in [\![0; n-1]\!]$,

$$\left| \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)\mathrm{d}t - \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leq \frac{M}{2n^2}.$$

(4) En déduire que, pour tout entier $n \geq 1$,

$$\left| \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leq \frac{M}{2n}$$

puis que

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t.$$

(5) **Application.** Déterminer

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{n-1}}{n\sqrt{n}}$$

et

$$\lim_{n \to +\infty} n \left(\frac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+n)^2} \right).$$

(6) Pour tout couple (p, q) d'entiers naturels, on pose

$$I(p, q) = \int_0^1 x^p (1-x)^q \, \mathrm{d}x.$$

(a) Montrer que , pour tout couple $(p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

$$I(p, q) = \frac{q}{p+1} I(p+1, q-1).$$

(b) En déduire que, pour tout couple $(p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

$$I(p, q) = \frac{p!q!}{(p+q)!} I(p+q, 0).$$

(c) Déterminer$I(p+q, 0)$ et montrer finalement que

$$I(p, q) = \frac{p!q!}{(p+q+1)!}.$$

Partie 2. Étude d'une suite de variables aléatoires

On considère un paramètre entier $m \geq 2$ et une variable aléatoire $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(m, p)$ (où $p \in [0; 1]$).

(1) Rappeler les valeurs de l'espérance et de la variance de Y, puis à l'aide de la formule de Huygens-Kœnig, montrer que

$$E(Y(Y-1)) = m(m-1)p^2.$$

(2) On considère maintenant une première suite de variables aléatoires (U_n) telle que, pour tout $n \geq 1$, U_n suit une loi uniforme sur $\left\{0; \frac{1}{n}; ...; \frac{n-1}{n}\right\}$, c'est à dire que, pour tout $l \in [\![0; n-1]\!]$,

$$P\left(U_n = \frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n},$$

et une seconde suite de variables aléatoires (X_n) définie conditionnellement:

$$\text{Sachant que } \left(U_n = \frac{k}{n}\right), \quad X_n \hookrightarrow \mathcal{B}\left(m, \frac{k}{n}\right).$$

(a) Donner la loi de X_1.

(b) Soit $n \geq 2$. Montrer, à l'aide de la formule des probabilités totales, que, pour tout $i \in [\![0;m]\!]$,

$$P(X_n = i) = \frac{1}{n}\binom{m}{i}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^i\left(1-\frac{k}{n}\right)^{m-i}.$$

(3) Utiliser la première question pour donner, sans calcul supplémentaire, la valeur de la somme

$$\sum_{i=0}^{m} i\binom{m}{i}\left(\frac{k}{n}\right)^i\left(1-\frac{k}{n}\right)^{m-i}.$$

(4) En déduire alors que

$$E(X_n) = \frac{m(n-1)}{2n}.$$

(5) En utilisant à nouveau la première question, donner sans calcul la valeur de la somme

$$\sum_{i=0}^{m} i(i-1)\binom{m}{i}\left(\frac{k}{n}\right)^i\left(1-\frac{k}{n}\right)^{m-i}.$$

(6) En déduire que

$$E(X_n(X_n-1)) = \frac{m(m-1)(n-1)(2n-1)}{6n^2}$$

puis que

$$V(X_n) = \frac{m(m+2)(n^2-1)}{12n^2}.$$

(7) (a) En utilisant les résultats obtenus aux deux premières questions de la première partie, calculer, pour tout $i \in X_n(\Omega)$,

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{P}\left(X_n = i\right).$$

(b) En déduire que la suite (X_n) converge en loi vers une variable aléatoire X dont on précisera la loi.

(c) Vérifier que

$$\lim_{n\to+\infty} E\left(X_n\right) = E\left(X\right), \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} V(X_n) = V(X).$$

Problème 2 - D'après HEC 2015

Notions abordées

- Loi géométrique. Loi exponentielle.
- Loi du max, loi du min.
- Couples de v.a. Covariance.
- Convergence en loi.
- Intervalle de confiance.
- Estimateurs. Biais.
- `(SciLab)` Simulation de loi par inversion.

Partie I. Loi exponentielle

(1) (a) Rappeler la valeur de $I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-t}\mathrm{d}t$. Établir, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la convergence de l'intégrale
$$I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\mathrm{d}t.$$
(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. A l'aide d'une intégration par parties, établir une relation de récurrence entre I_n et I_{n-1}. En déduire la valeur de I_n en fonction de n.

Soit λ un réel strictement positif. Soient X_1 et X_2 deux variables indépendantes de même loi exponentielle de paramètre λ (d'espérance $1/\lambda$). On pose
$$Y = X_1 - X_2, \quad T = \max\left(X_1, X_2\right), \quad \text{et} \quad Z = \min\left(X_1, X_2\right).$$
(2) Justifier les relations $T + Z = X_1 + X_2$ et $T - Z = |X_1 - X_2| = |Y|$.

(3) (a) Rappeler sans démonstration les valeurs respectives de $V\left(X_1\right)$ et de $P\left(\left[X_1 \leq x\right]\right)$, pour tout réel x.
(b) Calculer $E\left(X_1 + X_2\right)$, $V\left(X_1 + X_2\right)$, $E\left(Y\right)$, $V\left(Y\right)$.

