ECE 2 - Année 2020-2021
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Interrogation écrite n°1

Octobre 2020
Durée : 1 heure et 30 minutes

Exercice 1

(1) Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\ln(n)}{n^2+1}$.

(2) Compléter les instructions `SciLab` suivantes afin que leur exécution permette de représenter graphiquement les 100 premières sommes partielles de cette série.

```
function s=S(n)
    N=1:n
    p=log(N)
    q=(N.^2+1).^(-1)
    s=...........(p.*q)
endfunction
plot2d(.........., S(100), -1)
```

Exercice 2

(1) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation

$$(E_n) \quad x^n + x^2 + 4x - 3 = 0$$

a une unique solution x_n sur $\mathbb{R}_+$. (On pourra introduire la fonction $f_n : x \mapsto x^n + x^2 + 4x - 3$.)

(2) Vérifier que $0 < x_n < 3/4$. En déduire que $x_n^n \to 0$.

(3) Montrer que (x_n) est croissante. On pourra commencer par montrer que

$$f_{n+1}(x) - f_n(x) = x^n(x-1).$$

(4) En déduire qu'elle converge et préciser sa limite.

Exercice 3

On considère les matrices $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et on note f l'application

$$f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \quad M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto f(M) = \frac{a+d}{2} I + \frac{b+c}{2} J.$$

(1) Calculer $f(I)$ et $f(J)$.
(2) Montrer que f est un endomorphisme.
(3) Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f)$. L'endomorphisme f est-il injectif?
(4) En déduire le rang de f puis une base de l'image de f.