Interrogation écrite n°2

Janvier 2021
Durée : 1 heure

Question de cours

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$. Alors, par définition de la densité de la loi normale centrée réduite

$$P(a \leq X \leq b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-t^2/2} \mathrm{d}t.$$

Exercice 1

La matrice A donnée est triangulaire supérieure. Ainsi, ses valeurs propres **sont** ses coefficients diagonaux. On peut alors écrire que

$$\mathrm{Sp}(A) = \{1, 2, 3, 4\}.$$

Si on peut tout de suite conclure que A est inversible (car 0 n'est pas valeur propre), on a besoin de connaître les dimensions des sous-espaces propres. On observe alors facilement que

$$\mathrm{rg}(A - I) = \mathrm{rg}(A - 2I) = \mathrm{rg}(A - 3I) = \mathrm{rg}(A - 4I) = 4$$

donc, par le théorème du rang,

$$\dim(E_1) = \dim(E_2) = \dim(E_3) = \dim(E_4) = 5 - 4 = 1,$$

et $1 + 1 + 1 + 1 = 4 \neq 5$. Donc A n'est pas diagonalisable.

Exercice 2

On considère l'endomorphisme f de $\mathcal{M}_{3,1}$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est donnée par

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(1) L'image de f est engendrée par les colonnes de B. Celle-ci ayant deux premières colonnes non colinéaires et une troisieme égale à la première, on peut écrire

$$\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}0\\4\\0\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\right)$$

et $\operatorname{rg}(f) = 2$.

(2) Par le théorème du rang, on peut déduire que $\dim(\operatorname{Ker}(f)) = 3 - 2 = 1$. En particulier, 0 est valeur propre de f est le sous-espace propre associé est de dimension 1. Comme la première et la troisième colonne de B sont égales on a $f(e_1) = f(e_3)$ ou encore $f(e_1 - e_3) = 0$ et $e_1 - e_3$ est dans le noyau de f et en forme donc une base car celui-ci est de dimension 1

$$E_0 = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right).$$

De plus, 0 étant valeur propre, f n'est pas bijectif et ce n'est donc pas un automorphisme.

(3) Le calcul donne bien $B\left(B^2 - 2B - 8I\right) = 0$. On en déduit que le polynôme $P(X) = X(X^2 - 2X - 8)$ annule B. Ainsi les valeurs propres de B sont à chercher parmi les racines de P c'est à dire

$$\operatorname{Sp}(B) \subset \{0; -2, 4\}.$$

(4) On sait déjà que 0 est bien valeur propre; on vérifie donc pour -2 et pour 4.

- Pour $\lambda = -2$. On a

$$\begin{aligned} BX = -2X &\iff \left\{\begin{array}{rcl} 2x + y &=& 0\\ 4x + 4y + 4z &=& 0\\ y + 2z &=& 0\end{array}\right.\\ &\iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& z\\ y &=& -2z\end{array}\right.\\ &\iff X = z\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Ainsi, -2 est bien valeur propre de f et on a

$$E_{-2} = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}\right).$$

- Pour $\lambda = 4$. On a

$$\begin{aligned} BX = 4X &\iff \left\{\begin{array}{rcl} -4x + y &=& 0\\ 4x - 2y + 4z &=& 0\\ y - 4z &=& 0\end{array}\right.\\ &\iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& z\\ y &=& 4z\end{array}\right.\\ &\iff X = z\begin{pmatrix}1\\4\\1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Ainsi, 4 est bien valeur propre de f et on a

$$E_4 = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\4\\1\end{pmatrix}\right).$$

On peut maintenant affirmer que

$$\text{Sp}(B) = \{0; -2, 4\}.$$

Ayant 3 valeurs propres distinctes, B est diagonalisable.

(5) Par concaténation, la famille de vecteurs propres de B

$$\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}1\\4\\1\end{pmatrix}\right)$$

forme une base de $\mathcal{M}_{3,1}$. En notant P la matrice (par conséquent inversible) de passage de la base canonique vers la base $\mathcal{F}$, et D la matrice de f dans cette nouvelle base, on a

$$P = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\-2 & 0 & 4\\1 & -1 & 1\end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix}-2 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 4\end{pmatrix}$$

et, par la formule de changement de base,

$$B = PDP^{-1}.$$

(6) C'est une récurrence facile à savoir refaire.

- Initialisation. Pour $n = 1$, la question précédente nous donne bien $B = PDP^{-1}$.

- Hérédité. Supposons que, pour un certain $n \geq 1$, on ait $B^n = PD^nP^{-1}$. Alors,

$$\begin{aligned} B^{n+1} &= B \times B^n = PDP^{-1}PD^nP^{-1}\\ &= PD \times D^nP^{-1}\\ &= PD^{n+1}P^{-1}, \end{aligned}$$

ce qui est bien la formule au rang $n+1$ et termine la récurrence.