(4) Déterminer pour tout réel z, $F_Z\left(z\right)$ et $f_Z\left(z\right)$. Reconnaître la loi de Z, puis en déduire $E\left(Z\right)$ et $V\left(Z\right)$.

(5) (a) Montrer que pour tout réel t, on a
$$F_T(t) = \begin{cases} \left(1 - e^{-\lambda}\right)^2, & \text{si } t \geq 0 \\ 0, & \text{si } t < 0 \end{cases}$$
(b) Exprimer pour tout réel t, $f_T\left(t\right)$.
(c) Justifier l'existence de $E\left(T\right)$ et $V\left(T\right)$. Montrer, à l'aide de changements de variables affines, que
$$E\left(T\right) = \frac{3}{2\lambda}, \quad \text{et} \quad V\left(T\right) = \frac{5}{4\lambda^2}.$$
(6) On note r le coefficient de corrélation linéaire de Z et T. Montrer que $r = 1/\sqrt{5}$.

(7) (a) Préciser $Y\left(\Omega\right)$ et $|Y|\left(\Omega\right)$.
(b) Déterminer une densité de la variable aléatoire $-X_2$.
(c) Montrer que pour tout réel y, l'intégrale
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1}\left(t\right) f_{-X_2}\left(y - t\right)\mathrm{d}t$$
est convergente et qu'elle vaut $\frac{\lambda}{2}e^{-\lambda|y|}$. (*On distinguera deux cas* : $y \geq 0$ et $y < 0$.)
(d) Établir que la fonction $y \mapsto \frac{\lambda}{2}e^{-\lambda|y|}$ est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$; on admet que c'est une densité de la variable aléatoire Y.
(e) Déterminer pour tout y réel, $f_{|Y|}\left(y\right)$. Reconnaître la loi de $|Y| = T - Z$.

Partie II. Loi géométrique

Soient p un réel de $]0,1[$ et $q=1-p$. Soient X_1 et X_2 deux variables indépendantes de même loi géométrique de paramètre p (d'espérance $1/p$).

On pose :

$$Y=X_1-X_2, \quad T=\max\left(X_1,X_2\right), \quad \text{et} \quad Z=\min\left(X_1,X_2\right).$$

On rappelle que

$$T+Z=X_1+X_2 \quad \text{et que} \quad T-Z=\left|X_1-X_2\right|=|Y|.$$

(8) (a) Rappeler sans démonstration les valeurs respectives de $V\left(X_1\right)$ et de $P\left(\left[X_1\leq k\right]\right)$, pour tout k de $X_1\left(\Omega\right)$.
(b) Calculer $E\left(X_1+X_2\right)$, $V\left({}_1+X_2\right)$, $E\left(X_1-X_2\right)$, et $V\left(X_1-X_2\right)$.
(c) Établir la relation

$$P\left(\left[X_1=X_2\right]\right)=\frac{p}{1+q}.$$

(9) (a) Montrer que Z suit la loi géométrique de paramètre $1-q^2$. En déduire $E\left(Z\right)$, $V\left(Z\right)$ et $E\left(T\right)$.
(b) Soit $k\in\mathbb{N}^*$. Justifier l'égalité

$$\left[Z=k\right]\cup\left[T=k\right]=\left[X_1=k\right]\cup\left[X_2=k\right].$$

(c) En déduire la relation suivante

$$P\left(T=k\right)=2P\left(X_1=k\right)-P\left(Z=k\right).$$

(d) Établir la formule :

$$V\left(T\right)=\frac{q\left(2q^2+q+2\right)}{\left(1-q^2\right)^2}.$$

(10) (a) Préciser $\left(T-Z\right)\left(\Omega\right)$. Exprimer, pour tout $j\in\mathbb{N}^*$, l'évènement $\left[Z=j\right]\cap\left[Z=T\right]$ en fonction des évènements $\left[X_1=j\right]$ et $\left[X_2=j\right]$. En déduire, pour tout $j\in\mathbb{N}^*$, l'expression de $P\left(\left[Z=j\right]\cap\left[Z=T\right]\right)$.
(b) Montrer que pour tout couple $(j,l)\in\left(\mathbb{N}^*\right)^2$, on a

$$P\left(\left[Z=j\right]\cap\left[T-Z=l\right]\right)=2p^2q^{2j+l-2}.$$

(c) Montrer, en distinguant les trois cas $k=0$, $k>0$ et $k<0$, que, pour tout $k\in mathbbZ$,

$$P\left(\left[X_1-X_2=k\right]\right)=\frac{pq^{|k|}}{1+q}.$$

(d) En déduire la loi de la variable aléatoire $\left|X_1-X_2\right|$.
(e) Établir à l'aide des questions précédentes que les variables Z et $T-Z$ sont indépendantes.

