Interrogation écrite n°3

Février 2021
Durée : 1 heure et 20 minutes

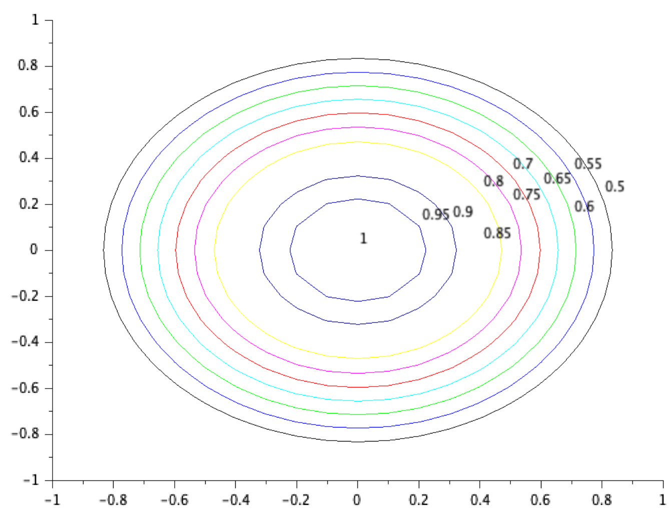
Exercice 1

Soit f la fonction qui à tout couple $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ associe le réel $e^{-x^2-y^2}$.

(1) Après avoir justifié que f était de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$, déterminer ses points critiques.
(2) Cette fonction présente-t-elle des *extrema*? Si oui, sont-il globaux?
(3) (SciLab) On introduit la fonction suivante

```
function z=f(x,y)
    z=exp(-x^2-y^2)
endfunction
```

(a) Comment représenter la surface $z = f(x,y)$ sur $[-2;2] \times [-3,3]$?
(b) Quelles instructions ont permis d'afficher la figure ci-dessous? A quoi correspond-elle? Est-ce cohérent par rapport à l'étude précédente?



Exercice 2

Un agriculteur souhaite améliorer le rendement de son exploitation en utilisant de l'engrais. Une étude a montré que le rendement, en tonnes par hectare, pour la variété de blé cultivée est donnée par

$$f(B,N) = 120B - 8B^2 + 4BN - 2N^2$$

B désigne la quantité de semences de blé utilisée, N la quantité d'engrais utilisée.

(1) Justifier que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

(2) Montrer que f ne peut présenter un extremum qu'en un seul point de $\mathbb{R}^2$. Former la matrice hessienne de f en ce point.

(3) On admet ici[1] que si

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

est une matrice diagonalisable de valeurs propres λ_1 et λ_2, alors

$$\begin{cases} \lambda_1\lambda_2 & = & ad - bc \\ \lambda_1 + \lambda_2 & = & a + d \end{cases}$$

En utilisant cette remarque, montrer que f présente bien un extremum local au point précédent. préciser sa nature et sa valeur.

(4) Développer

$$-2(y-x)^2 - 6(x-10)^2.$$

Que peut-on en conclure à propos de l'extremum précédent?

(5) Si on suppose de plus qu'une contrainte de budget impose $B + 2N = 23$, déterminer l'optimum de rendement.

(6) Démontrer, par identification de polynômes, le résultat admis à la Question 3.

Exercice 3***

Déterminer les coefficients de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 1 & x & y \\ 1 & z & t \end{pmatrix}$$

sachant que A admet notamment comme vecteurs propres

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}; \quad V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

[1] Mais dans la plupart des exercices il faut le redémontrer