ECE 2 - Année 2020-2021
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Interrogation écrite n°2

Janvier 2021
Durée : 1 heure

Question de cours

Écrire sous la forme d'une intégrale la probabilité qu'une variable aléatoire X suivant une loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$ appartienne à un segment $[a;b]$.

Exercice 1

Déterminer le spectre de la matrice A ci-dessous. Est-elle inversible? Est-elle diagonalisable?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Exercice 2

On considère l'endomorphisme f de $\mathcal{M}_{3,1}$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est donnée par

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(1) Expliciter $\mathrm{Im}(f)$ et préciser le rang de f.
(2) Donner sans calcul une valeur propre de B et expliciter, toujours sans calcul, une base du sous-espace propre associé. L'endomorphisme f est-il un automorphisme?
(3) Vérifier que $B\left(B^2 - 2B - 8I\right) = 0$. En déduire deux autres valeurs propres possibles pour B.
(4) Vérifier que les deux valeurs précédentes sont bien des valeurs de B que B est diagonalisable.
(5) Expliciter une matrice P inversible, dont la première ligne ne contient que des 1 et une matrice D diagonale telles que
$$B = PDP^{-1}.$$
(6) Montrer par récurrence que, pour tout $n \geq 1$, $B^n = PD^nP^{-1}$.