(11) (a) A l'aide du résultat de la Question 10.e, calculer $\operatorname{cov}\left(Z,T\right)$. Les variables Z et T sont-elles indépendantes ?
(b) Calculer en fonction de q, le coefficient de corrélation linéaire ρ de Z et T.
(c) Déterminer la loi de probabilité du couple $\left(Z,T\right)$.
(d) Déterminer pour tout $j\in\mathbb{N}^*$, la loi de probabilité conditionnelle de T sachant l'évènement $\left[Z=j\right]$.
(e) Soit $j\in\mathbb{N}^*$. On suppose qu'il existe une variable aléatoire D_j à valeur dans $\mathbb{N}^*$, dont la loi de probabilité est la loi conditionnelle de T sachant l'évènement $\left[Z=j\right]$. Calculer $E\left(D_j\right)$.

Partie III. Convergences

Dans les questions 12 à 15, λ désigne un paramètre réel strictement positif, **inconnu**.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère un n-échantillon $(X_1, X_2, ..., X_n)$ de variables aléatoires à valeurs strictement positives, indépendantes, de même loi exponentielle de paramètre λ.

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k, \quad \text{et} \quad J_n = \lambda S_n.$$

(12) Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $E(S_n)$, $V(S_n)$, $E(J_n)$ et $V(J_n)$.

(13) On admet qu'une densité f_{J_n} de J_n est donnée par la formule

$$f_{J_n}(x) = \begin{cases} \frac{e^{-x}x^{n-1}}{(n-1)!}, & \text{si } x > 0 \\ 0, & \text{si } x \leq 0 \end{cases}.$$

(a) À l'aide du théorème de transfert, établir pour tout entier $n \geq 3$, l'existence de $E\left(\frac{1}{J_n}\right)$ et de $E\left(\frac{1}{J_n^2}\right)$, et donner leur valeurs respectives.

(b) On pose, pour tout entier $n \geq 3$,

$$\widehat{\lambda_n} = \frac{n}{S_n}.$$

Justifier que $\widehat{\lambda_n}$ est un estimateur de λ. Est-il sans biais? Calculer la limite, lorsque n tend vers $+\infty$, du risque quadratique associé à $\widehat{\lambda_n}$ en λ.

(14) Dans cette question, on veut déterminer un intervalle de confiance du paramètre λ au risque α. On note Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite, et u_α le réel strictement positif tel que

$$\Phi(u_\alpha) = 1 - \frac{\alpha}{2}.$$

(a) Enoncer le théorème de la limite centrée. En déduire que la variable aléatoire N_n définie par $N_n = \lambda \frac{S_n}{\sqrt{n}} - \sqrt{n}$ converge en loi vers la loi normale centrée réduite.

(b) En déduire que pour n assez grand, on a approximativement

$$P([-u_\alpha \leq N_n \leq u_\alpha]) = 1 - \alpha.$$

(c) Montrer que pour n assez grand, l'intervalle

$$\left[\left(1 - \frac{u_\alpha}{\sqrt{n}}\right)\widehat{\lambda_n}, \left(1 + \frac{u_\alpha}{\sqrt{n}}\right)\widehat{\lambda_n}\right]$$

est un intervalle de confiance de λ au risque α. On note λ_0 la réalisation de $\widehat{\lambda_n}$ sur le n-échantillon.

(15) Avec le n-échantillon $(X_1, X_2, ..., X_n)$, on construit un nouvel intervalle de confiance de λ au risque β ($\beta \neq \alpha$), tel que la longueur de cet intervalle soit k ($k > 1$) fois plus petite que celle obtenue avec le risque α.

(a) Justifier l'existence de la fonction réciproque Φ^{-1} de Φ. Quel est le domaine de définition de Φ^{-1} ?

(b) Établir l'égalité

$$\beta = 2\Phi\left(\frac{1}{k}\Phi^{-1}(\alpha/2)\right).$$

(c) En déduire que $\beta > \alpha$. Ce dernier résultat était-il prévisible?

Dans les questions 16 à 18, on suppose que $\lambda = 1$.

(16) On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$T_n = \max\left(X_1, X_2, ..., X_n\right).$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout réel $x \geq 0$, on pose

$$g_n(x) = \int_0^x F_{T_n}(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad h_n(x) = \int_0^x t f_{T_n}(t)\,\mathrm{d}t.$$

(a) Exprimer $h_n(x)$ en fonction de $F_n(x)$ et $g_n(x)$.
(b) Déterminer, pour tout réel t, l'expression de $F_{T_n}(t)$ en fonction de t.
Établir, pour tout entier $n \geq 2$, la relation :

$$g_{n-1}(x) - g_n(x) = \frac{1}{n} F_{T_n}(x).$$

(c) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout réel $x \geq 0$, l'expression de $g_n(x)$ en fonction de x, et de $F_{T_1}(x), F_{T_2}(x), ..., F_{T_n}(x)$.
(d) Montrer que $F_{T_n}(x) - 1$ est équivalent à $-ne^{-x}$, lorsque x tend vers $+\infty$.
(e) Déduire des questions c) et d) l'existence de $E(T_n)$ et montrer que

$$E(T_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

(17) On veut étudier dans cette question la convergence en loi de la suite de variables aléatoires (G_n) dé finie, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par

$$G_n = T_n - E(T_n).$$

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\gamma_n = -\ln n + E(T_n)$ et on admet *sans démonstration* que la suite (γ_n) est convergente; on note γ sa limite.

