ECE 2 - Année 2020-2021
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Interrogation écrite n°1

Octobre 2020
Solution

Exercice 1

(1) Commençons par observer qu'il s'agit d'une série à termes positifs, on peut donc envisager l'utilisation d'un critère de comparaison. L'idée qui vient en premier serait de voir si le terme général ne serait pas négligeable devant $1/n^2$ mais ce n'est hélas pas le cas; en multipliant par n^2, le log du numérateur va tendre vers $+\infty$. Il faut donc être un peu plus fin et choisir du $1/n^\alpha$ avec $\alpha > 1$ pour garantir la convergence de la série par critère de Riemann mais il faut que $2-\alpha > 0$ pour écraser le log par croissance comparée. Prenons donc $\alpha = 3/2$.

$$n^{3/2} \times \frac{\ln(n)}{n^2+1} \sim \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}} \longrightarrow 0, \; n \to +\infty$$

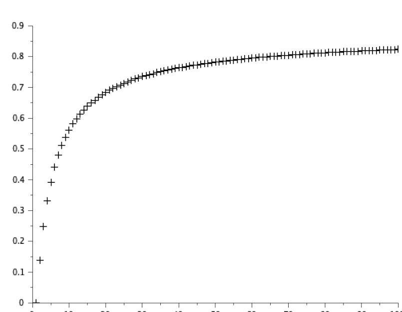
par croissance comparée. Ainsi,

$$\frac{\ln(n)}{n^2+1} = o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right).$$

Par critère de négligeabilité et critère de Riemann, on peut donc affirmer que la série est convergente.

(2) On utilise la commande `cumsum( )` qui permet d'obtenir la suite des sommes partielles de la série à partir du terme général dont la liste des termes est obtenue par opération pointée.

```
function s=S(n)
    N=1:n
    p=log(N)
    q=(N.^2+1).^(-1)
    s=cumsum(p.*q)
endfunction
plot2d(1:100, S(100), -1)
```



Exercice 2

(1) On introduit donc la fonction $f_n : \ x \mapsto x^n + x^2 + 4x - 3$. Celle-ci étant polynomiale, elle est (continue et) dérivable sur $\mathbb{R}$ donc en particulier sur $\mathbb{R}_+$. On a

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \qquad f_n'(x) = nx^{n-1} + 2x + 4 \geq 4 > 0$$

donc f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. Comme $f_n(0) = -3$, que $f_n(x) \to +\infty, x \to +\infty$, le théorème de bijection (qui s'applique car f_n est strictement croissante et continue) permet d'affirmer que f_n réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $]-3;+\infty[$. En particulier, $0 \in]-3;+\infty[$ admet un unique antécédent par f_n noté x_n et unique solution positive de (E_n).

x	0	x_n	$+\infty$
$f_n'(x)$		$+$	
f_n	-3	$\nearrow$ 0 $\nearrow$	$+\infty$

(2) On compare les images.

$$f_n(0) = -3 < 0 = f_n(x_n) < \left(\frac{3}{4}\right)^n + \frac{9}{16} = f_n\left(\frac{3}{4}\right).$$

Par stricte croissante et bijectivité de f_n, on a bien

$$0 < x_n < \frac{3}{4}.$$

Mais ceci permet aussi d'écrire,

$$0 < x_n^n < \left(\frac{3}{4}\right)^n.$$

Et comme $(3/4)^n \to 0$, le théorème des gendarmes nous dit que $x_n^n \to 0, \ n \to +\infty$.

(3) Soit $x \geq 0$.

$$f_{n+1}(x) - f_n(x) = x^{n+1} + x^2 + 4x - 3 - \left(x^n + x^2 + 4x - 3\right) = x^{n+1} - x^n = x^n(x-1).$$

En particulier,

$$f_{n+1}(x_n) - f_n(x_n) = x_n^n(x_n - 1) < 0$$

car $0 < x_n < 3/4 < 1$. Ainsi,

$$f_{n+1}(x_n) < f_n(x_n) = 0 = f_{n+1}(x_{n+1}).$$

Par stricte croissante et bijectivité de f_{n+1},

$$x_n < x_{n+1}$$

et la suite (x_n) est croissante.

(4) Comme la suite (x_n) est croissante et majorée (par $3/4$), le théorème de convergence monotone permet d'affirmer qu'elle converge vers une certaine limite ℓ, qui vérifie $0 \leq \ell \leq 3/4$. Comme

$$x_n^n + x_n^2 + 4x_n - 3 = 0,$$

que $x_n^n \to 0$, le passage à la limite dans la relation ci-dessus donne

$$\ell^2 + 4\ell - 3 = 0$$

équation qu'on résout et qui donne (car $\ell \geq 0$)

$$\ell = -2 + \sqrt{7} \simeq 0.646.$$

Exercice 3

On considère les matrices $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et on note f l'application

$$f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \quad M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto f(M) = \frac{a+d}{2} I + \frac{b+c}{2} J.$$

(1) Il découle de la définition que

$$f(I) = I \qquad \text{et} \qquad f(J) = J.$$

(2) La combinaison linéaire de matrices 2×2 étant encore une matrice 2×2, les images de f sont bien dans $\mathcal{M}_2$. Il reste à voir que f est bien linéaire. Soient

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \qquad N = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

On voit que

$$\begin{aligned} f(M + \lambda N) &= f\left(\begin{pmatrix} a + \lambda x & b + \lambda y \\ c + \lambda z & d + \lambda t \end{pmatrix}\right) \\ &= \frac{a + \lambda x + d + \lambda t}{2} I + \frac{b + \lambda y + c + \lambda z}{2} J \\ &= \frac{a+d}{2} I + \frac{b+c}{2} J + \lambda \left(\frac{x+t}{2} I + \frac{y+z}{2} J \right) \\ &= f(M) + \lambda f(N) \end{aligned}$$

et f est bien un endomorphisme de $\mathcal{M}_2$.

(3) On résout!

$$\begin{aligned} M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker}(f) &\iff f(M) = 0 \\ &\iff \begin{pmatrix} \frac{a+d}{2} & \frac{b+c}{2} \\ \frac{b+c}{2} & \frac{a+d}{2} \end{pmatrix} = 0 \\ &\iff \begin{cases} a + d = 0 \\ b + c = 0 \end{cases} \\ &\iff M = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & -a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Il suit que

$$\operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right).$$

La famille génératrice ci-dessus est composée de deux matrices non colinéaires, elle forme donc une base du noyau de f. Celui-ci n'étant pas réduit à la matrice nulle, l'endomorphisme n'est pas injectif (ni surjectif, ni bijectif).

(4) La base trouvée à la question précédente permet d'affirmer que $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 2$. Par le théorème du rang, il suit que

$$\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathcal{M}_2) - \dim(\mathrm{Ker}(f)) = 4 - 2 = 2.$$

Mais comme $f(I) = I$ et $f(J) = J$, les matrices I et J sont dans l'image de f. Elles sont non colinéaires et engendrent donc un sous-espace de l'image de dimension 2. Comme l'image est elle-même de dimension 2, (I, J) forme finalement une base de l'image de f.

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(I,\ J).$$