(a) Montrer que pour tout x réel et n assez grand, on a

$$F_{G_n}(x) = \left(1 - \frac{1}{n} e^{-(x+\gamma_n)}\right)^n.$$

(b) En déduire que, pour tout x réel, on a :

$$\lim_{n \to +\infty} F_{G_n}(x) = e^{-e^{-(x+\gamma)}}.$$

(c) Montrer que la fonction $F_G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$F_G(x) = e^{-e^{-(x+\gamma)}}$$

est la fonction de répartition d'une variable aléatoire G à densité. Conclure.

(18) (a) Soit X une variable aléatoire à densité de fonction de répartition F_X strictement croissante. Déterminer la loi de la variable alétoire Y définie par $Y = F_X(X)$.
(b) Écrire une fonction, sous `SciLab`, d'en-tête `y=Gumbel()` qui permet de simuler la variable aléatoire G. On supposera que la constante γ est déjà définie dans `SciLab` et stockée sous `gamma`. On utilisera la commande `rand()` qui permet de simuler la loi uniforme sur $]0;1[$.

Exercice 4

Notions abordées

- Continuité. Dérivabilité.
- Développements limités.
- Suite d'intégrales impropres.
- Fonction de répartition de $\mathcal{N}(0;1)$.
- Changement de variable.
- `(SciLab)`. Calcul du premier entier vérifiant une condition donnée.

Enoncé

(1) Soit N la fonction définie sur l'intervalle $[0,1[$, à valeurs réelles, telle que :

$$N(x) = x^2 - 2x - 2(1-x)\ln(1-x).$$

(a) Montrer que la fonction N est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1[$.
(b) Montrer que pour tout $x \in [0,1[$, on a : $\ln(1-x) \leq -x$.
(c) Montrer que pour tout $x \in [0,1[$, on a : $N'(x) \leq 0$.
(d) En déduire le signe de N sur l'intervalle $[0,1[$.

(2) Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0,1[$ par

$$f(x) = \begin{cases} -2\dfrac{x+\ln(1-x)}{x^2}, & \text{si } 0 < x < 1 \\ 1, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

(a) Déterminer le développement limité en 0 à l'ordre 2 de $\ln(1-x)$.
(b) En déduire $\lim_{x\to 0} f(x)$.
(c) En déduire que la fonction f est continue sur $[0,1[$.
(d) Montrer que f est dérivable sur $]0,1[$ et que pour tout $x \in]0,1[$, on a : $f'(x) = -2\dfrac{N(x)}{x^3(1-x)}$.
(e) Dresser le tableau de variation de la fonction f sur $[0,1[$.
En déduire que f réalise une bijection strictement croissante de $[0,1[$ dans $[1,+\infty[$.

(3) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in [0,1[$:

$$g_n(x) = \exp\left(-\frac{nx^2}{2}f(x)\right).$$

(a) Montrer, à l'aide de la question 2e, que pour tout $x \in [0,1[$, on a :

$$0 \leq g_n(x) \leq \exp\left(-\frac{nx^2}{2}\right).$$

(b) En déduire la convergence de l'intégrale $\int_0^1 g_n(x)\,\mathrm{d}x$. On pose alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$I_n = \int_0^1 g_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

(c) Montrer que pour tout $x \in [0,1[$,

$$\frac{g_{n+1}(x)}{g_n(x)} \leq 1.$$

(d) En déduire que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.
(e) On note φ une densité et Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.
Rappeler la formule définissant φ puis dresser le tableau de variation complet de Φ sur $\mathbb{R}$ en précisant la valeur de $\Phi(0)$.

(f) Montrer l'encadrement :

$$0 \leq I_n \leq \sqrt{\frac{2\pi}{n}} \left(\Phi\left(\sqrt{n}\right) - \frac{1}{2} \right).$$

On pourra utiliser la question 3a puis effectuer le changement de variable $u = x\sqrt{n}$.

(g) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$0 \leq I_n \leq \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

(h) Écrire un programme en `SciLab` qui détermine une valeur de n pour laquelle $I_n \leq 10^{-1}$.

(i) Déterminer à présent par le calcul une valeur de n pour laquelle $I_n \leq 10^{-1}$. *On donne* $50\pi \approx 157.08$.

Exercice 5 - D'après HEC 2003

Notions abordées

- Valeurs propres.
- Matrices aléatoires.
- Covariance.

Enoncé

(1) Soit a et b deux réels strictement positifs et A la matrice carré d'ordre 2 définie par : $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$.

(a) Montrer que si a et b sont égaux, la matrice A n'est pas inversible.

(b) Calculer la matrice $A^2 - 2aA$. En déduire que, si a et b sont distincts, la matrice A est inversible et donner la matrice A^{-1}.

(c) Montrer que les valeurs propres de A sont $a+b$ et $a-b$.

(d) On pose

$$\Delta = \begin{pmatrix} a+b & 0 \\ 0 & a-b \end{pmatrix}.$$

Déterminer une matrice Q, carrée d'ordre 2 à coefficients réels, inversible et dont les éléments de la première ligne sont égaux à 1, vérifiant $A = Q\Delta Q^{-1}$.

(e) Calculer la matrice Q^{-1} et, à l'aide de la question précédente, calculer la matrice A^n pour tout entier naturel non nul n.

(2) Soit p un réel vérifiant $0 < p < 1$ et q le réel $1-p$. On suppose que X et Y sont deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes et suivant la même loi géométrique de paramètre p.

Pour tout ω de Ω, on désigne par $M(\omega)$ la matrice carrée d'ordre 2

$$M(\omega) = \begin{pmatrix} X(\omega) & Y(\omega) \\ Y(\omega) & X(\omega) \end{pmatrix}$$

et on note $S(\omega)$ (respectivement $D(\omega)$) la plus grande (respectivement la plus petite) valeur propre de $M(\omega)$ et on définit ainsi deux variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

(a) Montrer que la probabilité de l'événement $[X = Y]$ est donnée par: $P([X = Y]) = \dfrac{p}{2-p}$ et en déduire la probabilité de l'événement $\{\omega \in \Omega \ ; \ M(\omega) \text{ est inversible}\}$.

(b) Calculer la covariance des variables aléatoires S et D.

(c) Calculer les probabilités $P([S = 2] \cap [D = 0])$, $\mathbf{P}([S = 2])$ et $P([D = 0])$.
Les variables aléatoires S et D sont-elles indépendantes ?

(d) Établir, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2

$$P([S = n]) = (n-1)p^2q^{n-2}.$$

(e) En déduire, lorsque p est égal à $\frac{2}{21}$, que la valeur la plus probable de la plus grande valeur propre des matrices $M(\omega)$ possibles est 11.

Problème 3 - D'après HEC 2007

Notions abordées

- Espace vectoriel de polynômes
- Coordonnées dans une base

Notations

On **rappelle** les résultats suivants :

- Toute famille de polynôme de degrés échelonnés est libre.
- Tout polynôme admettant une infinité de racines est le polynôme nul.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note Δ_n l'application qui à tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ associe le polynôme

$$\Delta_n(P) = P(X+1) - P(X).$$

On pose

$$P_0 = 1, \quad P_1 = X, \quad P_2 = \frac{1}{2}X(X-1) \quad \text{et} \quad \forall k \in [\![3; n]\!], \quad P_k = \frac{1}{k!}X(X-1)\dots(X-k+1).$$

Partie I : Étude de Δ_n.

(1) Justifier que Δ_n est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

(2) (a) Montrer que $(P_0, \dots, P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

(b) Vérifier que :

$$\Delta_n(P_0) = 0 \quad \text{et} \quad \forall k \in [\![1; n]\!], \quad \Delta_n(P_k) = P_{k-1}.$$

(c) En déduire que $\operatorname{Im}(\Delta_n) = \mathbb{R}_{n-1}[X]$ puis préciser $\operatorname{rg}(\Delta_n)$.

(d) En déduire que $\operatorname{Ker}(\Delta_n)$ est l'ensemble $\mathbb{R}_0[X]$ des polynômes constants.

(e) L'application Δ_n est-elle un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$?

(3) Dans le cas particulier où $n = 3$, écrire la matrice M de Δ_3 relativement à la base (P_0, P_1, P_2, P_3).

Partie II : Coordonnées d'un polynôme dans la base $(P_0, \dots, P_n)$.

Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, on rappelle que

$$\Delta_n^i = \underbrace{\Delta_n \circ \dots \circ \Delta_n}_{i \text{ fois}}.$$

(1) Soit $k \in [\![1; n]\!]$ et $i \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$\Delta_n^i(P_k) = \begin{cases} P_{k-i} & \text{si } i \leq k, \\ 0 & \text{si } i > k. \end{cases}.$$

(2) Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$.

(a) Justifier qu'il existe des réels $(a_0, a_1, \dots, a_n)$ tels que $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k P_k(X)$.

(b) En déduire que pour tout $i \in [\![1; n]\!]$

$$\Delta_n^i(P)(X) = \sum_{k=0}^{n-i} a_{k+i} P_k(X).$$

(c) En évaluant l'expression précédente en 0, montrer alors que

$$P(X) = \sum_{i=0}^{n} \Delta_n^i(P)(0) P_i(X).$$

Partie III : Généralisation à $\mathbb{R}[X]$.

On note Δ l'endomorphisme qui à tout polynôme P de $\mathbb{R}[X]$ associe le polynôme $\Delta(P) = P(X+1) - P(X)$.

(1) Soit $P \in \text{Ker}(\Delta)$.
   (a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P(k) = P(0)$.
   (b) En considérant le polynôme, $Q(X) = P(X) - P(0)$, en déduire que $\text{Ker}(\Delta)$ est l'ensemble $\mathbb{R}_0[X]$ des polynômes constants.

(2) Montrer que Δ est surjectif. *On pourra utiliser la question 2c de la partie I*

Problème 4*** - Inspiré de HEC 2004 S et Annales ESCP

Notions abordées

- Lois normales
- Lois discrètes à valeurs dans $\mathbb{Z}$
- Changement de variables.
- IAF
- Convexité
- Inégalité de Markov
- Diagonalisation

Notations

L'objet de ce problème est l'étude de diverses propriétés des lois normales. Toutes les variables utilisées sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

On dit qu?une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{Z}$ admet une espérance si et seulement si **les** séries de terme général $nP(X=n)$ et $nP(X=-n)$ convergent et dans ce cas

$$E(X) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} kP(X=k) - \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} kP(X=-k).$$

On admet que les formules de calcul de covariance d'un couple de variables à densité sont identiques à celles d'un couple de variables discrètes.

On considère que la variable nulle suit une loi normale. On dit qu'une variable est **gaussienne** si elle suit une loi normale.

On dit qu'un vecteur $(X_1, X_2, ..., X_n)$ de variables aléatoires est **gaussien** si pour tout $(a_1, a_2, ..., a_n)$ réels, la variable $a_1X_1 + a_2X_2 + ... + a_nX_n$ suit une loi normale.

On pourra utiliser sans la démontrer la propriété suivante :
Si X et Y sont deux variables à densité indépendantes et de densités respectives f et g bornées alors $X+Y$ est une variable à densité, dont une densité h est donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)\mathrm{d}t.$$

Partie I - Stabilité par la somme

On rappelle l'expression de la densité d'une variable gaussienne de moyenne m et de variance σ^2

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f_{m,\sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right).$$

(1) Montrer que $f_{0,\sigma}$ est une fonction bornée sur $\mathbb{R}$.

(2) Soit a un réel strictement positif et b et c deux réels quelconques. Trouver trois réels α, m et σ, en fonction de a, b et c tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \frac{(x-m)^2}{2\sigma^2} + \alpha = ax^2 + bx + c.$$

(3) En déduire que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-(ax^2+bx+c))\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp\left(\frac{b^2-4ac}{4a}\right).$$

(4) Démontrer que $\forall a > 0$, $\forall b \in \mathbb{R}$, les assertions suivantes sont équivalentes :
- X suit la loi normale de paramètres m, σ^2 ;
- $aX + b$ suit la loi normale de paramètres $am + b, a^2\sigma^2$.

(5) Soient G et $G?$ deux variables aléatoires gaussiennes, indépendantes, centrées réduites. Montrer que $G+G?$ est une variable à densité dont on déterminera une densité h. En déduire que $G+G?$ est une variable gaussienne dont on donnera l'espérance et la variance.

(6) Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires gaussiennes indépendantes, d'espérances respectives m_1 et m_2 et de variances respectives σ_1^2 et σ_2^2. Déduire de la question précédente que $X_1 + X_2$ suit une loi normale dont on précisera les paramètres.

Partie II - Partie entière et partie décimale d'une variable gaussienne

Soit T une variable gaussienne centrée réduite, on pose $X = \lfloor T \rfloor$ et $Y = T - X$.

(6) Préciser $X(\Omega)$ et déterminer la loi de X en fonction de la fonction de répartition Φ de la loi normale centrée réduite.
(7) Montrer que $\forall k \in \mathbb{Z}$, $P(X = -k) = P(X = k - 1)$.
(8) Montrer à l?aide de l?inégalité des accroissements finis que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad \Phi(k+1) - \Phi(k) \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-k/2}.$$

(9) En déduire que $E(X)$ existe.
(10) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{n} k(P(X = k) - P(X = -k)) = n(\Phi(n+1) - \Phi(n)) + \Phi(0) - \Phi(n).$$

En déduire la valeur de $E(X)$.
(11) Préciser $Y(\Omega)$ et déterminer $E(Y)$.
(12) Montrer que la fonction de répartition F_y de Y vérifie la relation :

$$\forall y \in [0, 1[, \qquad F_Y(y) = \Phi(y) - \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} (\Phi(k + y) - \Phi(k - y)).$$

(13) Déterminer $F_Y\left(\frac{1}{2}\right)$. Que peut-on en déduire?
(14) Comparer $P([X = 0] \cap [Y \leq \frac{1}{2}]$ et $P(X = 0)P(Y \leq \frac{1}{2})$.

(On donne $\Phi(\frac{1}{2}) \simeq 0.6915$ et $\Phi(1) \simeq 0.8413$.)

Partie III - Variables sous-gaussiennes

Pour $\alpha > 0$, on dit qu'une variable X est α-sous-gaussienne si pour tout t réel,

$$E(e^{tX}) \leq e^{\alpha^2 t^2/2}.$$

(15) À l?aide d?un changement de variable, calculer pour tout réel t,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{tx - x^2/2} \mathrm{d}x.$$

En déduire que si X est une variable gaussienne centrée réduite, X est 1-sous-gaussienne.
(16) Montrer que $\forall p \geq 1$, $2^p p! \leq (2p)!$

(17) En déduire que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \sum_{n=0}^{N} \frac{t^n}{n!} + \sum_{n=0}^{N} \frac{(-t)^n}{n!} \leq 2 \sum_{n=0}^{\lfloor N/2 \rfloor} \frac{t^{2n}}{2^n n!}$$

puis que

$$\frac{e^t + e^{-t}}{2} \leq e^{t^2/2}.$$

(18) Soit t un réel et $x \in [-1, 1]$.
En utilisant la convexité de la fonction exponentielle sur l?intervalle d?extrémités t et $-t$, montrer que

$$e^{tx} \leq \frac{1+x}{2} e^t + \frac{1-x}{2} e^{-t}.$$

(19) Soient X_1, X_2,...,X_n des variables indépendantes, α-sous-gaussiennes et $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n$ des réels tels que

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_i^2 = 1.$$

Montrer que $\sum_{i=1}^{n} \mu_i X_i$ est α-sous-gaussienne.

(20) Soit X une variable α-sous-gaussienne et $\lambda > 0$.

(a) En utilisant l'inégalité de Markov, montrer que $\forall t > 0$, on a :

$$P(X \geq \lambda) \leq \exp\left(\frac{\alpha^2 t^2}{2} - t\lambda\right).$$

(b) En déduire que

$$P(|X| \geq \lambda) \leq 2\exp\left(\frac{\alpha^2 t^2}{2} - t\lambda\right).$$

(c) Étudier la fonction $t \mapsto \frac{\alpha^2 t^2}{2} - t\lambda$ et montrer que $\forall \lambda > 0$,

$$P(|X| \geq \lambda) \leq 2\exp\left(-\frac{\lambda^2}{2\alpha^2}\right).$$

Partie IV - Vecteurs gaussiens

(21) Soit $(X_1, X_2, ..., X_n)$ un vecteur gaussien. Montrer que chaque variable X_i suit une loi normale.
(22) À l'aide de la **Partie I**, montrer par récurrence que si X_1, X_2,...,X_n sont des variables aléatoires indépendantes suivant des lois normales, alors le vecteur $(X_1, X_2, ..., X_n)$ est gaussien.

(23) Dans cette question X suit la loi normale centrée réduite, et Y, indépendante de X, suit la loi discrète définie par $P(Y = 1) = P(Y = -1) = \frac{1}{2}$.
(a) Déterminer la loi de XY.
(b) Le vecteur (X, XY) est-il gaussien? On pourra calculer $P(X + XY = 0)$.

Soit $X_1, X_2, ..., X_n$ n variables aléatoires admettant chacune une variance, on appelle **matrice de variance/covariance** et on note $M(X_1, X_2, ..., X_n)$ la matrice de $M_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients $a_{i,j}$ sont donnés par

$$\forall (i,j) \in [\![1; n]\!]^2, \qquad a_{i,j} = \text{cov}(X_i, X_j).$$

On appelle **vecteur espérance** et on note $E\left(\begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}\right)$ la matrice colonne de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ dont les coefficients a_i sont donnés par

$$\forall i \in [\![1; n]\!], \qquad a_i = E(X_i).$$

(24) Justifier que $M(X_1, X_2, ..., X_n)$ est diagonalisable.
(25) Dans cette question (X, Y, Z) est un vecteur gaussien tel que

$$M(X,Y,Z) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 6 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{et} \qquad E\left(\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(a) Déterminer la loi de $U = X + Y$ et celle de $V = X + Z$.
(b) Écrire la matrice de variance/covariance $M(U, V)$.
(c) Déterminer une matrice P inversible de $M_2(\mathbb{R})$ et une matrice D diagonale de $M_2(\mathbb{R})$ telle que $M(U, V) = PDP^{-1}$.
(d) Montrer que les variables U? et V? définies par

$$\begin{pmatrix} U' \\ V' \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}$$

sont non corrélées.

Exercice 6

Notions abordées

- Fonction définie par une intégrale (impropre)
- Convergence en loi

Exercice 6

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{e^{-|x|}}{2}.$$

(1) (a) Montrer que f peut être considérée comme une densité de probabilité. On note X une variable aléatoire ayant f pour densité.
(b) Montrer que X admet une espérance et en préciser la valeur.
(c) Expliciter la fonction de répartition F de X.

On pose alors, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction

$$H_n(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\left(1 + te^{-n|t|}\right) \mathrm{d}t.$$

(2) (a) Montrer que H_n est bien définie (c'est à dire que l'intégrale est convergente pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$).
(b)

Problème 5

Notions abordées

- Intégrales (impropres) et récurrences
- Estimation ponctuelle sous `SciLab` (Méthode de Monte-Carlo, Loi faible des grands nombres)
- Formule de Taylor
- Couples de v.a.d

On définit, pour $x \in \mathbb{R}$, la fonction I par
$$I(x) = \int_0^1 \frac{e^{xt} + e^{-xt}}{\sqrt{1-t^2}} \mathrm{d}t.$$

Partie I - Résultats préliminaires

(1) À l'aide du changement de variable $u = 1 - t$, réalisé **scrupuleusement**, montrer, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la convergence de l'intégrale
$$W_k = \int_0^1 \frac{t^k}{\sqrt{1-t^2}} \mathrm{d}t.$$

(2) On considère le programme suivant et son exécution

```
 function y=f(t)
    y=1/sqrt(1-t^2)
endfunction

U=grand(1, 10000, 'unf', 0, 1)
disp(mean(feval(U, f)))


--> 1.5725086
```

Comment interpréter ce résultat? Justifier.

(3) (a) Soit $k \in \mathbb{N}$. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que
$$W_k - W_{k+2} = \frac{1}{k+1} W_{k+2}.$$
(b) On **admet** que $W_0 = \frac{\pi}{2}$. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$,
$$W_{2k} = \frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2} \times \frac{\pi}{2}.$$

(4) (a) Montrer que la fonction I est bien définie sur $\mathbb{R}$ et étudier sa parité.
(b) Donner la valeur de $I(0)$.

Partie II - Une inégalité de Taylor-Lagrange

Les résultats de cette partie sont indépendants de la partie précédente mais sont utiles pour la suivante et peuvent donc, en cas de difficulté, être admis pour la Partie III.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère une fonction f de classe $\mathcal{C}^{n+1}$, sur $[0; +\infty[$.

(5) Soit $x > 0$. Montrer, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, que
$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \int_0^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x-t)^n \mathrm{d}t,$$
où $f^{(k)}$ désigne la dérivée $k-$ième de f.

(6) En déduire l'*inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre n pour f en x*
$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \right| \leq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} M,$$

où on a posé
$$M = \max_{t\in[0;x]} \left| f^{(n+1)}(t) \right|.$$

Partie III - Une autre formule pour $I(x)$

Dans cette partie, on pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = e^x + e^{-x}$.

(7) Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$f^{(k)}(x) = e^x + (-1)^k e^{-x}.$$

(8) Soit $u > 0$ fixé.

(a) (i) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $t \in [0; u]$,
$$f^{(2n+1)}(0) \leq f^{(2n+1)}(t) \leq f^{(2n+1)}(u).$$

(ii) En déduire que
$$\max_{t\in[0;u]} \left| f^{(2n+1)}(t) \right| = \left| e^u - e^{-u} \right| = e^u - e^{-u}.$$

(b) En découpant la somme ci-dessous selon la parité de l'indice k, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\sum_{k=0}^{2n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} u^k = \sum_{j=0}^{n} \frac{2}{(2j)!} u^{2j}.$$

(c) En appliquant l'inégalité obtenue à la question 6 à l'ordre $2n$ la fonction f en u et à l'aide de la question précédente, montrer que
$$\left| e^u + e^{-u} - \sum_{k=0}^{n} \frac{2}{(2k)!} u^{2k} \right| \leq \frac{u^{2n+1}}{(2n+1)!} \left(e^u - e^{-u} \right).$$

(d) En déduire que, pour tous $x > 0$ et $t \in [0; 1]$,
$$\left| e^{xt} + e^{-xt} - \sum_{k=0}^{n} \frac{2(xt)^{2k}}{(2k)!} \right| \leq \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} e^x.$$

(9) (a) À l'aide de la question précédente, montrer que, pour tous $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}$,
$$\left| I(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{2x^{2k}}{(2k)!} W_{2k} \right| \leq \frac{x^{2n+1}\pi}{2(2n+1)!} e^x.$$

(b) En déduire la convergence de la série $\displaystyle\sum_{k\geq 0} \frac{x^{2k}}{2^{2k}(k!)^2}$ et que l'on a
$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k}}{2^{2k}(k!)^2} = \frac{1}{\pi} I(x).$$

Partie IV - Une application

Dans cette dernière partie, on considère deux variables aléatoires X et Y indépendantes de même loi de Poisson de paramètre λ (avec $\lambda > 0$).

(10) Montrer que
$$P(X = Y) = e^{-2\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{2k}}{(k!)^2}.$$

(11) En déduire que

$$I(2\lambda) = \pi e^{2\lambda} P(X = Y).$$

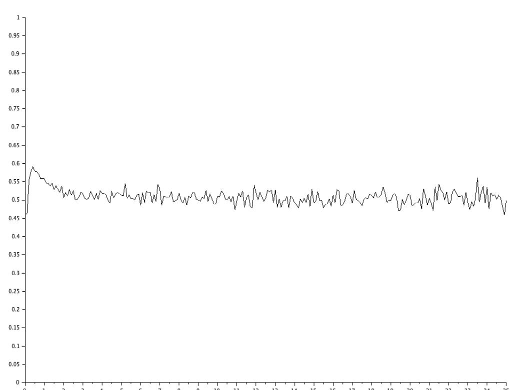
(12) **Informatique**

(a) Compléter le programme `SciLab` pour qu'il donne une estimation de $P(X = Y)$. On expliquera sur quelle idée et résultat du cours repose ce programme.

```
function p = estimation(lambda)
N = 10000
X = grand(1, N, 'poi', lambda)
Y = grand(1, N, 'poi', lambda)
n= 0
for i = 1:N
    if ..................... then
        n=.......................
   end
end
p = n/N
endfunction
```

(b) On complète la fonction suivant par le script suivant qui permet d'afficher la figure ci-après.

```
L=0.1:.1:25
Y=sqrt(%pi*L).*feval(L, estimation)
plot2d(L, Y)
```



(i) Que représente cette figure?

(ii) Émettre alors une conjecture pour un équivalent de $P(X = Y)$ lorsque $\lambda \to +\infty$.

(iii) En déduire une autre conjecture pour un équivalent de $I(x)$ lorsque $x \to +\infty$.